Задачи управления движением

.

Выполнила: Колесникова В.А

Постановка задачи

Решение задачи управления состоит из двух этапов. Во-первых, путь системы должен удовлетворять определенным условиям, например следующим:

1) Проходить от точки (x, y) =(0, 0) до точки (x, y), 5).

2) Лежать в заданной области (в данной части плоскости, например для корабля, который движется лишь по воде, но не по суше).

3) Минимизировать какую-либо величину экономического характера, которой может быть стоимость израсходованного топлива, затраченное время или общие затраты управляющего.

Постановка задачи

Алгераические уравнения

$$\begin{cases} x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \alpha(t) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \end{cases}$$

Дифференциальными уравнениями вида

$\frac{dx_i}{dt} = g_i(x, \alpha, t)$,где $i = 1,2, \dots, n$

Ограниченные области.
Пример 1.

Как обойти круглое озеро, не промочив ног!

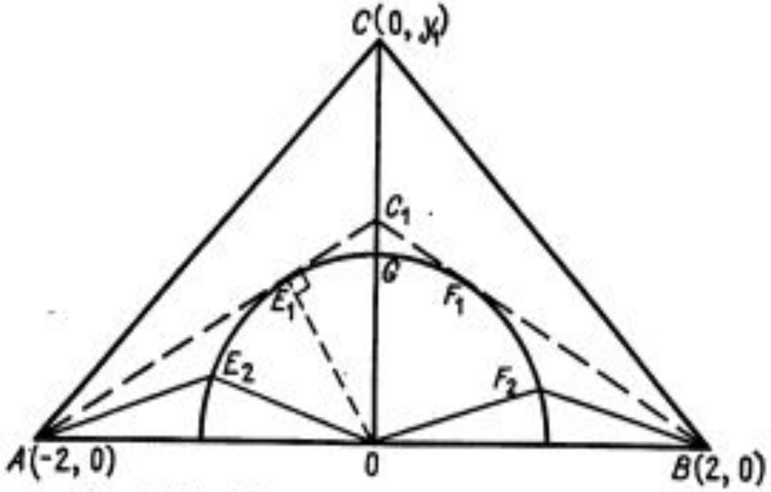

Рис. 2.1. Пути, проходящие вне круга.

Формулировка задачи

Найти кратчайший путь от точки A(-2,0) до точки B(2,0) на плоскости из которой исключена область D, определена неравенством

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

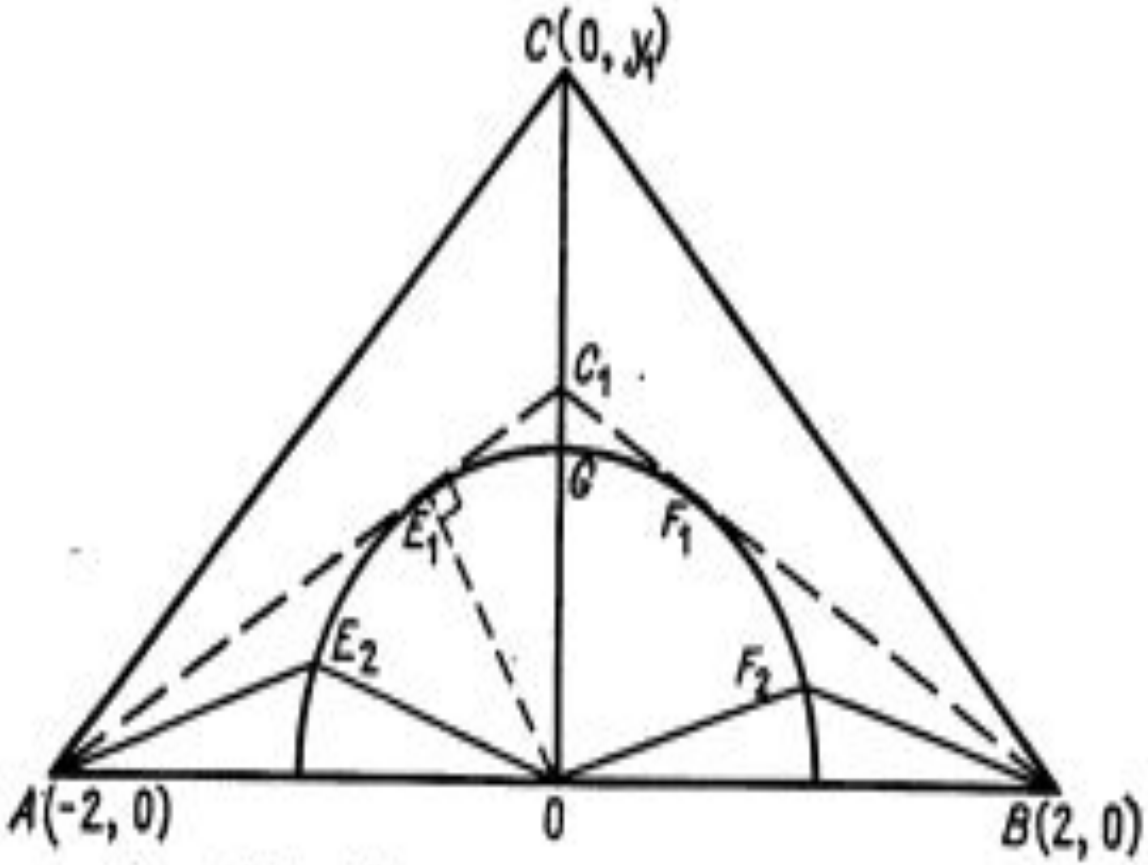

Рис. 2.1. Пути, проходящие вне круга.

Рассмотрим путь АСВ, где y_1 достаточно велико, чтобы АС и СВ не пересекались с D.

