# Теоретическая механика

## ***Формула экзаменационной оценки :***

$$\text{Экз. оценка} = \frac{1}{3}\,(\,T1 + T2 + П\,),$$

где Т1 – оценка за 1-й коллоквиум (или за 1-й вопрос в билете),

Т2 – оценка за 2-й коллоквиум (или за 2-й вопрос в билете),

П – общая оценка по практике.

***Общая оценка по практике*** вычисляется по формуле

$$П = \frac{1}{4}\,(\,КР1 + КР2 + КР3 + КР4\,) + РД + ПП\,,$$

где

$$РД = 0{,}05 \times КРЗД$$

( РД – оценка за работу у доски, КРЗД – количество решенных задач у доски ),

$$ПП = 0{,}1 \times (\,6 - КППЗ\,)$$

( КППЗ – количество пропущенных практических занятий ).

# Введение

Механика — это наука о движении и взаимодействии материальных тел. Под движением понимается механическое движение, т. е. изменение положения тел или частей тела в пространстве с течением времени. Основанная, как и всякая физическая наука, на наблюдении и опыте, механика может быть разделена на ***наблюдательную (опытную)*** и ***теоретическую***.

Наблюдательная (опытная) механика входит в различные отделы экспериментальной физики, астрономии, техники. В ней устанавливается связь между свойствами материальных тел, их движением и причинами, вызывающими или изменяющими движение. Эти причины называют силами. Упомянутая связь формулируется в виде законов движения, которые не являются математическими следствиями каких-то изначальных истин, а представляют собой утверждения, основанные на большом числе согласующихся между собой опытных фактов.

Теоретическая, или рациональная, механика опирается на некоторое конечное число законов (аксиом), установленных в опытной механике, принимаемых за истины и не требующих доказательства.

Теоретическая механика имеет дедуктивный характер. Опираясь на аксиомы как на известный и проверенный практикой и экспериментом фундамент, теоретическая механика возводит свое здание при помощи строгих математических выводов.

По Ньютону, теоретическая механика «есть учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений, точно изложенное и доказанное».

Теоретическая механика как часть естествознания, использующая математические методы, имеет дело не с самими реальными материальными объектами, а с их моделями. Такими моделями, изучаемыми в теоретической механике, являются материальные точки, системы материальных точек, абсолютно твердые тела, деформируемые сплошные среды.

При изучении теоретической механики методически удобно разделить ее на кинематику и динамику; из динамики часто выделяют еще статику. В кинематике движение изучается только с геометрической точки зрения; причины, обусловливающие движение, кинематика не рассматривает. Изучением движения в связи с причинами, вызывающими или изменяющими его, занимается динамика. Как часть динамики статика изучает те условия, при которых материальные объекты могут оставаться в покое; к статике относится также разработка способов эквивалентных преобразований систем сил.

# Часть 1

# Кинематика

# Литература

1. *Садовский Б.Н., Прядко И.Н. Кинематика. Конспекты лекций.*
2. *Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва: ЧеРо, 1999.*
3. *Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: в 2–х ч. М.: Наука, 1965.*

( см. http://vk.com/t_meh )

# Глава 1. Основные понятия и задачи кинематики

## § 1. Пространство и время. Материальные точки. Отмеченные точки.

**1. Пространство и время.** Механическое движение происходит в пространстве и времени. В теоретической механике в качестве моделей реальных пространства и времени принимаются их простейшие модели — ***абсолютное пространство*** и ***абсолютное время***, существование которых постулируется. *Абсолютные пространство и время считаются независимыми одно от другого*; в этом состоит основное отличие классической модели пространства и времени от их модели в теории относительности, где пространство и время взаимосвязаны.

Предполагается, что **абсолютное пространство** представляет собой трехмерное, однородное *(все точки пространства равноправны)* и изотропное (*все направления равноправны)* евклидово пространство. Наблюдения показывают, что для небольших по размерам областей реального физического пространства евклидова геометрия справедлива.

