Т4 (Дирихле). $\forall x \in X$ $\{a_n(x)\}$ - монотонна, причём $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} a(x) \equiv 0$; $\exists M > 0 : \forall x \in X$ $\forall n \geq 1$ $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leq M$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows$ на X.

$\underline{\text{Т4}}$ (Дирихле). $\forall x \in X$ $\{a_n(x)\}$ - монотонна, причём $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} a(x) \equiv 0$;

$\exists M > 0 : \forall x \in X \;\; \forall n \geq 1 \;\; \left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leq M$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows$ на X.

Д-во. $B_1(x) = b_1(x)$, $B_2(x) = b_1(x) + b_2(x), \ldots, B_k(x) = b_1(x) + \ldots + b_k(x), \ldots$

$a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} a(x) \equiv 0$, т.е. $\underline{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N} \;\; \forall n > N \;\; \forall x \in X \;\; |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$. $\Rightarrow \underline{\forall m > n > N}$

$\underline{\forall x \in X} \;\; \underline{\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k(x) b_k(x)\right|} = (\text{пр-ие Абеля}) = |a_m(x) B_m(x) - a_{n+1}(x) B_n(x) +$

$+ \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) B_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3M} M + \frac{\varepsilon}{3M} M + M \left| \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} \underbrace{(a_k(x) - a_{k+1}(x))}_{\forall x \text{ - одинаковые знаки}} \right| \leq$

$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + M \left| a_{n+1}(x) - a_{n+2}(x) + a_{n+2}(x) - a_{n+3}(x) + \ldots + a_{m-1}(x) - a_m(x) \right| =$

$= \frac{2\varepsilon}{3} + M \left| a_{n+1}(x) - a_m(x) \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + M \left| a_{n+1}(x) \right| \underline{<} \frac{2\varepsilon}{3} + M \frac{\varepsilon}{3M} = \underline{\varepsilon}$, т.е.

для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ выполняется критерий Коши $\Rightarrow \rightrightarrows$.

Т. доказана.

T5 (Абель) $\forall x \in X$ $\{a_n(x)\}$ монотонна, причём $\exists K > 0 : \forall x \in X$ $\forall n \geq 1$ $|a_n(x)| \leq K$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \rightrightarrows$ на X. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows$ на X

$\underline{\text{Т5}}$ (Абель) $\forall x \in X$ $\{a_n(x)\}$ монотонна, причём $\exists K>0: \forall x\in X$ $\forall n \geq 1$

$|a_n(x)| \leq K$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \rightrightarrows$ на X. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows$ на X

Д-во. $B_k(x) = b_1(x)+\ldots+b_k(x)$ $\forall k\geq 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} B(x) \Rightarrow \underline{\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N}$

$\forall x\in X$ $|B_n(x)-B(x)| < \frac{\varepsilon}{4K} \Rightarrow \underline{\forall m>n>N\ \ \forall x\in X} \ \underline{\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k(x) b_k(x)\right|} =$ (пр-ие Абеля)

$= \left| a_m(x)(B_m(x)-B(x)) - a_{n+1}(x)(B_n(x)-B(x)) + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k(x)-a_{k+1}(x))(B_k(x)-B(x)) \right| < \frac{\varepsilon}{4K} K +$

$+ \frac{\varepsilon}{4K} K + \frac{\varepsilon}{4K} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} \underbrace{(a_k(x) - a_{k+1}(x))}_{\forall x\in X \text{ одинаковые знаки}} \right| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K} |a_{n+1}(x) - a_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K}(K+K) = \varepsilon$

т.е. для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ выполняется критерий Коши $\Rightarrow \rightrightarrows$.

