# Дифференциальное исчисление

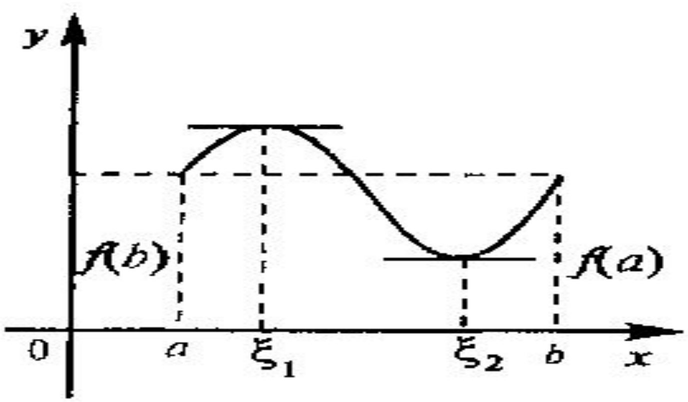
# Приложения производной. Основные теоремы

**Теорема Ферма.** *Если дифференцируемая на промежутке $X$ функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке $x_0$ этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0)=0$.*

**Теорема Ролля.** *Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *непрерывна на отрезке $[a, b]$;*
2) *дифференцируема на интервале $(a, b)$;*
3) *на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a)=f(b)$.*

*Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi\in(a, b)$, в которой производная функция равна нулю: $f'(\xi)=0$.*



**Теорема Лагранжа.** *Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2) *дифференцируема на интервале* $(a, b)$;

*Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка* $\xi \in (a, b)$, *в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке*, т.е.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

С л е д с т в и е. *Если производная функции $f(x)$ равна нулю на некотором промежутке $X$, то функция тождественно постоянна на этом промежутке*

# Экономический смысл производной

Предельные издержки:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

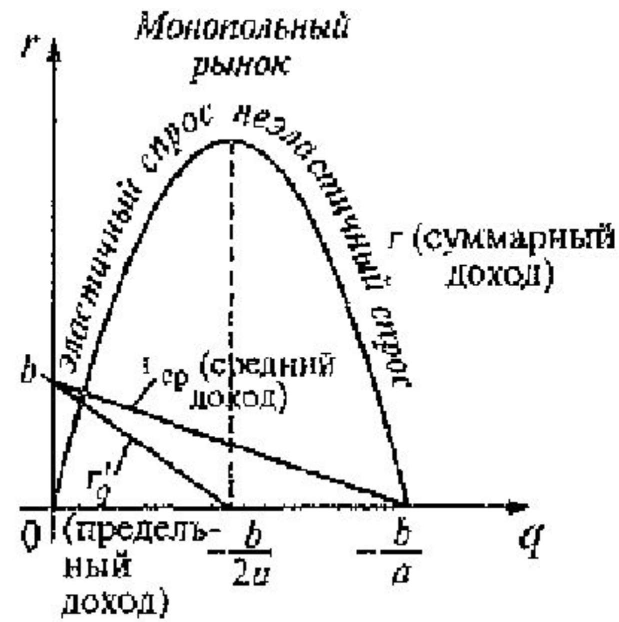
Суммарный доход (выручку) от реализации продукции $r$ можно определить как произведение цены единицы продукции $p$ на количество продукции $q$, т.е. $r = pq$.