**Абсолютное время** в теоретической механике считается непрерывно изменяющейся величиной, оно течет от прошлого к будущему. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

*Движение в его геометрическом представлении имеет относительный характер*: одно тело движется относительно другого, если расстояния между всеми или некоторыми точками этих тел изменяются. За единицу измерения времени принимается секунда. В кинематике надо еще выбрать единицу длины, например, 1 м, 1 см и т.п. Тогда основные кинематические характеристики движения: положение, скорость, ускорение, о которых будет идти речь дальше, определяются при помощи единиц длины и времени.

**2. Материальные точки. Отмеченные точки.**

*Под* ***материальной точкой*** *понимается частица материи, достаточно малая для того, чтобы можно было пренебречь размерами частицы и ее вращением.*

Можно или нельзя принять материальный объект за материальную точку, зависит от конкретной задачи. Например, при определении положения спутника Земли в космическом пространстве очень часто целесообразно принимать его за материальную точку.

Если же рассматриваются задачи, связанные с ориентацией антенн, солнечных батарей, оптических приборов, установленных на спутнике, то его нельзя считать материальной точкой, так как в вопросах ориентации нельзя пренебрегать вращением спутника и его следует рассматривать как объект, имеющий конечные, хотя и малые по сравнению с расстоянием до Земли, размеры.

***Отмеченной точкой*** *будем называть геометрическую точку, которую каким-либо образом отметили.* Например, вершина Эйфелевой башни и центр диска Луны – отмеченные точки.

Отмеченной точкой является конец отрезка длиной 1 метр, мысленно проведенного из центра некоторой прямоугольной площадки на поверхности Земли и перпендикулярного этой площадке.

Из последнего примера следует, *что отмеченная точка может не быть частицей (материальной точкой).*

Вообще, задание любого закона, определяющего изменение во времени координат точки относительно какой-нибудь системы отсчета, определяет отмеченную точку.

***Механической системой***, или системой материальных точек, мы будем называть выделенную каким-либо образом совокупность материальных точек.

**3. Задачи кинематики.** Задать движение точки (системы) — значит дать способ определения положения точки (всех точек, образующих систему) в любой момент времени.

*Задачи кинематики состоят в разработке способов задания движения и методов определения скорости, ускорения и других кинематических величин точек, составляющих механическую систему.*

