

Т4 (Дирхле). $\forall x \in X$ $\{a_n(x)\}$ - монотонна, приём $a_n(x) \xrightarrow{X} a(x) \equiv 0$;

$\exists M > 0 : \forall x \in X \forall n \geq 1 \left| \sum_{k=1}^n b_k(x) \right| \leq M$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \Rightarrow$ на X .

Т4 (Дирхле). $\forall x \in X$ $\{a_n(x)\}$ - монотонна, придем $a_n(x) \xrightarrow{X} a(x) \equiv 0$;

$\exists M > 0 : \forall x \in X \forall n \geq 1 \left| \sum_{k=1}^n b_k(x) \right| \leq M$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \xrightarrow{X}$ на X .

D-во. $B_1(x) = b_1(x)$, $B_2(x) = b_1(x) + b_2(x)$, ..., $B_n(x) = b_1(x) + \dots + b_n(x)$, ...

$a_n(x) \xrightarrow{X} a(x) \equiv 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in X |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$. $\Rightarrow \forall m > n > N$

$$\forall x \in X \left| \sum_{k=n+1}^m a_k(x) b_k(x) \right| = (\text{пр-ие Абеля}) = |a_m(x) B_m(x) - a_{n+1}(x) B_n(x) +$$
$$+ \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) B_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3M} M + \frac{\varepsilon}{3M} M + M \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) \right| \leq$$

$\forall x$ - одинаковые знаки

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + M |a_{n+1}(x) - a_{n+2}(x) + a_{n+2}(x) - a_{n+3}(x) + \dots + a_{m-1}(x) - a_m(x)| =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{3} + M |a_{n+1}(x) - a_m(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + M |a_{n+1}(x)| < \frac{2\varepsilon}{3} + M \frac{\varepsilon}{3M} = \underline{\varepsilon}, \text{ т.е.}$$

Для $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ выполняется критерий Коши $\Rightarrow \Rightarrow$

Т. доказана.

Т5 (Адель) $\forall x \in X$ $\{a_n(x)\}$ монотонна, причём $\exists K > 0 : \forall x \in X \forall n \geq 1$

$|a_n(x)| \leq K; \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \Rightarrow \text{на } X$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \Rightarrow \text{на } X$

Т5 (Адель) $\forall x \in X$ $\{a_n(x)\}$ монотонна, при этом $\exists K > 0 : \forall x \in X \forall n \geq 1$

$$|a_n(x)| \leq K; \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \Rightarrow \text{на } X. \text{ Тогда } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \Rightarrow \text{на } X$$

До-во. $B_k(x) = b_1(x) + \dots + b_k(x) \forall k \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \xrightarrow{X} B(x) \Rightarrow \underline{\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N}$

$$\forall x \in X |B_n(x) - B(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}. \Rightarrow \underline{\forall m > n > N \forall x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k(x) b_k(x) \right| = (\text{пр-ие Аделя})$$

$$= \left| a_m(x)(B_m(x) - B(x)) - a_{n+1}(x)(B_n(x) - B(x)) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x))(B_k(x) - B(x)) \right| < \frac{\varepsilon}{4K} K +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4K} K + \frac{\varepsilon}{4K} \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) \right| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K} |a_{n+1}(x) - a_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K} (K+K) = \varepsilon$$

(для $x \in X$ одинаковые знаки)

т.е. для $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ выполняется критерий Коши $\Rightarrow \Rightarrow$.

Т. доказана

Св-ва равном. с-ся посл-ств и рядов

Т1. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, x_0 - пред. точка X , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Св-ва равном. сходимости последовательности и рядов

Т1. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, x_0 - пред. точка X , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

2-во т1. x_0 - конкретное число и двусторонний предел.

$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (существование). В двух строках $n \rightarrow \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$n > N$ (какое-нибудь) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X \boxed{0 < |x - x_0| < \delta} |f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

$x \rightarrow x_0 + 0, x_0 - 0, +\infty, -\infty, \infty$ - случаи.

Т. доказана.

Св-ва равном. с-ся посл-ств и рядов

Т.1. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, x_0 - пред. точка X , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

До-во т.1. x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (сходящиеся). В двух строках $m \rightarrow \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$n > N$ (какое-нибудь) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X \boxed{0 < |x - x_0| < \delta} |f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow \underline{|f(x) - A|} \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \underline{\varepsilon}$.

$x \rightarrow x_0 + 0, x_0 - 0, +\infty, -\infty, \infty$ - сходимость.

Т. доказана.