АСВ = АС + СВ
Так как АС = СВ, тогда

АСВ = 2$\cdot$ АС
По теореме Пифагора найдем АС
$$AC^2 = AO^2 + CO^2$$

АО = 2; СО = y_1

$$AC = \sqrt{4 + y_1^2}$$

$$ACB = 2 \cdot \sqrt{4 + y_1^2}$$

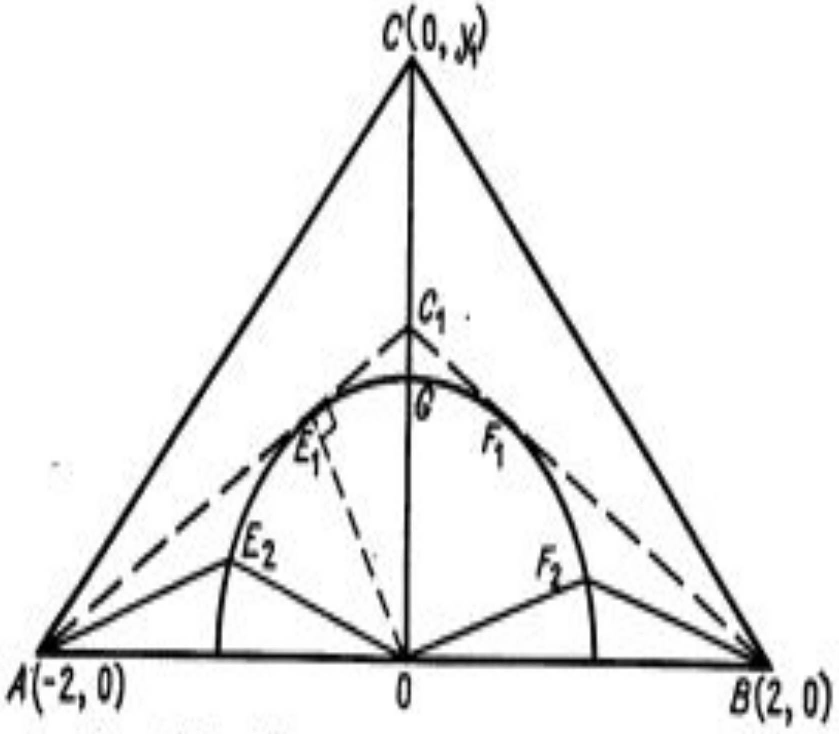

Рис. 2.1. Пути, проходящие вне круга.

$$Рассмотрим\ треугольники\ AC_1O\ и\ OC_1B$$

$$Пусть\ угол\ E_1OC_1\ \text{и угол}\ C_1OF_1\ = \alpha$$

$$sinA = \frac{OE_1}{AO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{угол}\ A = \frac{\pi}{6} = 30°$$

$$tg\alpha = \frac{E_1C_1}{E_1O} \Rightarrow tg\alpha = E_1C_1$$

$$tg\alpha = \frac{C_1F_1}{OF_1} \Rightarrow tg\alpha = C_1F_1$$

Тогда $E_1C_1 + C_1F_1 = 2 \cdot tg\alpha$

Так как угол E_1OF_1 центральный $\Rightarrow$ дуга $E_1F_1 = 2\alpha$

Для всех $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

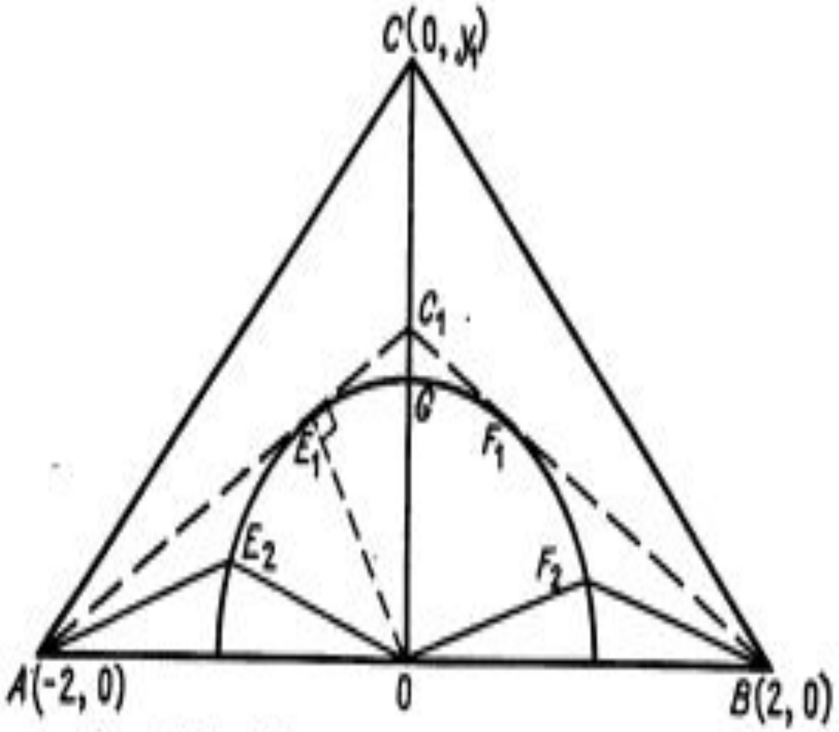

Рис. 2.1. Пути, проходящие вне круга.

Рассмотрим путь AE_2F_2B

Пусть угол $AOE_2 =$ угол $BOF_2 = \beta$

$$AE_2G = GF_2B \Rightarrow \text{путь } AE_2F_2B = 2 \cdot S$$

$$S = AE_2 + arc(E_2G)$$

Найдем AE_2;

По теореме косинусов:

$$AE_2^2 = OE_2^2 + OA^2 - 2 \cdot OE_2 \cdot OA \cdot cos\beta$$

$$AE_2^2 = 1 + 4 - 4 \cdot cos\beta$$

$$AE_2 = \sqrt{5 - 4 \cdot \cos\beta} = \sqrt{1 + 4 - 4 \cdot cos\beta} =$$
$$= \sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\beta + 4 - 4 \cdot cos\beta} = \sqrt{(cos\beta - 2)^2 + sin\beta}$$

