

# Теоретическая механика

## Формула экзаменационной оценки :

$$\text{Экз. оценка} = \frac{1}{3} ( T1 + T2 + П ),$$

где  $T1$  – оценка за 1-й коллоквиум (или за 1-й вопрос в билете),

$T2$  – оценка за 2-й коллоквиум (или за 2-й вопрос в билете),

$П$  – общая оценка по практике.

**Общая оценка по практике** вычисляется по формуле

$$П = \frac{1}{4} ( КР1 + КР2 + КР3 + КР4 ) + РД + ПП ,$$

где

$$РД = 0,05 \times КРЗД$$

(  $РД$  – оценка за работу у доски,  $КРЗД$  – количество решенных задач у доски ),

$$ПП = 0,1 \times ( 6 - КППЗ )$$

(  $КППЗ$  – количество пропущенных практических занятий ).

# Введение

Механика — это наука о движении и взаимодействии материальных тел. Под движением понимается механическое движение, т. е. изменение положения тел или частей тела в пространстве с течением времени. Основанная, как и всякая физическая наука, на наблюдении и опыте, механика может быть разделена на *наблюдательную (опытную)* и *теоретическую*.

Наблюдательная (опытная) механика входит в различные отделы экспериментальной физики, астрономии, техники. В ней устанавливается связь между свойствами материальных тел, их движением и причинами, вызывающими или изменяющими движение. Эти причины называют силами. Упомянутая связь формулируется в виде законов движения, которые не являются математическими следствиями каких-то изначальных истин, а представляют собой утверждения, основанные на большом числе согласующихся между собой опытных фактов.

Теоретическая, или рациональная, механика опирается на некоторое конечное число законов (аксиом), установленных в опытной механике, принимаемых за истины и не требующих доказательства.

Теоретическая механика имеет дедуктивный характер. Опираясь на аксиомы как на известный и проверенный практикой и экспериментом фундамент, теоретическая механика возводит свое здание при помощи строгих математических выводов.

По Ньютону, теоретическая механика «есть учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений, точно изложенное и доказанное».

Теоретическая механика как часть естествознания, использующая математические методы, имеет дело не с самими реальными материальными объектами, а с их моделями. Такими моделями, изучаемыми в теоретической механике, являются материальные точки, системы материальных точек, абсолютно твердые тела, деформируемые сплошные среды.

При изучении теоретической механики методически удобно разделить ее на кинематику и динамику; из динамики часто выделяют еще статику. В кинематике движение изучается только с геометрической точки зрения; причины, обуславливающие движение, кинематика не рассматривает. Изучением движения в связи с причинами, вызывающими или изменяющими его, занимается динамика. Как часть динамики статика изучает те условия, при которых материальные объекты могут оставаться в покое; к статике относится также разработка способов эквивалентных преобразований систем сил.

# Часть 1

# Кинематика



# Литература

1. *Садовский Б.Н., Прядко И.Н. Кинематика. Конспекты лекций.*
2. *Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва: ЧеРо, 1999.*
3. *Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: в 2-х ч. М.: Наука, 1965.*

( см. [http://vk.com/t\\_meh](http://vk.com/t_meh) )

# **Глава 1. Основные понятия и задачи кинематики**

## § 1. Пространство и время. Материальные точки. Отмеченные точки.

**1. Пространство и время.** Механическое движение происходит в пространстве и времени. В теоретической механике в качестве моделей реальных пространства и времени принимаются их простейшие модели — *абсолютное пространство* и *абсолютное время*, существование которых постулируется. *Абсолютные пространство и время считаются независимыми одно от другого*; в этом состоит основное отличие классической модели пространства и времени от их модели в теории относительности, где пространство и время взаимосвязаны.

Предполагается, что **абсолютное пространство** представляет собой трехмерное, однородное (*все точки пространства равноправны*) и изотропное (*все направления равноправны*) евклидово пространство. Наблюдения показывают, что для небольших по размерам областей реального физического пространства евклидова геометрия справедлива.