СВ-ва равнов. с-ся посл-ств и рядов

T1. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, x_0 - пред. точка X , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

T2. $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n(x)$ непрерывны $x = x_0 \in [a,b] \Rightarrow f(x)$ непрерывна при $x = x_0$

$D \neq \emptyset \neq \emptyset$, x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (сходимость). В двух строках $m \rightarrow \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$n > N$ (какое-нибудь) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X \boxed{0 < |x - x_0| < \delta} |f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

$x \rightarrow x_0 + 0, x_0 - 0, +\infty, -\infty, \infty$ - сходимость.

T. Дардзани.

СВ-ва равенств. с-ся посл.-степ и рядов

T1. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, x_0 - пред. точка X , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

T2. $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n(x)$ непрерывны $x = x_0 \in [a,b] \Rightarrow f(x)$ непрерывна при $x = x_0$

T3. $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x) \in C[a,b]$

Д-во T1. x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (сходимость). В двух строках $n \rightarrow \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$n > N$ (какое-нибудь) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X \boxed{0 < |x - x_0| < \delta} |f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

$x \rightarrow x_0 + 0, x_0 - 0, +\infty, -\infty, \infty$ - сходимость.

Т. Доказана.

Св-ва равенств. с-ся посл-ств и рядов

Т1. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, x_0 - пред. точка X , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Т2. $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n(x)$ непрерывны $x = x_0 \in [a,b] \Rightarrow f(x)$ непрерывна при $x = x_0$

Т3. $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x) \in C[a,b]$

Сл. $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in [a,b], f_n(x) \in C[a,b], f(x) \notin C[a,b] \Rightarrow f_n(x) \not\xrightarrow{[a,b]} f(x)$

2-во т1. x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x), \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (существование). В двух строках $m \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$n > N$ (какое-нибудь) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X \boxed{0 < |x - x_0| < \delta} |f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$x \rightarrow x_0 + 0, x_0 - 0, +\infty, -\infty, \infty$ - аналог.

Т. Доказана.

Св-ва равенств. с-ся посл-ств и рядов

T1. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, x_0 - пред. точка X , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

T2. $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n(x)$ непрерывны $x = x_0 \in [a, b] \Rightarrow f(x)$ непрерывна $x = x_0$

T3. $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n(x) \in C[a, b] \Rightarrow f(x) \in C[a, b]$

Сл. $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in [a, b]$, $f_n(x) \in C[a, b]$, $f(x) \notin C[a, b] \Rightarrow f_n(x) \not\xrightarrow{[a,b]}$

T1' $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$, x_0 - пред. т. X , $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ с.ч. и } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \right) \right)$$

T2' $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$, $u_n(x)$ непрерывны $x = x_0 \in [a, b] \Rightarrow S(x)$ непрерывна $x = x_0$

T3' $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$, $u_n(x) \in C[a, b] \Rightarrow S(x) \in C[a, b]$

Д-во T1. x_0 - конечное число и двусторонний предел.

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x), \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (существование). В двух строках $m \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$n > N$ (какое-нибудь) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X \left[0 < |x - x_0| < \delta \right] |f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$x \rightarrow x_0 + 0, x_0 - 0, +\infty, -\infty, \infty$ - аналог.

T. доказана.

СВ-ба равнол. с-ср посл-ств и рядов

T1. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, x_0 - пред. точка X , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

T2. $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n(x)$ несп. при $x = x_0 \in [a,b] \Rightarrow f(x)$ несп. при $x = x_0$

T3. $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x) \in C[a,b]$

Сл. $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in [a,b]$, $f_n(x) \in C[a,b]$, $f(x) \notin C[a,b] \Rightarrow f_n(x) \not\xrightarrow{[a,b]} f(x)$

T1' $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$, x_0 - пред. т. X , $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сс и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \right) \right)$$

T2' $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$, $u_n(x)$ несп. при $x = x_0 \in [a,b] \Rightarrow S(x)$ несп. при $x = x_0$

T3' $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$, $u_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow S(x) \in C[a,b]$

T4. (Діни). $f_n(x) \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b] f_n(x) \uparrow f(x) \in C[a,b] \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x), \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (сходження). В двох строках $m \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$n > N$ (каже-небудь) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X \left[0 < |x - x_0| < \delta \right] |f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$x \rightarrow x_0 + 0, x_0 - 0, +\infty, -\infty, \infty$ - сисост.

Т. доказана.

