

Дифференциальное исчисление

Приложения производной.

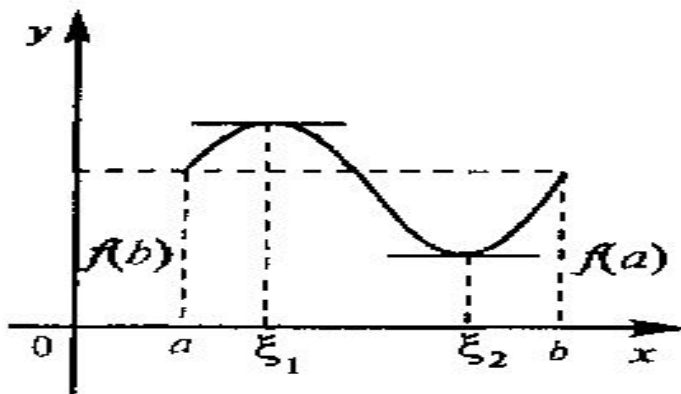
Основные теоремы

Теорема Ферма. Если дифференцируемая на промежутке X функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) дифференцируема на интервале (a, b) ;
- 3) на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a)=f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная функция равна нулю: $f'(\xi) = 0$.



Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) дифференцируема на интервале (a, b) ;

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке, т.е.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

С л е д с т в и е. Если производная функции $f(x)$ равна нулю на некотором промежутке X , то функция тождественно постоянна на этом промежутке

Экономический смысл производной

Предельные издержки:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

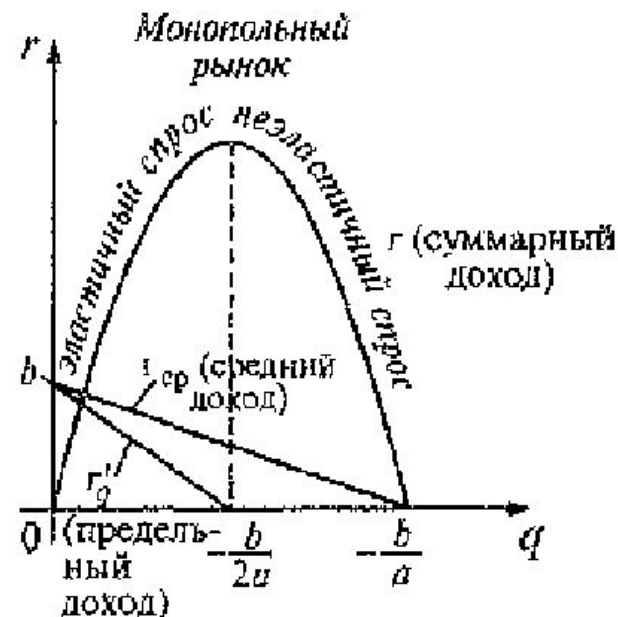
Суммарный доход (выручку) от реализации продукции r можно определить как произведение цены единицы продукции p на количество продукции q , т.е. $r = pq$.