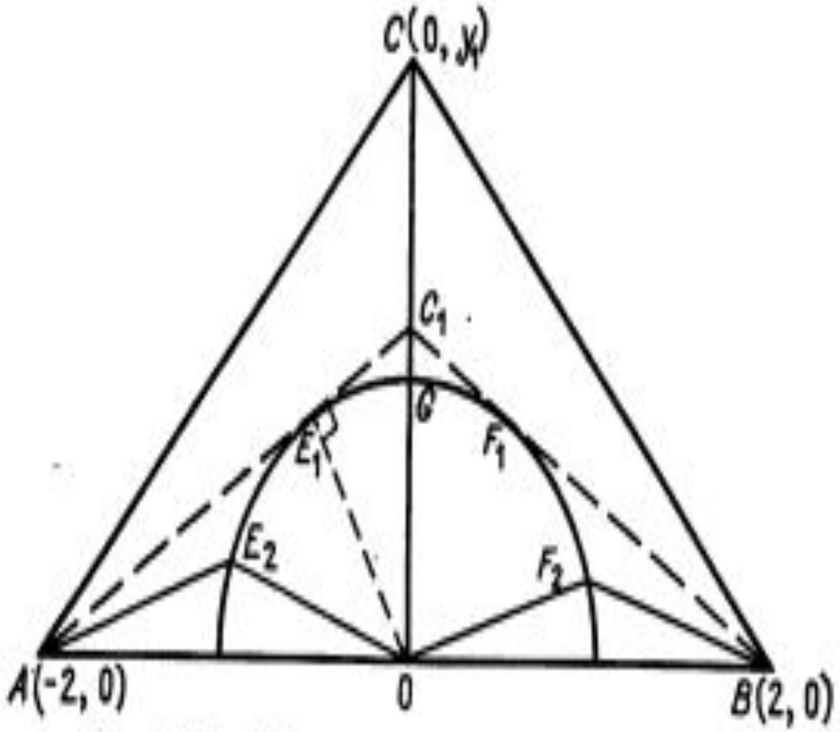

Рис. 2.1. Пути, проходящие вне круга.

Найдем минимум $S = \sqrt{5 - 4 \cdot \cos\beta} + \frac{\pi}{2} - \beta$

$$S' = \frac{4sin\beta}{2\sqrt{5 - 4cos\beta}} - 1$$

$$\frac{4sin\beta}{2\sqrt{5 - 4cos\beta}} - 1 = 0$$

$$4sin\beta - 2\sqrt{5 - 4cos\beta} = 0\ \left(sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta}\right)$$

$$2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{5 - 4cos\beta}$$

$$\sqrt{4 - 4 \cdot \cos^2\beta} = \sqrt{5 - 4cos\beta}$$

$$4 - 4 \cdot \cos^2\beta = 5 - 4cos\beta$$

$$4 \cdot \cos^2\beta - 4cos\beta + 1 = 0$$

$$(2cos\beta - 1)^2 = 0$$

$$cos\beta = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{3}$$

$S'(0) < 0; S'\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$ – точка минимума

$$\beta = 60° \Rightarrow \alpha = 90° - 60° = 30°$$

Из этого можно сделать вывод, что путь AE_1GF_1B – минимальный

Движение в заданном направлении. Пример 2

Как выбрать наилучший курс яхты

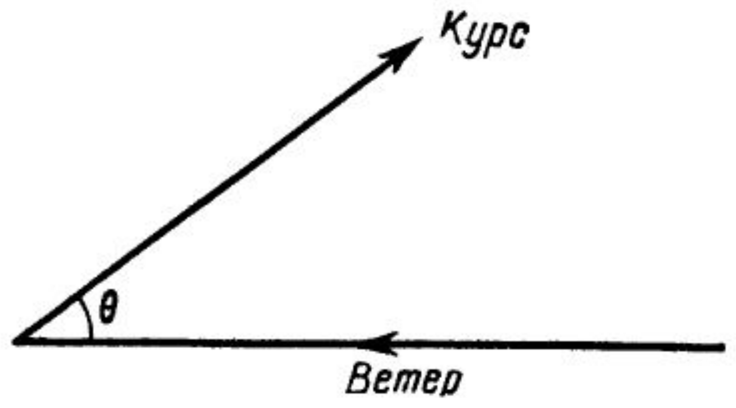

Рис. 2.2. Ветер и курс.

Формулировка задачи

Пусть ветер дует с востока; рассмотрим курс, прилегающий под углом θ

Пусть при $\theta \in (-\beta; \beta)$, движения прямо по курсу невозможно.

При $\theta < -\beta$ или $\theta > \beta$ с увеличением значения $|\theta|$ скорость движения яхты возрастает

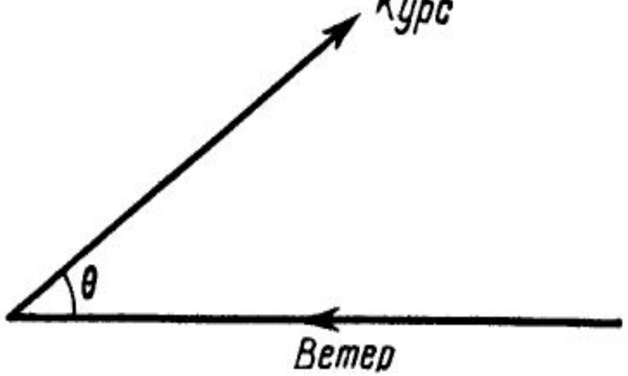

Рис. 2.2. Ветер и курс.

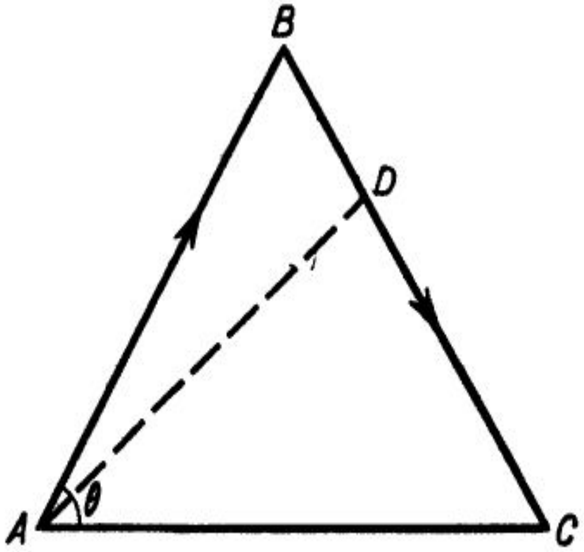

Рис. 2.3. Плавание с переменным галсом.