Д-во т4. $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b] 0 \leq \varphi_n(x) \uparrow 0$, т.е.

$$\forall x \in [a,b] \varphi_1(x) \geq \dots \geq \varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \geq \dots \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Может. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n: \forall x \in [a,b] 0 \leq \varphi_n(x) < \varepsilon$ (?). Пусть не так,

т.е. $\exists \varepsilon > 0 \forall n = 1, 2, \dots \exists x_n \in [a,b]: \varphi_n(x_n) \geq \varepsilon. \Rightarrow$ (т. Б-В) \Rightarrow

$$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}: \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in [a,b]. \text{ Но } \forall m \exists k: n_k \geq m$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi_m(x_{n_k})} \geq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon \quad k \rightarrow \infty \Rightarrow (\text{непр.}) \Rightarrow \varphi_m(x_0) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon, \text{ т.е. } \forall m \varphi_m(x_0) \geq \varepsilon. \quad m \rightarrow \infty \Rightarrow$$

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x_0) \geq \varepsilon. \text{ Противоречие } \Rightarrow \text{Т. доказана}$$

СВ-ва равенств. с-ся посл-ств и рядов

Т1. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, x_0 -пред. точка X , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Т2. $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n(x)$ непрерывны $x = x_0 \in [a,b] \Rightarrow f(x)$ непрерывна $x = x_0$

Т3. $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x) \in C[a,b]$

Сл. $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in [a,b]$, $f_n(x) \in C[a,b]$, $f(x) \notin C[a,b] \Rightarrow f_n(x) \not\xrightarrow{[a,b]} f(x)$

Т1' $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$, x_0 -пред. т. X , $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ с.ч. и } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \right) \right)$$

Т2' $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$, $u_n(x)$ непрерывны $x = x_0 \in [a,b] \Rightarrow S(x)$ непрерывна $x = x_0$

Т3' $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$, $u_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow S(x) \in C[a,b]$

Т4. (Дини) $f_n(x) \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b] f_n(x) \uparrow f(x) \in C[a,b] \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$

Т4' $u_n(x) \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b] u_n(x) \geq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \in C[a,b] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$$

Д-во. $S_n(x) \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b] S_n(x) \uparrow S(x)$.

Теор. Доказана.

Д-во Т1. x_0 -конечное число и двусторонний предел.

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x), \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (единственное). В двух строках $m \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$n > N$ (какое-нибудь) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X \boxed{0 < |x - x_0| < \delta} |f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$x \rightarrow x_0 + 0, x_0 - 0, +\infty, -\infty, \infty$ - аналог.

Т. Доказана.

Д-во Т4. $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b] 0 \leq \varphi_n(x) \downarrow 0$, т.е.

$$\forall x \in [a,b] \varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \varphi_3(x) \geq \dots \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Может. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n: \forall x \in [a,b] 0 \leq \varphi_n(x) < \varepsilon$ (?). Пусть не так,

т.е. $\exists \varepsilon > 0 \forall n = 1, 2, \dots \exists x_n \in [a,b]: \varphi_n(x_n) \geq \varepsilon \Rightarrow$ (Т. Б-В) \Rightarrow

$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}: \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in [a,b]$. Но $\forall m \exists k: n_k \geq m$

$$\Rightarrow \underline{\varphi_m(x_{n_k})} \geq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon \quad k \rightarrow \infty \Rightarrow (\text{непр.}) \Rightarrow \varphi_m(x_0) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon, \text{ т.е. } \forall m \varphi_m(x_0) \geq \varepsilon. m \rightarrow \infty \Rightarrow$$

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x_0) \geq \varepsilon. \text{ Противоречие. } \Rightarrow \text{Т. Доказана}$$

T5 $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x), f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$

$$\left(\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

T5 $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x), f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$

$$\left(\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

D-60. $a < b$ ($a \geq b$ - аналог.). $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in [a, b] |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

T. Dorozhina.

$$\underline{T5} \quad f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x), f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

$$\left(\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

D-vo. $a < b$ ($a \geq b$ - аналог.). $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in [a, b] |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

T. Pokozana.

$$\underline{T5!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x), u_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

$$\left(\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \right)$$

$$\underline{T5} \quad f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x), f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

$$\left(\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

D-ko. $a < b$ ($a \geq b$ - аануоо). $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in [a, b] |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

T. Доржпала.

$$\underline{T5!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x), u_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

$$\left(\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \right)$$

Зам. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall Y \subset X, f_n(x) \xrightarrow{Y} f(x)$. Анхныг үүсгэхэд.

$$\underline{T5} \quad f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x), f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

$$\left(\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

Д-во. $a < b$ ($a \geq b$ - аналог.). $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in [a, b] |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