Т. доказана

Св-ва равном. сх-ся посл-стей и рядов

Т1. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, x_0 - пред. точка X, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Св-ва равном. сх-ся посл-стей и рядов

Т1. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, x_0 - пред. точка X, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Д-во Т1. x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall m,n>N\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$x\to x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n>N\quad |A_n-A_m|\leq \frac{\varepsilon}{3}\ (<\varepsilon)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ (обозначение). В двух строках $m\to\infty$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f(x)|\leq \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N\qquad |A_n-A|\leq\frac{\varepsilon}{3}$

$n>N$ (какое-нибудь) $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \forall x\in X\ \boxed{0<|x-x_0|<\delta}\ |f_n(x)-A_n|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f(x)-A|\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-A_n|+|A_n-A|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$

$x\to x_0+0,\ x_0-0,\ +\infty,\ -\infty,\ \infty$ - самост.

Т. доказана.

Св-ва равном. сх-ся посл-стей и рядов

Т1. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, x_0 - пред. точка X, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Д-во Т1. x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall m,n>N\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$x\to x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n>N\quad |A_n-A_m|\leq\frac{\varepsilon}{3}\ (<\varepsilon)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ (обозначение). В двух строках $m\to\infty$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N\qquad |A_n-A|\leq\frac{\varepsilon}{3}$

$n>N$ (какое-нибудь) $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in X\ \boxed{0<|x-x_0|<\delta}\ |f_n(x)-A_n|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f(x)-A| \leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-A_n|+|A_n-A| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$.

$x\to x_0+0,\ x_0-0,\ +\infty,\ -\infty,\ \infty$ - самост.

Т. доказана.

Св-ва равном. сх-ся посл-стей и рядов

Т1. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, x_0 - пред. точка X, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=A_n$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Т2. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x)$ непр. при $x=x_0\in[a,b] \Rightarrow f(x)$ непр. при $x=x_0$

Д-во Т1. x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall m,n>N\ \ \forall x\in X\ \ |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$x\to x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n>N\ \ |A_n-A_m|\leq\frac{\varepsilon}{3}\ (<\varepsilon)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ (обозначение). В двух строках $m\to\infty$

$\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N\ \ \forall x\in X\ \ |f_n(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{3}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N\ \ \ \ |A_n-A|\leq\frac{\varepsilon}{3}$

$n>N$ (какое-нибудь) $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=A_n \Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in X\ \boxed{0<|x-x_0|<\delta}\ |f_n(x)-A_n|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f(x)-A|\leq|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-A_n|+|A_n-A|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$

$x\to x_0+0,\ x_0-0,\ +\infty,\ -\infty,\ \infty$ - самост.

Т. доказана.

Св-ва равном. сх-ся посл-стей и рядов

Т1. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, x_0 - пред. точка X, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Т2. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x)$ непр. при $x = x_0 \in [a,b] \Rightarrow f(x)$ непр. при $x=x_0$

Т3. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x) \in C[a,b]$

Д-во Т1. x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall m,n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$x \to x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m,n > N\quad |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{3}\ (< \varepsilon)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ (обозначение). В двух строках $m \to \infty$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N\ \forall x \in X\quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N\quad |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$n > N$ (какое-нибудь) $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in X\ \boxed{0 < |x - x_0| < \delta}\ |f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

$x \to x_0+0, x_0-0, +\infty, -\infty, \infty$ - самост.

Т. доказана.

Св-ва равном. сх-ся посл-стей и рядов

Т1. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, x_0 - пред. точка X, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Т2. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x)$ непр. при $x = x_0 \in [a,b] \Rightarrow f(x)$ непр. при $x = x_0$

Т3. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x) \in C[a,b]$

Сл. $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a,b]$, $f_n(x) \in C[a,b]$, $f(x) \notin C[a,b] \Rightarrow f_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows}$

Д-во Т1. x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall m,n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$x \to x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m,n > N\quad |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{3}\ (<\varepsilon)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ (обозначение). В двух строках $m \to \infty$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N\ \forall x \in X\quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N\qquad |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$n > N$ (какое-нибудь) $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in X\ \boxed{0 < |x - x_0| < \delta}\ |f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

$x \to x_0 + 0$, $x_0 - 0$, $+\infty$, $-\infty$, ∞ - самост.