Рассмотрим модель в которой скорость

$$v = v_0 \cdot (1 - 2cos\theta)$$

Пусть $\theta > \beta = \frac{\pi}{3} = 60°$, тогда

$$v = v_0 \cdot (1 - 2cos\theta) \cdot cos\theta$$

Найдем максимальное значение, для этого сделаем преобразования

$$(1-2cos\theta)cos\theta = cos\theta - 2\cos^2\theta = -2\cdot\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}cos\theta\right) =$$

$$= -2\cdot\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}cos\theta + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) = -2\cdot(\cos^2\theta - \frac{1}{2}cos\theta + \left(\frac{1}{4}\right)^2) + \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{1}{8} - 2\cdot\left(cos\theta - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$v = v_0\cdot\left(\frac{1}{8} - 2\cdot\left(cos\theta - \frac{1}{4}\right)^2\right) \to \max$$

$$\theta = \theta_0; cos\theta_0 = \frac{1}{4}$$

Тогда $v = v_0\cdot(1-2cos\theta) = \frac{v_0}{2}$

Время плавания галсами

$$\frac{AB}{\frac{v_0}{2}} = \frac{BD}{\frac{v_0}{2}} = \frac{AD}{sin2\theta_0} \cdot \frac{\sin(\theta+\gamma)+\sin(\theta-\gamma)}{\frac{v_0}{2}}$$

Время затраченное по прямолинейному курсу AD

$$t_{AD} = \frac{AD}{v_0(1-2cos\gamma)}$$

Плавание галсами более выгодно, когда

$$\frac{2(\sin(\theta_0+\gamma)+\sin(\theta_0-\gamma))}{sin2\theta_0} < \frac{1}{(1-2cos\gamma)}$$

$$2 \cdot (1-2cos\gamma) \cdot 2(\sin(\theta_0+\gamma)+\sin(\theta_0-\gamma)) < sin2\theta_0$$

Применим формулу $\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$4 \cdot (1-2cos\gamma)sin\theta_0 cos\gamma < sin2\theta_0$$

$$4\, sin\theta_0 cos\gamma - 8\, sin\theta_0 \cos^2\gamma < 2sin\theta_0 cos\theta_0$$

$$cos\gamma - 2\cos^2\gamma < \frac{cos\theta_0}{4}$$

$$2\cos^2\gamma - cos\gamma + \frac{cos\theta_0}{4} > 0 \quad (\cos\theta_0 = \tfrac{1}{4})$$

$$2\cos^2\gamma - cos\gamma + \frac{1}{8} > 0$$

$$\left(\sqrt{2}\,cos\,\gamma - \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\right)^2 > 0$$

$$\sqrt{2}\,cos\,\gamma - \tfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}} = 0$$

$cos\gamma = \frac{1}{4} \Rightarrow$ плавание галсами предпочтительнее при условии $cos\gamma > \frac{1}{4}$

Итак, окончательный ответ состоит в том, что существует курс $\theta = \theta_0$, который дает наивысшее значение скорости плавания против ветра.

Движение с ограничениями на производные. Пример 3.

Как поставить неработающий автомобиль в гараж

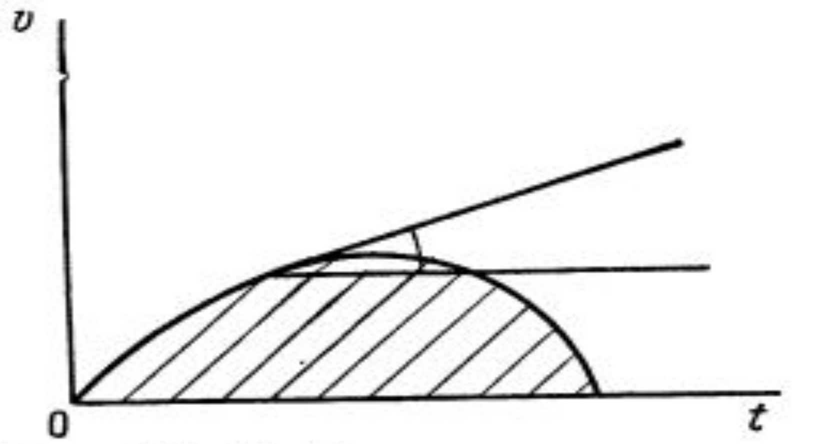

Рис. 2.5. График зависимости скорости от времени. Заштрихованная площадь соответствует пройденному расстоянию, наклон графика — ускорению.

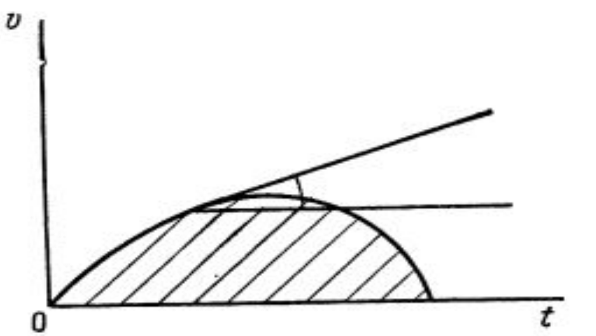

Рис. 2.5. График зависимости скорости от времени. Заштрихованная площадь соответствует пройденному расстоянию, наклон графика — ускорению.

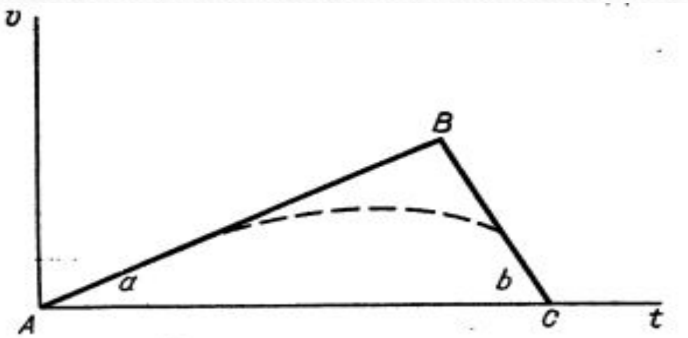

Рис. 2.6. Ускорение и замедление автомобиля.

