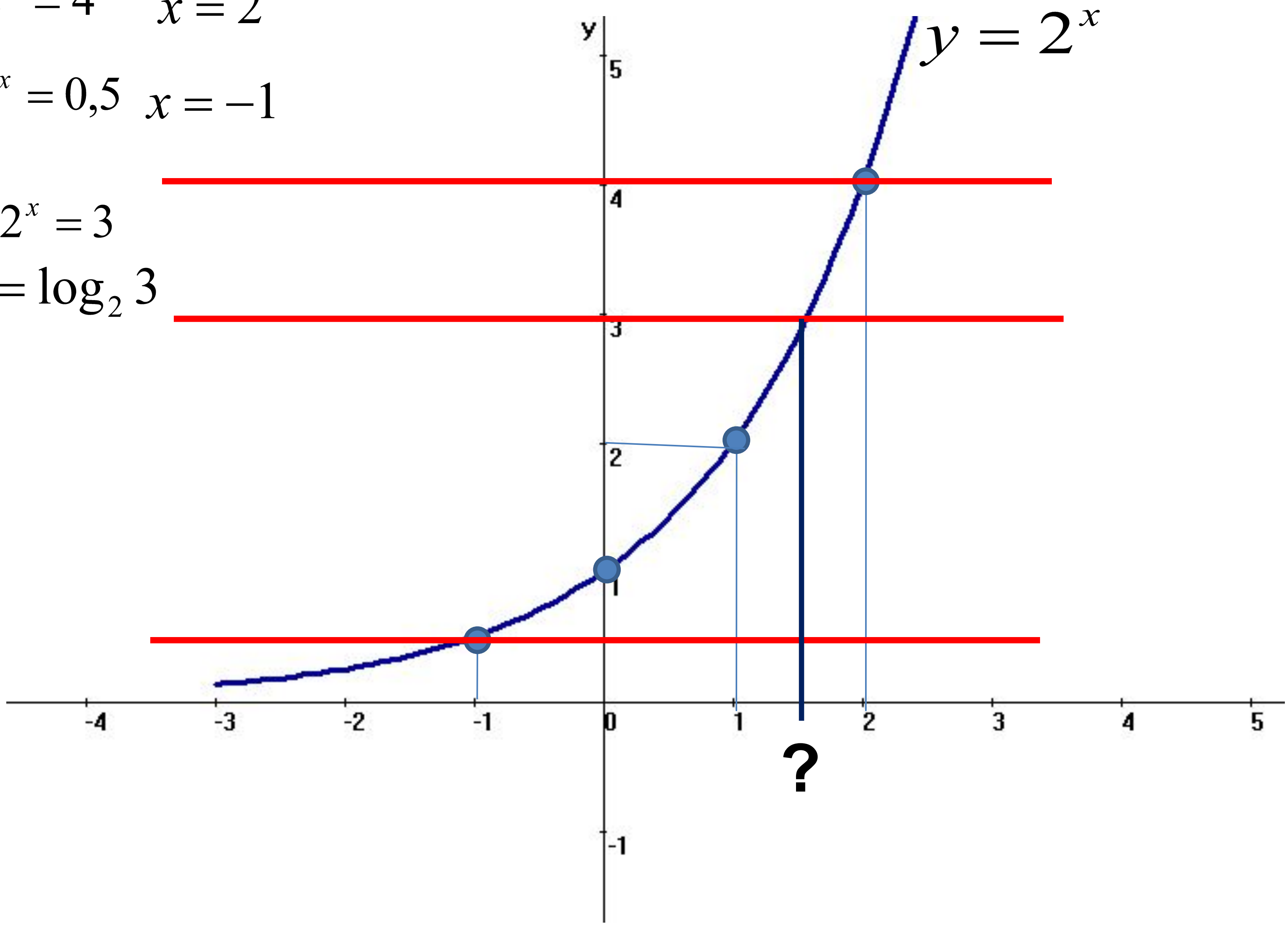
Понятие логарифма, свойства логарифмов.

$2^x = 4 \quad x = 2$

$2^x = 0{,}5 \quad x = -1$

$2^x = 3$

$x = \log_2 3$



Определение.