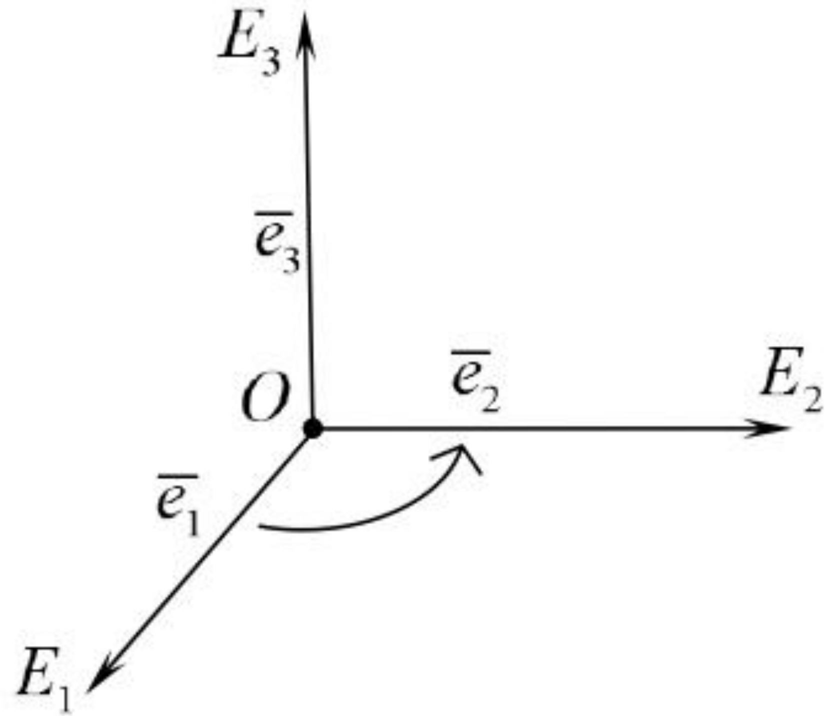
# § 2. Декартовы системы отсчета

***Декартовой системой отсчета (ДСО)*** будем называть упорядоченную четверку отмеченных точек $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ в абсолютном пространстве $E^3$, для которой в любой момент времени выполнены три условия:

1) $|OE_1| = |OE_2| = |OE_3| = 1$,

2) $OE_i \perp OE_j \ (i \neq j)$,

3) векторы $\overline{OE}_1$, $\overline{OE}_2$, $\overline{OE}_3$ образуют *правую тройку*, т. е. с конца последнего из них кратчайший поворот первого до второго кажется происходящим против часовой стрелки.




Для векторов $\overline{OE}_1$, $\overline{OE}_2$, $\overline{OE}_3$ мы будем использовать обозначения $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ (иногда $\overline{e}_x, \overline{e}_y, \overline{e}_z$ или $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$).

Положение отмеченной точки $A$ по отношению к декартовой системе отсчета $S$ в любой момент времени определяется ее *геометрическим радиус-вектором* $\overline{OA}$, который можно разложить по ортонормированному базису $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$:

$$\overline{OA} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3 .$$

Коэффициенты $x, y, z$ этого разложения представляют собой *координаты* точки $A$ в ДСО $S$.

## Арифметический трехмерный вектор

$$r_{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$ называют

*арифметическим радиус-вектором* точки $A$ (в ДСО $S$),

или *координатным вектором* точки $A$ (в ДСО $S$),

или *координатным представлением* вектора $\overline{OA}$ (в ДСО $S$)

($\mathbb{R}^3$ – арифметическое пространство).

Пусть $V^3$ – пространство геометрических (свободных) векторов. Соответствие между геометрическими и арифметическими векторами $\overline{OA}$ и $r_{OA}$, задаваемое с помощью базиса $\overline{e} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$, является изоморфизмом линейных евклидовых пространств $V^3$ и $\mathbb{R}^3$, т.е. взаимно однозначным отображением, сохраняющим линейные операции и скалярное произведение.

Геометрическим векторам $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ соответствуют арифметические векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## § 3. Закон движения, скорость, ускорение, траектория

Рассмотрим ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ и отмеченную точку $A$, движущуюся относительно $S$.

$$r_{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ – арифметический радиус-вектор точки $A$ в ДСО $S$.

Пусть известны функции $f_x(t),\ f_y(t),\ f_z(t),$ выражающие зависимость координат точки $A$ от времени $t$:

$$x = f_x(t),\quad y = f_y(t),\quad z = f_z(t). \qquad (3.1)$$

Рассмотрим вектор-функцию $r(t) = \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix}.$

Система уравнений (3.1) равносильна уравнению

$$r_{OA} = r(t), \qquad (3.2)$$

которое называется ***законом движения*** *точки* $A$ *относительно ДСО* $S$.

***Скорость*** $v$ и ***ускорение*** $w$ точки $A$ в момент $t$ относительно ДСО $S$ определяются равенствами:

$$v := \dot{r}(t) \ \left( = \frac{dr(t)}{dt} \right), \ w := \ddot{r}(t) \ \left( = \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \right).$$

Множество

$$\mathcal{T} = \{ r(t) : t \in (\alpha, \beta) \}$$

называется ***арифметической траекторией*** данной точки (относительно ДСО $S$)

( $(\alpha, \beta)$ – некоторый промежуток времени).

Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее ***геометрической траекторией***.