$$r = (aq + b)q = aq^2 + bq$$

$p = aq + b$, где $a<0$, $b>0$

$$r_{\text{ср}} = \frac{r}{q} = aq + b$$

$$r'_q = 2aq + b$$



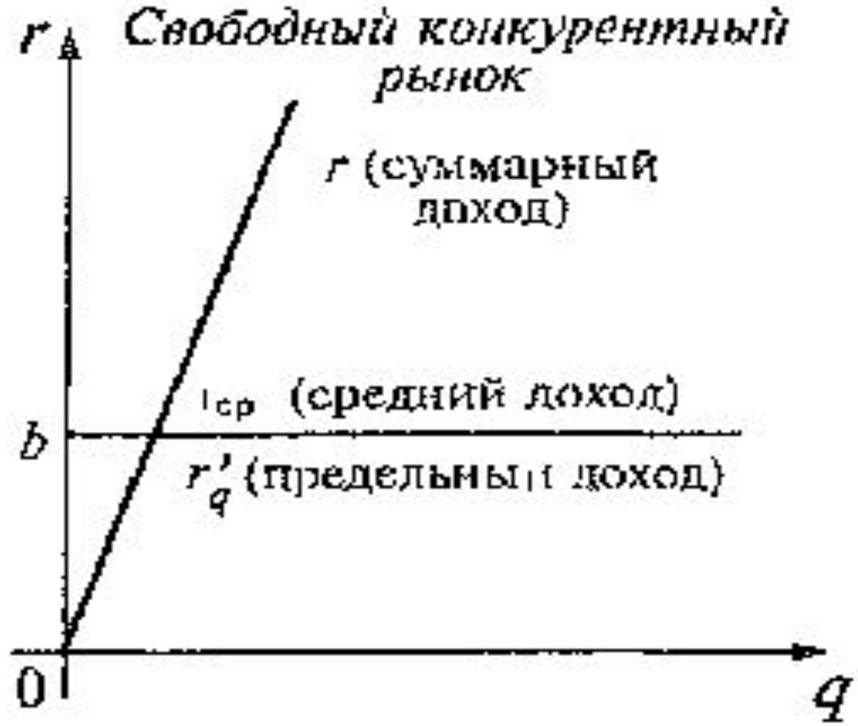
# В условиях совершенной конкуренции

$$p = b.$$

$$r = bq$$

$$r_{ср} = \frac{r}{q} = b$$

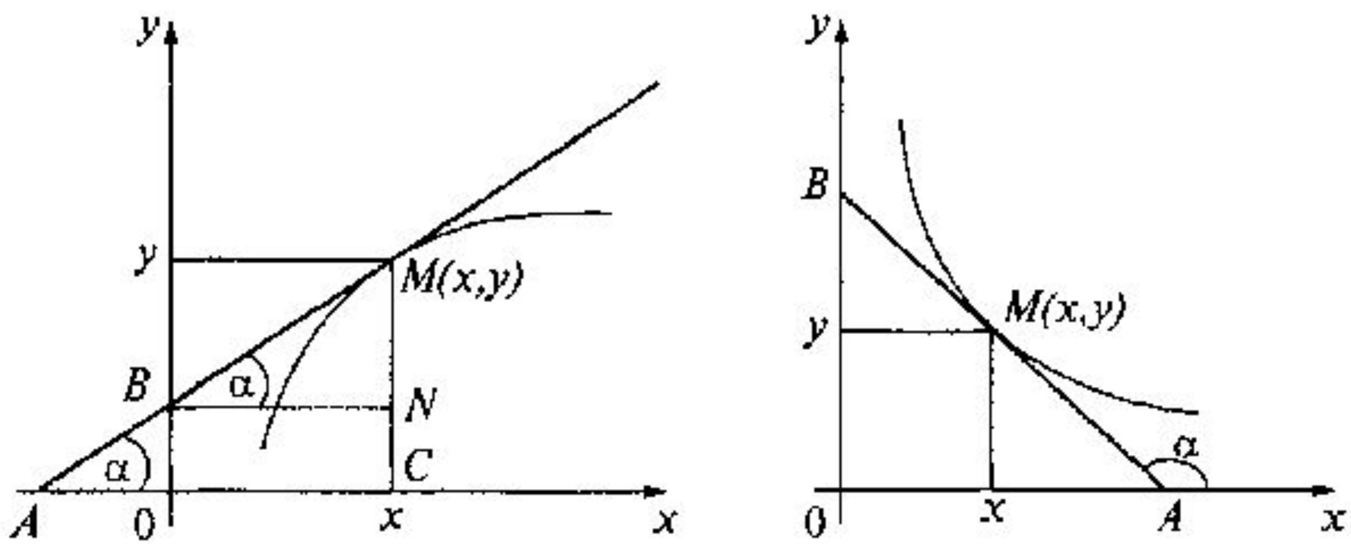
$$r'_q = b$$



**Определение.** ***Эластичностью функции*** $E_x(y)$ *называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при* $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'$$

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y' = \frac{x}{y}\operatorname{tg}\alpha$$



1. *Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции* $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, т.е.

$$E_x(y) = xT_y$$

2. *Эластичность произведения (частного)* двух *функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$$

3. *Эластичности взаимнообратных функций — взаимно обратные величины:*

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}$$

# Неопределенный интеграл

# МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

## Задача о нахождении мгновенной скорости материальной точки по заданному закону ее движения

Если $s=s(t)$ - путь, пройденный точкой за время $t$ от начала движения, то мгновенная скорость $v=s'(t)$ .

**Обратная задача:** по заданной скорости $v= v(t)$ найти закон движения

(найти функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$ ).

**Определение.** Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на интервале $(a,b)$. Если функция $F(x)$ имеет производную на интервале $(a,b)$ и если для всех $x \in (a,b)$ выполняется равенство

$$F'(x)= f(x),$$

то функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a,b)$.

**Теорема.** Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a,b)$, то для всех $x$ из интервала $(a,b)$ выполняется равенство

$$F_2(x)= F_1(x) +C,$$

где C – постоянная

# Понятие неопределенного интервала

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке $\Delta$ называют *неопределенным интегралом от функции* $f$ *на этом промежутке* ,

обозначают $\int \mathbf{f(x)dx}$

пишут $\int \mathbf{f(x)dx = F(x) + C}$

# Свойства неопределенного интеграла

**1.** ***Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.***

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. ***Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению***, т.е.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)dx.$$

3. ***Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого***, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

где $C$ — произвольное число.

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx ,$$

где $\alpha$ — некоторое число.

5. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций,* т.е.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

## Метод замены переменной

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

**Теорема.** *Пусть $F(x)$ некоторая первообразная для функции $f(x)$. Тогда*

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C ,$$

*где $k$ и $b$ — некоторые числа, $k \neq 0$.*

# Метод интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

1. $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin mx\, dx$, $\int x^n \cos mx\, dx$.

2. $\int x^k \ln^n x\, dx$, $\int x^k \arcsin x\, dx$, $\int x^k \arccos x\, dx$,

$\int x^k \mathrm{arctg}\, x\, dx$, $\int x^k \mathrm{arcctg}\, x\, dx$,

где $a$, $m$, $k$ — действительные числа ($k \neq -1$), $n$ — целое положительиое число.

# Интегрирование иррациональностей

| | |
|---|---|
| $\int R(x, \sqrt[n]{x})\, dx$ | Замена $t=\sqrt[n]{x}$ |
| $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ | Необходимо выделить полный квадрат |
| $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ | $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, где $-\pi < x < \pi$ |
| $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ | $t=\cos x$ |
| $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ | $t=\sin x$ |