Т. доказана.

Св-ва равном. сх-ся посл-стей и рядов

T1. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, x_0 - пред. точка X, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

T2. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x)$ непр. при $x=x_0\in[a,b] \Rightarrow f(x)$ непр. при $x=x_0$

T3. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x)\in C[a,b] \Rightarrow f(x)\in C[a,b]$

Сл. $f_n(x)\to f(x)$ $\forall x\in[a,b]$, $f_n(x)\in C[a,b]$, $f(x)\notin C[a,b] \Rightarrow f_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows}$

T1' $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, x_0 - пред. т. X, $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = a_n \Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\left(\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right)\right)$$

T2' $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $u_n(x)$ непр. при $x=x_0\in[a,b] \Rightarrow S(x)$ непр. при $x=x_0$

T3' $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $u_n(x)\in C[a,b] \Rightarrow S(x)\in C[a,b]$

Д-во T1. x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$f_n(x)\overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall m,n>N\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$x\to x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n>N\quad |A_n-A_m|\le\frac{\varepsilon}{3}\ (<\varepsilon)$

$\Rightarrow \exists\lim\limits_{n\to\infty}A_n = A$ (обозначение). В двух строках $m\to\infty$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N\ \forall x\in X\quad |f_n(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N\quad |A_n-A|\le\frac{\varepsilon}{3}$

$n>N$ (какое-нибудь) $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=A_n \Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x\in X\ \boxed{0<|x-x_0|<\delta}\ |f_n(x)-A_n|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f(x)-A|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-A_n|+|A_n-A|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$.

$x\to x_0+0,\ x_0-0,\ +\infty,\ -\infty,\ \infty$ - самост.

Т. доказана.

Св-ва равном. сх-ся посл-стей и рядов

T1. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, x_0 - пред. точка X, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

T2. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x)$ непр. при $x=x_0\in[a,b] \Rightarrow f(x)$ непр. при $x=x_0$

T3. $f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x)\in C[a,b] \Rightarrow f(x)\in C[a,b]$

Сл. $f_n(x)\to f(x)$ $\forall x\in[a,b]$, $f_n(x)\in C[a,b]$, $f(x)\notin C[a,b] \Rightarrow f_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows}$

T1' $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, x_0 - пред. т. X, $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = a_n \Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ сх и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} S(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$.

$$\left(\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = \sum_{n=1}^\infty \left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right)\right)$$

T2' $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $u_n(x)$ непр. при $x=x_0\in[a,b] \Rightarrow S(x)$ непр. при $x=x_0$

T3' $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $u_n(x)\in C[a,b] \Rightarrow S(x)\in C[a,b]$

T4. (Дини). $f_n(x)\in C[a,b]$, $\forall x\in[a,b]$ $f_n(x)\uparrow f(x)\in C[a,b] \Rightarrow f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$

$f_n(x)\overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall m,n>N\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$x\to x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n>N\ \ |A_n-A_m|\le\frac{\varepsilon}{3}\ (<\varepsilon)$

$\Rightarrow \exists\lim\limits_{n\to\infty}A_n = A$ (обозначение). В двух строках $m\to\infty$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N\ \forall x\in X\ \ |f_n(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N\ \ \ |A_n-A|\le\frac{\varepsilon}{3}$

$n>N$ (какое-нибудь) $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=A_n \Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x\in X\ \boxed{0<|x-x_0|<\delta}\ |f_n(x)-A_n|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f(x)-A| \le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-A_n|+|A_n-A| < \frac\varepsilon3+\frac\varepsilon3+\frac\varepsilon3=\varepsilon$.

$x\to x_0+0,\ x_0-0,\ +\infty,\ -\infty,\ \infty$ - самост.

Т. доказана.

