

Математическая логика (булева алгебра)

Переменные в булевой алгебре

Переменные могут принимать только два значения: 0 и 1.
Результат любых действий над переменными тоже равен или 0, или 1 (число 10_2 получиться не может).

1 по-другому называют "правдой" или true, 0 – это "ложь", false.

Булева алгебра – основа информатики и программирования.
Электронные схемы компьютера работают по правилам булевой алгебры.

Переменные в булевой алгебре

Обычная математика:

$$A = 13.45$$

$$B = -20$$

$$A + B = -6.55$$

A и B могут принимать любые числовые значения, результат – любое число.

Булева алгебра:

$$A = 0$$

$$B = 1$$

$$A \vee B = 1$$

A и B принимают только значения 0 или 1, результат тоже либо 0, либо 1.

Отрицание (логическое НЕ, \neg , — , $!$, not)

x	$\neg x$
0	1
1	0

Конъюнкция (логическое И, \wedge , &, and)

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Как запомнить: $X * Y$ – логическое умножение чисел

Дизъюнкция (логическое ИЛИ, \vee , |, or)

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Как запомнить: $X + Y$ – логическое сложение чисел

Импликация (следование, \rightarrow)

X	Y	$X \rightarrow Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Как запомнить: из правды никогда не может следовать ложь, всё остальное – возможно.

Эквивалентность (\leftrightarrow , \equiv)

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Упрощение логических выражений

$$A \wedge \bar{A} = 0$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee \bar{A} = 1$$

$$A \vee A = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \vee 0 = A$$

Формулы склеивания:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) = A$$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) = A$$

Законы инверсии
(де Моргана):

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

Формулы

поглощения:

$$A \vee (A \wedge B) = A$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

$$A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$$

$$A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B$$

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

Закон двойного
отрицания:

$$\overline{\bar{A}} = A$$

Переместительный закон:

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$\overline{(A \rightarrow B)} = \bar{A} \& B$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

Сочетательный закон:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$\bar{A} \& (A \vee B) = \bar{A} \& B$$

$$A \leftrightarrow B = (A \& B) \vee (\bar{A} \& \bar{B}) \\ = (\bar{A} \vee B) \& (A \vee \bar{B})$$

$$A \vee (\bar{A} \& B) = A \vee B$$

Приоритет логических операций

Как и в обычной математике, на основе операций \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow составляются длинные формулы.

Пример:

$$F(A, B, C, D) = A \wedge B \leftrightarrow C \rightarrow D$$

Действия в выражении выполняются в соответствии с приоритетом операций:

- 1) выражение в скобках – высший приоритет;
- 2) отрицание (\neg);
- 3) конъюнкция (\wedge);
- 4) дизъюнкция (\vee);
- 5) импликация (\rightarrow);
- 6) эквиваленция (\leftrightarrow) – низший приоритет.

Приоритет логических операций

Примеры:

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ то же самое, что и $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D$.

$A \wedge B \equiv C \rightarrow D$ то же самое, что и $(A \wedge B) \equiv (C \rightarrow D)$