T. Dorozhina.

$$\underline{T5!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x), u_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

$$\left(\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \right)$$

Зам. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall Y \subset X f_n(x) \xrightarrow{Y} f(x)$. Аналогично для предел.

$$\underline{T6.} \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in [a, b], f_n'(x) \in C[a, b], f_n'(x) \xrightarrow{[a,b]} \varphi(x) \Rightarrow \forall x \in [a, b] \exists f'(x) = \varphi(x).$$

$$\left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) \right)$$

T5 $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x), f_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$

$$\left(\int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

D-vo. $a < b$ ($a \geq b$ - omyer.). $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in [a,b] |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

T. Pokazana.

T5! $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x), u_n(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$

$$\left(\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \right)$$

Зам. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall Y \subset X f_n(x) \xrightarrow{Y} f(x)$, Аналогично для пределов.

T6. $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in [a,b], f_n'(x) \in C[a,b], f_n'(x) \xrightarrow{[a,b]} \varphi(x) \Rightarrow \forall x \in [a,b] \exists f'(x) = \varphi(x).$

$$\left((\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) \right)$$

D-vo. $\varphi(x) \in C[a,b]. \forall x \in [a,b] f_n'(t) \xrightarrow{[a,x]} \varphi(t) \Rightarrow \int_a^x \varphi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n'(t) dt, \text{ т.е.}$

$$\int_a^x \varphi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a) \Rightarrow \forall x \in [a,b] \exists f'(x) = \varphi(x)$$

T. Pokazana.

$$\underline{T5} \quad f_n(x) \xrightarrow{[0, b]} f(x), f_n(x) \in C[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

$$\left(\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

D-ko. $a < b$ ($a \geq b$ - аауосі.). $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in [a, b] |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

T. Dorozhina.

$$\underline{T5'} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[0, b]} S(x), u_n(x) \in C[a, b] \Rightarrow \int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

$$\left(\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \right)$$

Зам. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Rightarrow \forall Y \subset X \quad f_n(x) \xrightarrow{Y} f(x)$. Аналогічно для рядів.

$$\underline{T6} \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in [a, b], f'_n(x) \in C[a, b], f'_n(x) \xrightarrow{[0, b]} \varphi(x) \Rightarrow \forall x \in [a, b] \exists f'(x) = \varphi(x).$$

$$\left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \right)$$

D-ko. $\varphi(x) \in C[a, b]$. $\forall x \in [a, b] f'_n(t) \xrightarrow{[0, x]} \varphi(t) \Rightarrow \int_a^x \varphi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt$, т.е.

$$\int_a^x \varphi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a) \Rightarrow \forall x \in [a, b] \exists f'(x) = \varphi(x)$$

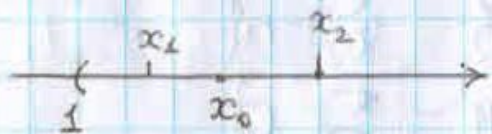
T. Dorozhina.

$$\underline{T6'} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \forall x \in [a, b], u'_n(x) \in C[a, b], \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{[a, b]} \varphi(x) \Rightarrow \forall x \in [a, b] \exists S'(x) = \varphi(x)$$

$$\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \right)$$

Пример. $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x > 1$. (ζ -функция Римана)

$\bar{X} = (1, +\infty)$ ряд \neq на \bar{X} , т.к. при $x \rightarrow 1+0$ - расх. гарм. ряд.



$\zeta(x)$ непр. на $(1, +\infty)$ (?)

$\forall x_0 \in (1, +\infty)$ $x_1 \in (1, x_0)$, $x_2 \in (x_0, +\infty)$

$\forall x \in [x_1, x_2] \quad \alpha \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{x_1}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \Rightarrow$ на $[x_1, x_2]$ (Вейерштрасс)

$\Rightarrow \zeta(x) \in C[x_1, x_2] \Rightarrow \zeta(x)$ непр. при $x = x_0$.

Аналогично $\zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$, $x > 1$ (?)

Достаточно установить, что ряд \Rightarrow на $[x_1, x_2]$, но это следует из

$$0 \leq \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^{x_1}} \leq \frac{n^{\frac{x_1-1}{2}}}{n^{x_1}} = \frac{1}{n^{\frac{x_1+1}{2}}}, \text{ а } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{x_1+1}{2}}} \text{ с.к.}$$

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x} \quad \begin{matrix} k=0, 1, 2, \dots \\ x > 1 \end{matrix}$$

Получить самостоятельно.