Д-во Т4. $\varphi_n(x)=f(x)-f_n(x)\in C[a,b]$, $\forall x\in[a,b]$ $0\le\varphi_n(x)\downarrow 0$, т.е.

$\forall x\in[a,b]$ $\varphi_1(x)\ge\ldots\ge\varphi_n(x)\ge\varphi_{n+1}(x)\ge\ldots\ge0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$.

Монот. $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n: \forall x\in[a,b]\ \ 0\le\varphi_n(x)<\varepsilon$ (?). Пусть не так,

т.е. $\exists\varepsilon>0\ \forall n=1,2,\ldots\ \exists x_n\in[a,b]: \varphi_n(x_n)\ge\varepsilon \Rightarrow$ (Т. Б-В) $\Rightarrow$

$\exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}: \exists\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in[a,b]$. Но $\forall m\ \exists k: n_k\ge m$

$\Rightarrow \varphi_m(x_{n_k})\ge\varphi_{n_k}(x_{n_k})\ge\varepsilon$ $\ k\to\infty \Rightarrow$ (непр.) $\Rightarrow \varphi_m(x_0)=$

$=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})\ge\varepsilon$, т.е. $\forall m\ \varphi_m(x_0)\ge\varepsilon$. $m\to\infty\Rightarrow$

$0=\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x_0)\ge\varepsilon$. Противоречие $\Rightarrow$ Т. доказана

Св-ва равном. сх-ся посл-стей и рядов

Т1. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, x_0 - пред. точка X, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=A_n$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Т2. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x)$ непр. при $x=x_0\in[a,b] \Rightarrow f(x)$ непр. при $x=x_0$

Т3. $f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x)\in C[a,b] \Rightarrow f(x)\in C[a,b]$

Сл. $f_n(x)\to f(x)$ $\forall x\in[a,b]$, $f_n(x)\in C[a,b]$, $f(x)\notin C[a,b] \Rightarrow f_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows}$

Т1' $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, x_0 - пред. т. X, $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x)=a_n \Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ сх и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} S(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$.

$$\left(\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = \sum_{n=1}^\infty\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right)\right)$$

Т2' $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $u_n(x)$ непр. при $x=x_0\in[a,b] \Rightarrow S(x)$ непр. при $x=x_0$

Т3' $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $u_n(x)\in C[a,b] \Rightarrow S(x)\in C[a,b]$

Т4. (Дини). $f_n(x)\in C[a,b]$, $\forall x\in[a,b]$ $f_n(x)\uparrow f(x)\in C[a,b] \Rightarrow f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$

Т4'. $u_n(x)\in C[a,b]$, $\forall x\in[a,b]$ $u_n(x)\ge 0$,

$$\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = S(x)\in C[a,b] \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$$

Д-во. $S_n(x)\in C[a,b]$, $\forall x\in[a,b]$ $S_n(x)\uparrow S(x)$.

Теор. доказана.

Д-во Т1. x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$f_n(x)\overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall m,n>N\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$x\to x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n>N\ \ |A_n-A_m|\le\frac{\varepsilon}{3}\ (<\varepsilon)$

$\Rightarrow \exists\lim\limits_{n\to\infty}A_n = A$ (обозначение). В двух строках $m\to\infty$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N\ \forall x\in X\ \ |f_n(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N\ \ |A_n-A|\le\frac{\varepsilon}{3}$

$n>N$ (какое-нибудь) $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=A_n \Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x\in X\ \boxed{0<|x-x_0|<\delta}\ |f_n(x)-A_n|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f(x)-A|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-A_n|+|A_n-A|<\frac\varepsilon3+\frac\varepsilon3+\frac\varepsilon3=\varepsilon$.

$x\to x_0+0,\ x_0-0,\ +\infty,\ -\infty,\ \infty$ - самост.

Т. доказана.

Д-во Т4. $\varphi_n(x)=f(x)-f_n(x)\in C[a,b]$, $\forall x\in[a,b]\ 0\le\varphi_n(x)\downarrow 0$, т.е.