Логарифмом числа b (b > 0)
по основанию $a\,(a>0, a\neq 1)$
называется показатель степени,
в которую надо возвести a, чтобы
получить число b.
Обозначение : $\log_a b$

$$\boxed{\log_a b = t \leftrightarrow a^t = b}$$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

Логарифм с основанием 10 называется десятичным и обозначается lg b

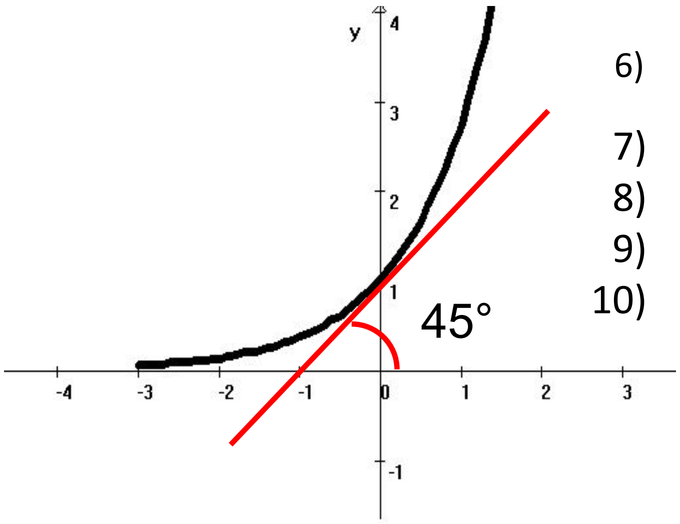
Логарифм с основанием e называется натуральным и обозначается ln b

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$e = 2{,}71828.......$$

Функция $y = e^x$

1) D(f) = R
2) Не является ни четной, ни нечетной (общего вида)
3) Возрастает на R
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу: f(x) > 0
5) Наибольшего значения не имеет, наименьшего значения не имеет
6) Непрерывна
7) E(f) = (0; +∞)
8) Выпукла вниз на R
9) Дифференцируема в любой точке
10) Горизонтальная асимптота y = 0



Угол между касательной к графику в точке x = 0 и осью абсцисс равен 45°

$$(e^x)'|_{x=0} = tg 45° = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\log_a a = 1 \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a \frac{1}{a} = -1$$

$$\lg 10 = 1$$

$$\ln e = 1$$

$$\lg 1 = 0$$

$$\ln 1 = 0$$

Свойства логарифмов

1. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0)$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0)$$

3. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени (показатель степени можно вынести за знак логарифма)

$$\log_a b^k = k\log_a b \quad (a > 0,\, a \neq 1,\, b > 0,\, k \in R)$$

4. Если основанием логарифма является степень с показателем k, то его можно вынести за знак логарифма как 1/ k

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b \quad (a > 0,\, a \neq 1,\, b > 0,\, k \neq 0)$$

5. Значение логарифма не изменится, если основание логарифма и логарифмируемое число возвести в одну и ту же степень

$$\log_{a^k} b^k = \log_a b \quad (a > 0,\, a \neq 1,\, b > 0,\, k \neq 0)$$

Формулы перехода к новому основанию

1. Если $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$
   то имеет место равенство

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

2. Если $a > 0, a \neq 1, b > 0, \ b \neq 1$
   то имеет место равенство

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Обобщение свойств логарифмов

$$1.\ \log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c| \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ bc > 0)$$

$$2.\ \log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c| \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ \frac{b}{c} > 0)$$

$$3.\ \log_a b^{2k} = 2k \log_a |b| \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 0,\ k \in Z)$$

$$4.\ \log_{a^{2k}} b = \frac{1}{2k} \log_{|a|} b \quad (a \neq 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ k \in Z)$$

Производные показательной и логарифмической функций

1. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

2. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a \quad (a > 0)$

3. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$

4. $\left(\log_{a} x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$

Дополнительные замечания о десятичных логарифмах

$$a = a_0 \cdot 10^n \quad 1 \le a_0 < 10,\ n \in Z \quad (\textit{стандартный вид числа } a)$$

$$\lg a = \lg a_0 \cdot 10^n = \lg a_0 + \lg 10^n = \lg a_0 + n \lg 10 = n + \lg a_0$$

$$n - \textit{целое число}, \quad 0 \le \lg a_0 < 1$$

n – целая часть числа $\lg a$,
$\lg a_0$ – дробная часть числа $\lg a$

Целую часть числа $\lg a$ называют **характеристикой** десятичного логарифма, а **дробную часть** числа $\lg a$ называют **мантиссой** десятичного логарифма

Дополнительные свойства логарифмов

$$1.\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \quad (a > 0,\ b > 0, b \neq 1,\ c > 0)$$

$$2.\ a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}\ (a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, \log_a b > 0)$$