В простейшей модели предполагается, что никаких сил сопротивления не существует, а есть лишь силы, тянущие или толкающие машину. Направление считаем положительным. Можно развить ускорение f, ограниченное значениями $-b < f < a$.

Задача состоит в том, чтобы найти минимальное время, необходимое для прохождения данного расстояния, в случае, когда начальная и конечная точки соответствуют состояниям покоя.

Решение получается при использовании наибольших зуачений ускорения $(f = a)$ и замедления $(f = -b)$

Пример 4

Улучшение модели.

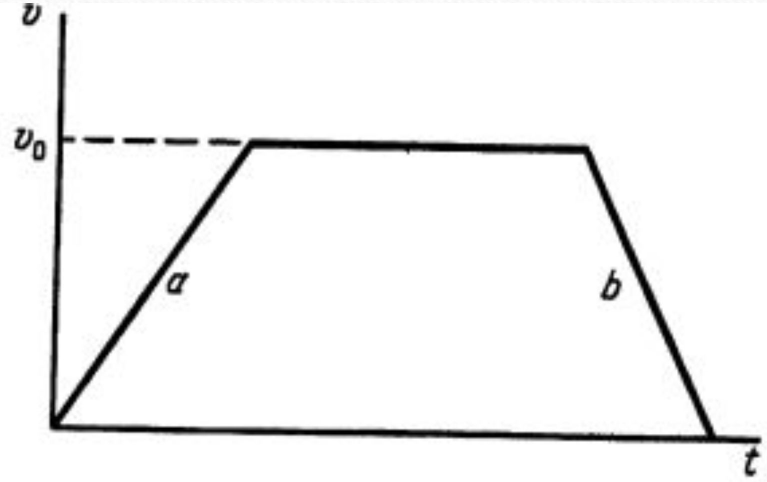

Рис. 2.7. Влияние ограничения максимальной скорости.

Способы улучшения модели:

1. Учесть трение или сопротивление вязких сил. Уравнение движения при максимальной силе можно представить в виде: $\boldsymbol{m\frac{dv}{dt} + k_1 v + k_2 = a}$, где m-масса ограничения теперь накладываются на силу $\boldsymbol{a}$, а не на ускорения.
2. Учесть наличие максимальной безопасной скорости $v = v_0$ наряду с максимальным ускорением и замедлением.
3. Определение «оптимального решения» может быть изменено в зависимости от преследуемой цели.

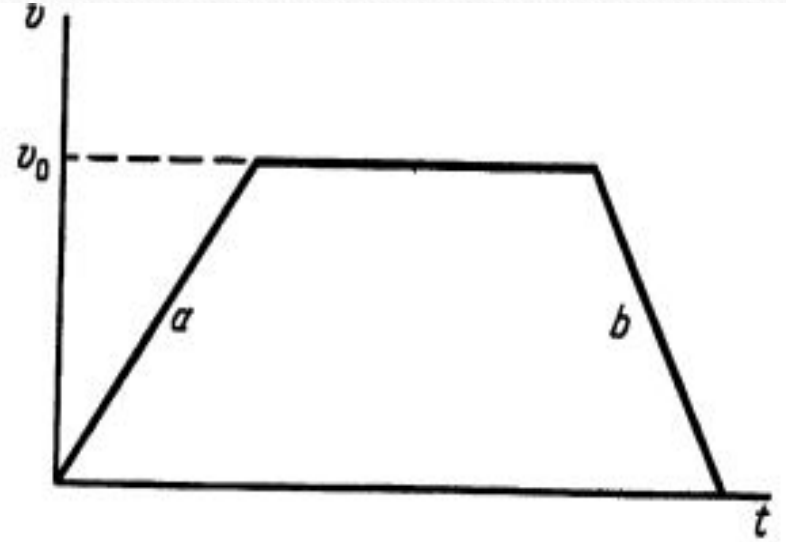

Рис. 2.7. Влияние ограничения максимальной скорости.

Маневрирование автомобилем.
Пример 5.

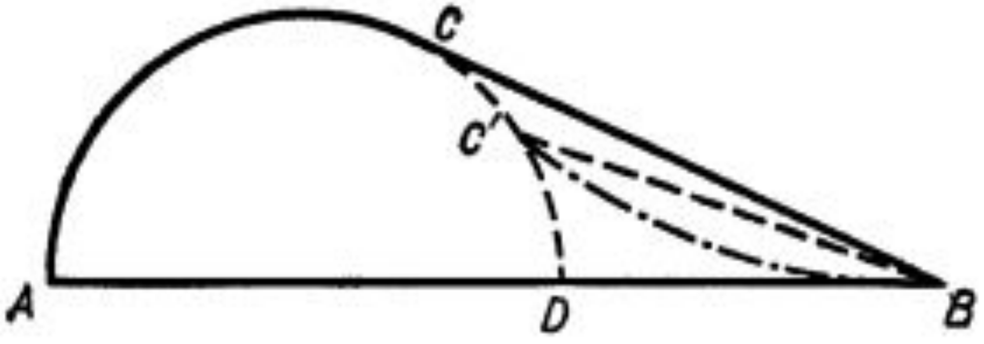

Рис. 2.8. Пути при $AB > 2a$.

Автомобиль двигается и точки А ⊥ прямой АВ. Определить минимальные пути от А до В без использования заднего хода при следующих предположениях.

1. $AB > 2a$. Очевидно, что нужно начинать с поворота по направлению к В по окружности ACD радиуса а. Проведем касательную СВ. Тогда искомым путем будет АСВ.

