Дифференциальное исчисление

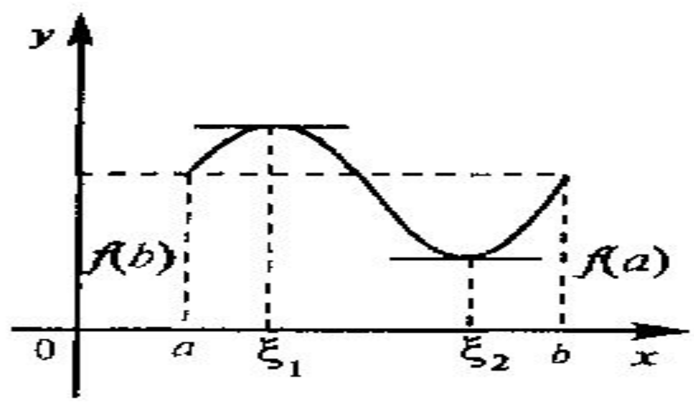
Приложения производной. Основные теоремы

Теорема Ферма. *Если дифференцируемая на промежутке X функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0)=0$.*

Теорема Ролля. *Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *непрерывна на отрезке $[a, b]$;*
2) *дифференцируема на интервале (a, b);*
3) *на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a)=f(b)$.*

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная функция равна нулю: $f'(\xi)=0$.



Теорема Лагранжа. *Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2) *дифференцируема на интервале* (a, b);

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, *в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке*, т.е.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

С л е д с т в и е. *Если производная функции $f(x)$ равна нулю на некотором промежутке X, то функция тождественно постоянна на этом промежутке*

Экономический смысл производной

Предельные издержки:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

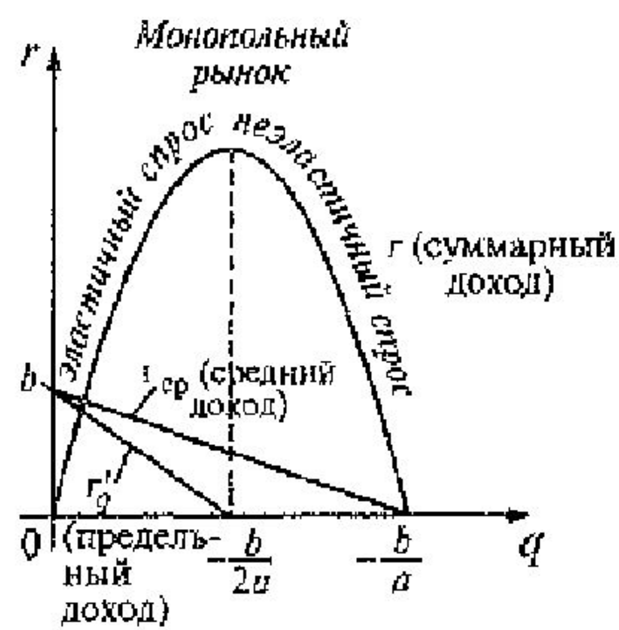
Суммарный доход (выручку) от реализации продукции r можно определить как произведение цены единицы продукции p на количество продукции q, т.е. $r = pq$.