$$r = (aq + b)q = aq^2 + bq$$

$$p = aq + b, \text{ где } a < 0, b > 0$$

$$r_{\text{ср}} = \frac{r}{q} = aq + b$$

$$r'_q = 2aq + b$$



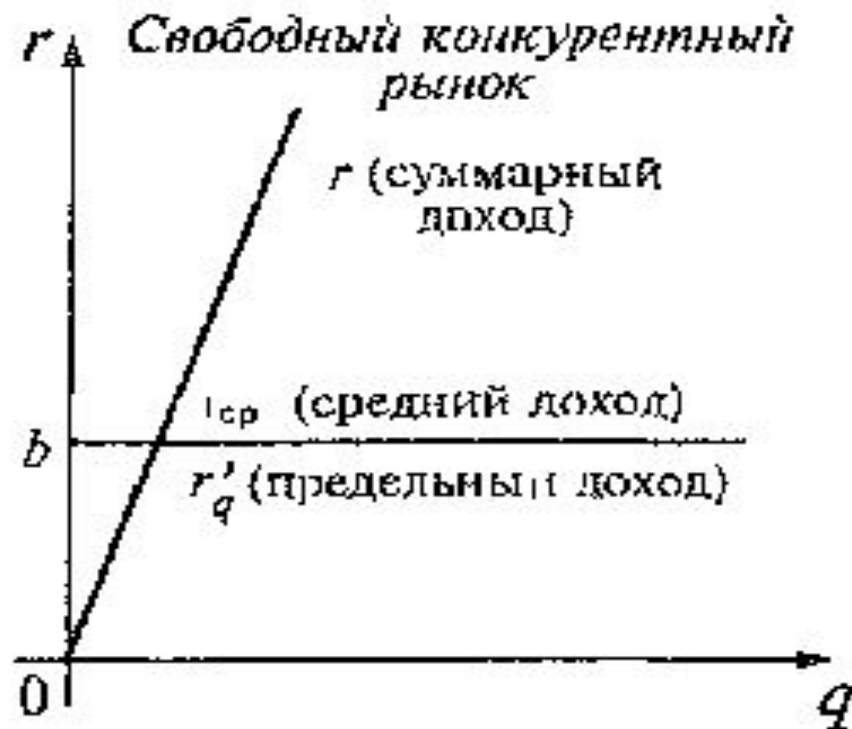
В условиях совершенной конкуренции

$$p = b.$$

$$r = bq$$

$$r_{\text{ср}} = \frac{r}{q} = b$$

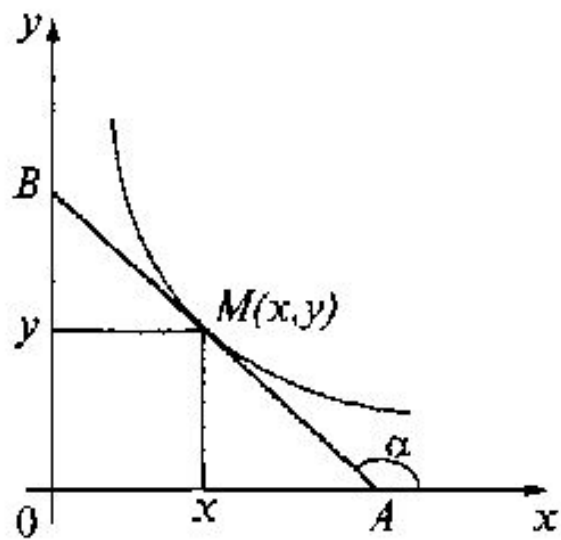
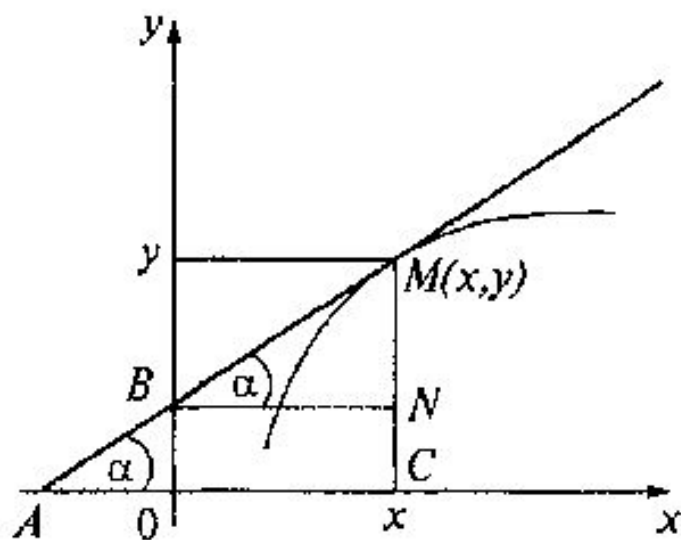
$$r'_q = b$$



Определение. Эластичностью функции $E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'$$

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y' = \frac{x}{y} \operatorname{tg} \alpha$$



1. Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, т.е.

$$E_x(y) = xT_y$$

2. Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$$

3. Эластичности взаимнообратных функций — взаимно обратные величины:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}$$

Неопределенный интеграл

МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Задача о нахождении мгновенной скорости материальной точки по заданному закону ее движения

Если $s=s(t)$ - путь, пройденный точкой за время t от начала движения, то мгновенная скорость $v=s'(t)$.

Обратная задача: по заданной скорости $v=v(t)$ найти закон движения (найти функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$).

Определение. Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на интервале (a,b) . Если функция $F(x)$ имеет производную на интервале (a,b) и если для всех $x \in (a,b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x),$$

то функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b) .

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a,b) , то для всех x из интервала (a,b) выполняется равенство

$$F_2(x) = F_1(x) + C,$$

где C – постоянная

Понятие неопределенного интервала

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке Δ называют *неопределенным интегралом от функции f на этом промежутке*,

обозначают $\int f(x)dx$

пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$\left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

где C — произвольное число.

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.*

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx,$$

где α — некоторое число.

5. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е.*

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Метод замены переменной

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

Теорема. Пусть $F(x)$ некоторая первообразная для функции $f(x)$.
Тогда

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C,$$

где k и b — некоторые числа, $k \neq 0$.

Метод интегрирования по частям

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

1. $\int x^n e^{ax} \, dx$, $\int x^n \sin mx \, dx$, $\int x^n \cos mx \, dx$,
2. $\int x^k \ln^n x \, dx$, $\int x^k \arcsin x \, dx$, $\int x^k \arccos x \, dx$,
 $\int x^k \operatorname{arctg} x \, dx$, $\int x^k \operatorname{arcctg} x \, dx$,

где a , m , k — действительные числа ($k \neq -1$), n — целое положительное число.

Интегрирование иррациональностей

$\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx$	Замена $t = \sqrt[n]{x}$
$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$	Необходимо выделить полный квадрат
$\int R(\sin x, \cos x) dx$	$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, где $-\pi < x < \pi$
$\int R(\sin x, \cos x) dx$	$t = \cos x$
$\int R(\sin x, \cos x) dx$	$t = \sin x$