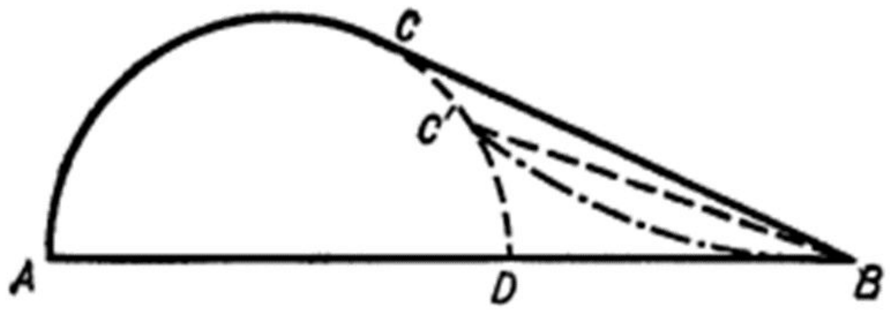

Рис. 2.8. Пути при $AB > 2a$.

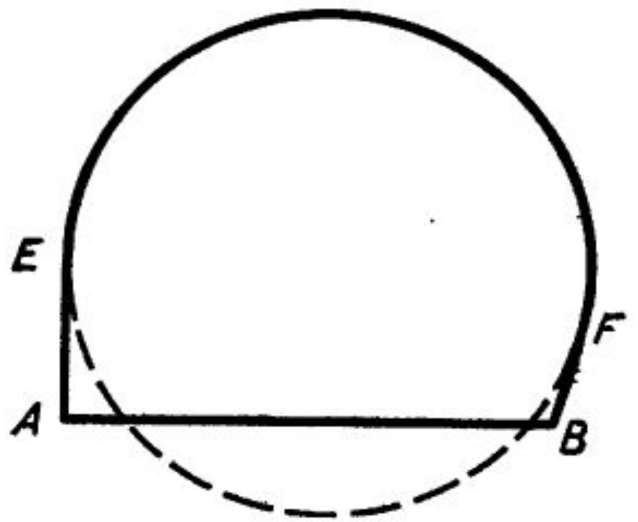

Рис. 2.9. Прямолинейные и криволинейные участки пути.

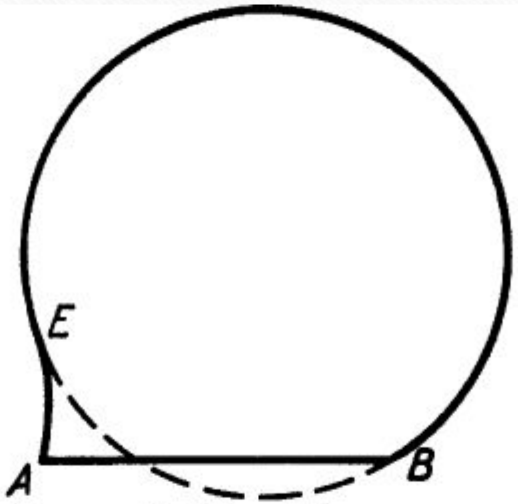

Рис. 2.10. Кривые с кривизной противоположных знаков.

2. Случай $AB < 2a$. Если точка B лежит внутри AD, круговой участок пути не может проходить через B. Можно сначала двигаться по прямой линии AE, затем использовать окружность, касательную к AE, и касательный к ней отрезок прямой TB, проходящий через точку B (рис. 2.9).

Другое решение заключается в использовании сначала дуги AE, изогнутой в направлении от точки B, а затем перехода на сопряжённую окружность EB (рис. 2.10).

Пример 6.

Поставить машину между разметочных линий.

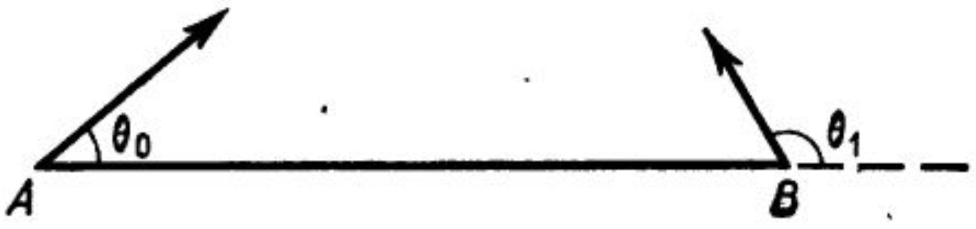

Рис. 2.11. К постановке задачи.

Автомобиль, расположенный в точке А так, что он может начать двигаться под углом θ_0 к линии АВ, необходимо переместить в точку В, расположив его под углом θ_1 к АВ.

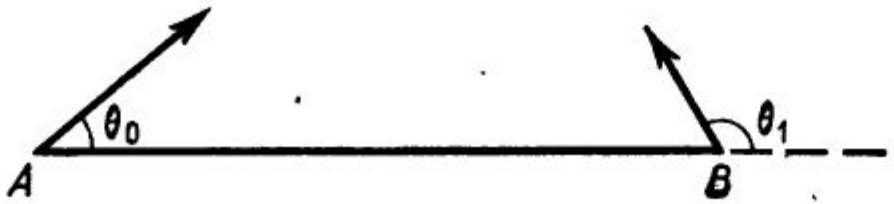

Рис. 2.11. К постановке задачи.

Метод заключается в том, чтобы нарисовать окружности (радиуса a), касающиеся заданных направлений в точках A и B, нанося на них стрелки направления движения. Теперь соединить две окружности касательной, учитывая направление движения, например EH, FG.