$\forall x\in[a,b]\ \varphi_1(x)\ge\ldots\ge\varphi_n(x)\ge\varphi_{n+1}(x)\ge\ldots\ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$.

Монот. $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n: \forall x\in[a,b]\ \ 0\le\varphi_n(x)<\varepsilon$ (?). Пусть не так,

т.е. $\exists\varepsilon>0\ \forall n=1,2,\ldots\ \exists x_n\in[a,b]: \varphi_n(x_n)\ge\varepsilon \Rightarrow$ (т. Б-В) $\Rightarrow$

$\exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}: \exists\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in[a,b]$. Но $\forall m\ \exists k: n_k\ge m$

$\Rightarrow \varphi_m(x_{n_k})\ge\varphi_{n_k}(x_{n_k})\ge\varepsilon$ $\ k\to\infty \Rightarrow$ (непр.) $\Rightarrow \varphi_m(x_0)=$

$=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})\ge\varepsilon$, т.е. $\forall m\ \varphi_m(x_0)\ge\varepsilon$. $m\to\infty\Rightarrow$

$0=\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x_0)\ge\varepsilon$. Противоречие $\Rightarrow$ Т. доказана

$\underline{T5}$ $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

$$\left(\int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \right)$$

$\underline{\text{T5}}$ $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

$$\left(\int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \right)$$

Д-во. $a<b$ ($a \geq b$ – самост.). $\underline{\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N}$ $\forall x \in [a,b]$ $|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \underline{\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx\right|} = \left|\int\limits_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right| \leq \int\limits_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} \underline{< \varepsilon}$$

T. доказана.

$\underline{T5}$ $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),\ f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$

$$\left(\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \right)$$

Д-во. $a<b$ ($a \geq b$ – аналог.). $\underline{\forall \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N}$ $\forall x \in [a,b]\ |f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \underline{\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right|} = \left| \int_a^b (f_n(x)-f(x))dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} \underline{<\varepsilon}$$

Т. доказана.

$\underline{T5'}$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x),\ u_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$

$$\left(\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx \right)$$

$\underline{T5}$ $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

$$\left(\int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x) dx \right)$$

Д-во. $a<b$ ($a \geqslant b$ – самост.). $\underline{\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N}$ $\forall x \in [a,b]$ $|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \underline{\left| \int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \right|} = \left| \int\limits_a^b (f_n(x)-f(x))dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n(x)-f(x)|dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} \underline{<\varepsilon}$$

Т. доказана.

$\underline{T5!}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $u_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$.

$$\left(\int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx \right)$$

$\underline{\text{Зам.}}$ $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow \forall Y \subset X$ $f_n(x) \overset{Y}{\rightrightarrows} f(x)$. Аналогично для рядов.

$\underline{T5}$ $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

$$\left(\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \right)$$

Д-во. $a<b$ ($a \geq b$ – самост.). $\underline{\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N}$ $\forall x \in [a,b]$ $|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \underline{\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right|} = \left| \int_a^b (f_n(x)-f(x))dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} \underline{< \varepsilon}$$

Т. доказана.

$\underline{T5'}$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $u_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$.

$$\left(\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx \right)$$

$\underline{\text{Зам.}}$ $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow \forall Y \subset X$ $f_n(x) \overset{Y}{\rightrightarrows} f(x)$. Аналогично для рядов.

$\underline{T6.}$ $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a,b]$, $f_n'(x) \in C[a,b]$, $f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$. $\Rightarrow \forall x \in [a,b]$ $\exists f'(x) = \varphi(x)$.

$$\left(\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \right)$$

$\underline{T5}$ $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

$$\left(\int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \right)$$

Д-во. $a < b$ ($a \geqslant b$ – самост.). $\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N}$ $\forall x \in [a,b]$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$\Rightarrow \underline{\left| \int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \right|} = \left| \int\limits_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} \underline{< \varepsilon}$

Т. доказана.

