Дифференциальное исчисление элементарной и сложной функции функции

Дифференциальное исчисление – раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применение к исследованию функций.

.

Операцию нахождения для функции $y = f(x)$ её производной функции называют ***дифференцированием функции*** $f(x)$.

Правила дифференцирования

1) *Производная постоянной функции равна нулю*, т.е.

$C' = 0$, где C – константа.

2) *Производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных*, т.е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3) *Производная произведения находится по правилу*:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Замечание. Формула дифференцирования произведения может быть легко обобщена на случай большего числа множителей. Например,

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w',$$

$$(u \cdot v \cdot w \cdot t)' = u' \cdot v \cdot w \cdot t + u \cdot v' \cdot w \cdot t + u \cdot v \cdot w' \cdot t + u \cdot v \cdot w \cdot t'.$$

4) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, где C – константа.

Говорят: «постоянный множитель выносится за знак производной».

5) *Производная дроби находится по правилу*:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \left(v(x) \neq 0\right).$$

6) *Если функция* $\phi(t)$ *имеет производную в точке* t, *а функция* $f(u)$ *имеет производную в точке* $u = \phi(t)$, *то сложная функция* $y = f(\phi(t))$ *имеет производную в точке* t, *причем*

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

(правило дифференцирования сложной функции).

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Зная, что $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$, получить формулы

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

2)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1;\, 1);$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x.$$

По определению и с помощью правил дифференцирования

находят производные основных элементарных функций (таблица производных).

Производная любой элементарной функции находится с помощью таблицы производных

и правил дифференцирования.