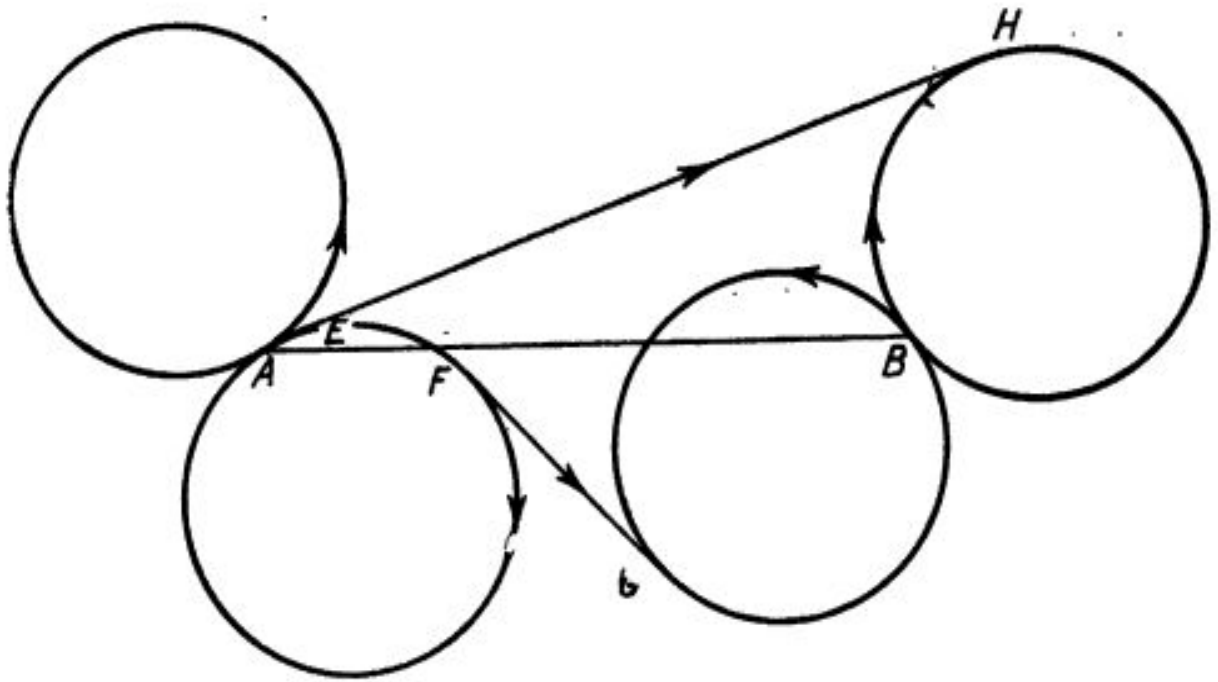

Рис. 2.12. Геометрическое решение.

Задачи.

№ 3. Если движущийся аппарат способен совершить поворот по любой окружности радиуса, большего a, кратчайший путь будет состоять из дуг окружностей радиуса a и отрезков прямых. Если задний ход не разрешен, круговой путь должен идти лишь в «прямом» направлении. Если задний ход возможен, круговой путь может быть пройден в обоих направлениях. Нарисуйте три окружности равного радиуса a; центры A и B двух окружностей находятся на расстоянии $\mathbf{2b = 4a\ \sin\theta}$ $(\mathbf{0 \leq \theta \leq {}^{\pi}/_{2}})$, третья касается первых двух, как показано на рис. 2.13. Проведите с другой стороны общую касательную CD к пересекающимся окружностям. Вычислите теперь длину дуги $\boldsymbol{PQ + QR + RS}$ и длину $\boldsymbol{PC + CD + DS}$, где точки P и S принадлежат общему диаметру AB. Какая величина больше? Зависит ли это от θ? Могут ли они быть равными? Далее, сравните длину дуги $\boldsymbol{LR + RQ + QM}$ с длиной дуги $\boldsymbol{LD + DC + CM}$.

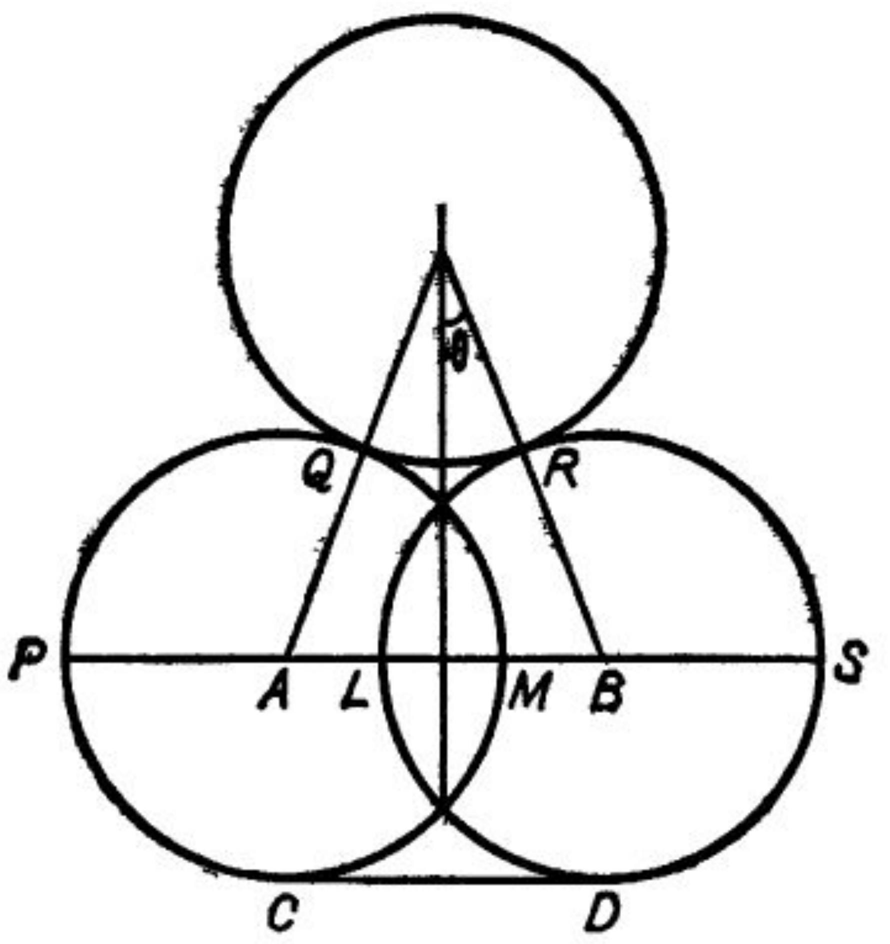

Рис. 2.13. К задаче 3.

РЕШЕНИЕ.