$\underline{T5!}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $u_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$.

$$\left(\int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx \right)$$

$\underline{\text{Зам.}}$ $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow \forall Y \subset X$ $f_n(x) \overset{Y}{\rightrightarrows} f(x)$. Аналогично для рядов.

$\underline{T6.}$ $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a,b]$, $f_n'(x) \in C[a,b]$, $f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $\Rightarrow \forall x \in [a,b]$ $\exists f'(x) = \varphi(x)$.

$$\left(\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \right)$$

Д-во. $\varphi(x) \in C[a,b]$. $\forall x \in [a,b]$ $f_n'(t) \overset{[a,x]}{\rightrightarrows} \varphi(t) \Rightarrow \int\limits_a^x \varphi(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^x f_n'(t)dt$, т.е.

$\int\limits_a^x \varphi(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a) \Rightarrow \forall x \in [a,b]$ $\exists f'(x) = \varphi(x)$

Т. доказана.

T5 $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

$$\left(\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \right)$$

Д-во. $a<b$ ($a \geq b$ – самост.). $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N\ \forall x\in[a,b]\ |f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Т. доказана.

T5' $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $u_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$.

$$\left(\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx \right)$$

Зам. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow \forall Y \subset X\ f_n(x) \overset{Y}{\rightrightarrows} f(x)$. Аналогично для рядов.

T6. $f_n(x) \to f(x)\ \forall x\in[a,b]$, $f_n'(x)\in C[a,b]$, $f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x) \Rightarrow \forall x\in[a,b]\ \exists f'(x) = \varphi(x)$.

$$\left(\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \right)$$

Д-во. $\varphi(x)\in C[a,b]$. $\forall x\in[a,b]\ f_n'(t) \overset{[a,x]}{\rightrightarrows} \varphi(t) \Rightarrow \int_a^x \varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt$, т.е.

$$\int_a^x \varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty}(f_n(x)-f_n(a)) = f(x)-f(a) \Rightarrow \forall x\in[a,b]\ \exists f'(x) = \varphi(x)$$

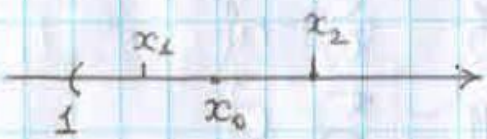
Т. доказана.

T6' $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)\ \forall x\in[a,b]$, $u_n'(x)\in C[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x) \Rightarrow \forall x\in[a,b]\ \exists S'(x) = \varphi(x)$

$$\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \right)$$

Пример. $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$, $x>1$. (ζ-функция Римана)

$X=(1,+\infty)$ Ряд $\not\rightrightarrows$ на X, т.к. при $x\to 1+0$ – расх. гарм. ряд.



$\zeta(x)$ непр. на $(1,+\infty)$ (?)

$\underline{\forall x_0\in(1,+\infty)}$ $x_1\in(1,x_0)$, $x_2\in(x_0,+\infty)$

$\forall x\in[x_1,x_2]$ $0<\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^{x_1}}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\rightrightarrows$ на $[x_1,x_2]$ (Вейерштрасс)

$\Rightarrow\zeta(x)\in C[x_1,x_2]\Rightarrow$ $\underline{\zeta(x)\text{ непр. при } x=x_0}$.

Аналогично $\zeta'(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$, $x>1$ (?)

Достаточно установить, что ряд $\rightrightarrows$ на $[x_1,x_2]$, но его общий член

$$0\le\frac{\ln n}{n^x}<\frac{\ln n}{n^{x_1}}\le\frac{n^{\frac{x_1-1}{2}}}{n^{x_1}}=\frac{1}{n^{\frac{x_1+1}{2}}},\text{ а }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{x_1+1}{2}}}\text{ сх.}$$

$$\zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^x}\qquad k=0,1,2,\dots,\ x>1$$

Получить самостоятельно.