**Абсолютное время** в теоретической механике считается непрерывно изменяющейся величиной, оно течет от прошлого к будущему. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

*Движение в его геометрическом представлении имеет относительный характер: одно тело движется относительно другого, если расстояния между всеми или некоторыми точками этих тел изменяются. За единицу измерения времени принимается секунда. В кинематике надо еще выбрать единицу длины, например, 1 м, 1 см и т.п. Тогда основные кинематические характеристики движения: положение, скорость, ускорение, о которых будет идти речь дальше, определяются при помощи единиц длины и времени.*

## 2. Материальные точки. Отмеченные точки.

*Под **материальной точкой** понимается частица материи, достаточно малая для того, чтобы можно было пренебречь размерами частицы и ее вращением.*

Можно или нельзя принять материальный объект за материальную точку, зависит от конкретной задачи. Например, при определении положения спутника Земли в космическом пространстве очень часто целесообразно принимать его за материальную точку.



Если же рассматриваются задачи, связанные с ориентацией антенн, солнечных батарей, оптических приборов, установленных на спутнике, то его нельзя считать материальной точкой, так как в вопросах ориентации нельзя пренебрегать вращением спутника и его следует рассматривать как объект, имеющий конечные, хотя и малые по сравнению с расстоянием до Земли, размеры.

*Отмеченной точкой* будем называть геометрическую точку, которую каким-либо образом отметили. Например, вершина Эйфелевой башни и центр диска Луны – отмеченные точки.

Отмеченной точкой является конец отрезка длиной 1 метр, мысленно проведенного из центра некоторой прямоугольной площадки на поверхности Земли и перпендикулярного этой площадке.

*Из последнего примера следует, что отмеченная точка может не быть частицей (материальной точкой).*

Вообще, задание любого закона, определяющего изменение во времени координат точки относительно какой-нибудь системы отсчета, определяет отмеченную точку.



*Механической системой*, или системой материальных точек, мы будем называть выделенную каким-либо образом совокупность материальных точек.

**3. Задачи кинематики.** Задать движение точки (системы) — значит дать способ определения положения точки (всех точек, образующих систему) в любой момент времени.

*Задачи кинематики состоят в разработке способов задания движения и методов определения скорости, ускорения и других кинематических величин точек, составляющих механическую систему.*

## § 2. Декартовы системы отсчета

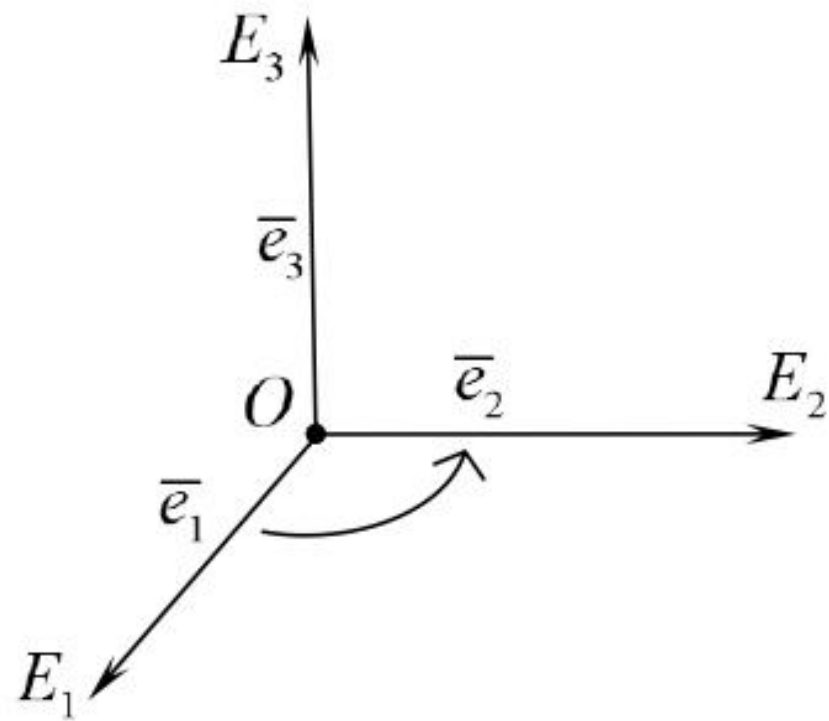
*Декартовой системой отсчета (ДСО)*

будем называть упорядоченную четверку отмеченных точек  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$  в абсолютном пространстве  $E^3$ , для которой в любой момент времени выполнены три условия:

1)  $|OE_1| = |OE_2| = |OE_3| = 1,$

2)  $OE_i \perp OE_j \ (i \neq j),$

3) векторы  $\overline{OE_1}, \overline{OE_2}, \overline{OE_3}$  образуют *правую тройку*, т. е. с конца последнего из них кратчайший поворот первого до второго кажется происходящим против часовой стрелки.



Для векторов  $\overline{OE_1}$ ,  $\overline{OE_2}$ ,  $\overline{OE_3}$  мы будем использовать обозначения  $\overline{e_1}$ ,  $\overline{e_2}$ ,  $\overline{e_3}$  (иногда  $\overline{e_x}$ ,  $\overline{e_y}$ ,  $\overline{e_z}$  или  $\overline{i}$ ,  $\overline{j}$ ,  $\overline{k}$ ).

Положение отмеченной точки  $A$  по отношению к декартовой системе отсчета  $S$  в любой момент времени определяется ее *геометрическим радиус-вектором*  $\overline{OA}$ , который можно разложить по ортонормированному базису  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ :

$$\overline{OA} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3.$$

Коэффициенты  $x, y, z$  этого разложения представляют собой *координаты* точки  $A$  в ДСО  $S$ .

## Арифметический трехмерный вектор

$$r_{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ называют}$$

*арифметическим радиус-вектором* точки  $A$   
(в ДСО  $S$ ),

или *координатным вектором* точки  $A$  (в  
ДСО  $S$ ),

или *координатным представлением*  
вектора  $\overline{OA}$  (в ДСО  $S$ )

( $\mathbb{R}^3$  – арифметическое пространство).

Пусть  $V^3$  – пространство геометрических (свободных) векторов. Соответствие между геометрическими и арифметическими векторами  $\overline{OA}$  и  $r_{OA}$ , задаваемое с помощью базиса  $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ , является изоморфизмом линейных евклидовых пространств  $V^3$  и  $\mathbb{R}^3$ , т.е. взаимно однозначным отображением, сохраняющим линейные операции и скалярное произведение.

Геометрическим векторам  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$   
соответствуют арифметические векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



### § 3. Закон движения, скорость, ускорение, траектория

Рассмотрим ДСО  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$  и отмеченную точку  $A$ , движущуюся относительно  $S$ .

$r_{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  – арифметический радиус-вектор точки  $A$  в ДСО  $S$ .



Пусть известны функции  $f_x(t)$ ,  $f_y(t)$ ,  $f_z(t)$ , выражающие зависимость координат точки  $A$  от времени  $t$ :

$$x = f_x(t), \quad y = f_y(t), \quad z = f_z(t). \quad (3.1)$$

Рассмотрим вектор-функцию  $r(t) = \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix}$ .

Система уравнений (3.1) равносильна уравнению

$$r_{OA} = r(t), \quad (3.2)$$

которое называется **законом движения** точки  $A$  относительно ДСО  $S$ .

**Скорость**  $v$  и **ускорение**  $w$  точки  $A$  в момент  $t$  относительно ДСО  $S$  определяются равенствами:

$$v := \dot{r}(t) \left( = \frac{dr(t)}{dt} \right), \quad w := \ddot{r}(t) \left( = \frac{d^2r(t)}{dt^2} \right).$$

Множество

$$\mathcal{T} = \{r(t) : t \in (\alpha, \beta)\}$$

называется **арифметической траекторией** данной точки (относительно ДСО  $S$ )

(  $(\alpha, \beta)$  – некоторый промежуток времени).

Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее *геометрической траекторией*.