$$r = (aq + b)q = aq^2 + bq$$

$p = aq + b$, где $a<0$, $b>0$

$$r_{\text{ср}} = \frac{r}{q} = aq + b$$

$$r'_q = 2aq + b$$



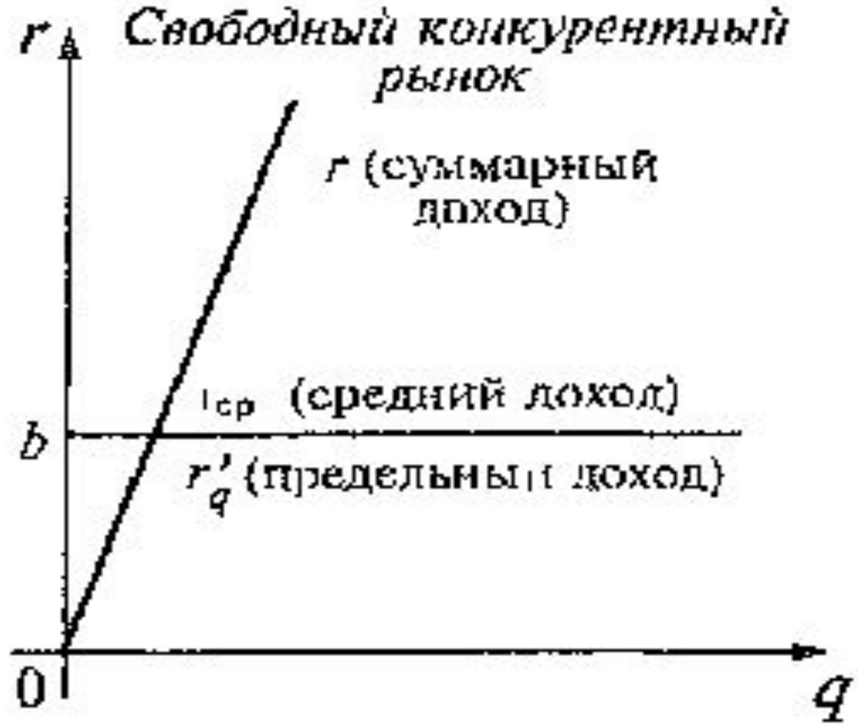
В условиях совершенной конкуренции

$$p = b.$$

$$r = bq$$

$$r_{\text{ср}} = \frac{r}{q} = b$$

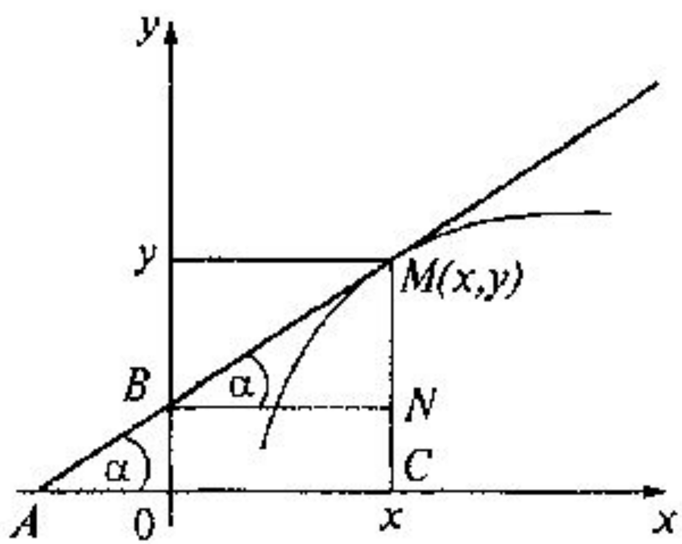
$$r'_q = b$$

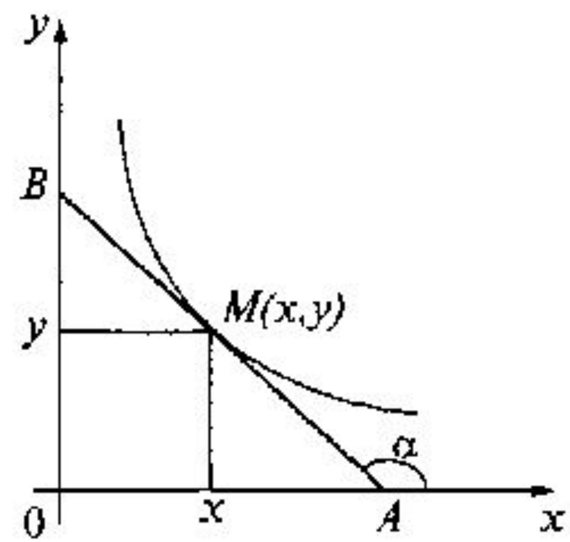


Определение. ***Эластичностью функции*** $E_x(y)$ *называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при* $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'$$

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y' = \frac{x}{y}\operatorname{tg}\alpha$$





1. *Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции* $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, т.е.

$$E_x(y) = xT_y$$

2. *Эластичность произведения (частного)* двух *функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$$

3. *Эластичности взаимнообратных функций — взаимно обратные величины:*

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}$$

Неопределенный интеграл

МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Задача о нахождении мгновенной скорости материальной точки по заданному закону ее движения

Если $s=s(t)$ - путь, пройденный точкой за время t от начала движения, то мгновенная скорость $v=s'(t)$.

Обратная задача: по заданной скорости $v=v(t)$ найти закон движения (найти функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$).

Определение. Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на интервале (a,b). Если функция $F(x)$ имеет производную на интервале (a,b) и если для всех $x \in (a,b)$ выполняется равенство

$$F'(x)=f(x),$$

то функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b).

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то для всех x из интервала (a,b) выполняется равенство

$$F_2(x)=F_1(x)+C,$$

где C – постоянная

Понятие неопределенного интервала

Совокупность всех первообразных для функции f(x) на некотором промежутке Δ называют *неопределенным интегралом от функции f на этом промежутке* ,

обозначают $\int \mathbf{f(x)dx}$

пишут $\int \mathbf{f(x)dx = F(x)+C}$

Свойства неопределенного интеграла

1. ***Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.***

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. ***Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению***, т.е.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)dx.$$

3. ***Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого***, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

где C — произвольное число.

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx\,,$$

где α — некоторое число.

5. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций,* т.е.

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Метод замены переменной

$$\int f(x)\,dx = \int f\,(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

Теорема. *Пусть $F(x)$ некоторая первообразная для функции $f(x)$. Тогда*

$$\int f\,(kx + b)\,dx = \frac{1}{k}\,F(kx + b) + C\,,$$

где k и b — некоторые числа, $k \neq 0$.

Метод интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

1. $\int x^n e^{ax}dx$, $\int x^n \sin mx\,dx$, $\int x^n \cos mx\,dx$.

2. $\int x^k \ln^n x\,dx$, $\int x^k \arcsin x\,dx$, $\int x^k \arccos x\,dx$,

$\int x^k \operatorname{arctg} x\,dx$, $\int x^k \operatorname{arcctg} x\,dx$,

где a, m, k — действительные числа ($k \neq -1$), n — целое положительиое число.

Интегрирование иррациональностей

$\int R(x, \sqrt[n]{x})\, dx$	Замена $t = \sqrt[n]{x}$
$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$	Необходимо выделить полный квадрат
$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$	$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, где $-\pi < x < \pi$
$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$	$t = \cos x$
$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$	$t = \sin x$