$AB = 2b = 4a\sin\theta$ (по условию)

$\angle A + \angle B = 180 - 2\theta$

$\angle A = 90 - \theta$

$\angle B = 90 - \theta$

$\angle PAQ = 180 - 90 + \theta = 90 + \theta$

$\overset{\frown}{QR} = 2\theta$

$\overset{\frown}{PQ} = 90 + \theta$

$\overset{\frown}{RS} = 90 + \theta$

$\overset{\frown}{PC} = 90$

$CD = 2b$

$\overset{\frown}{DS} = \frac{\pi}{2} = 90$

I) $PQ + QR + RC = 180 + 4\theta = \pi + 4\theta$

II) $PC + CD + DC = \pi + 2b$

Величина дуги зависит от θ.

Если $4\theta = 2b$, тогда дуги равны

Если $4\theta > 2b$, тогда I>II

Если $4\theta < 2b$, тогда I<II

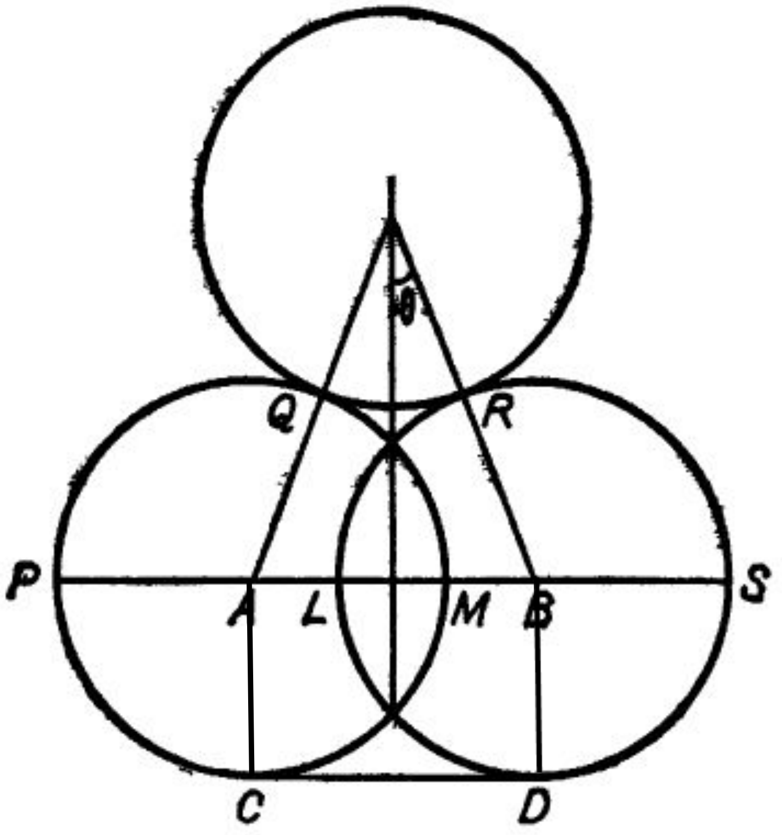

Рис. 2.13. К задаче 3.

РЕШЕНИЕ.

$\overset{\frown}{LR} = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\overset{\frown}{RQ} = 2\theta$

$\overset{\frown}{QM} = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\overset{\frown}{LD} = \frac{\pi}{2}$

$CD = 2b$

$\overset{\frown}{CM} = \frac{\pi}{2}$

I) LR+$RQ + QM = \pi$

II) LD+$CD + CM = \pi + 2b$

Вывод:

II>I

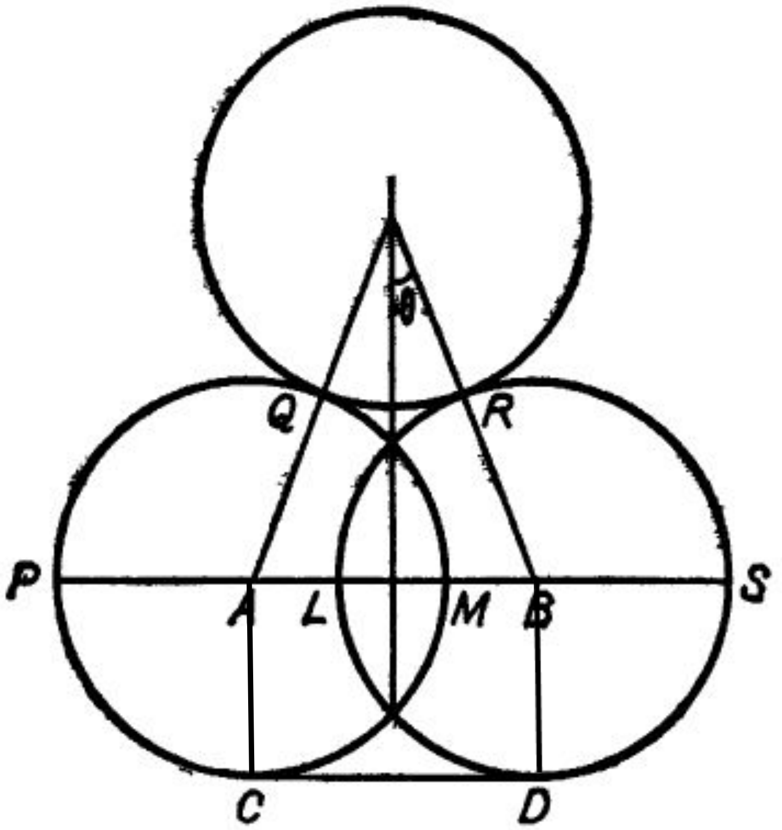

Рис. 2.13. К задаче 3.

А) Автомобиль, расположенный в точке Р и направленный вверх (в плоскости рисунка), нужно передвинуть в точку S так, чтобы он был направлен вниз. Каков кратчайший путь такого перемещения?

1. $PQ + QR + RS$, т.к. только по этому пути автомобиль будет направлен вниз.
2. Если задний ход разрешен, то $PC + CD + DS$, если $4\theta > 2b$ то это кратчайший путь.

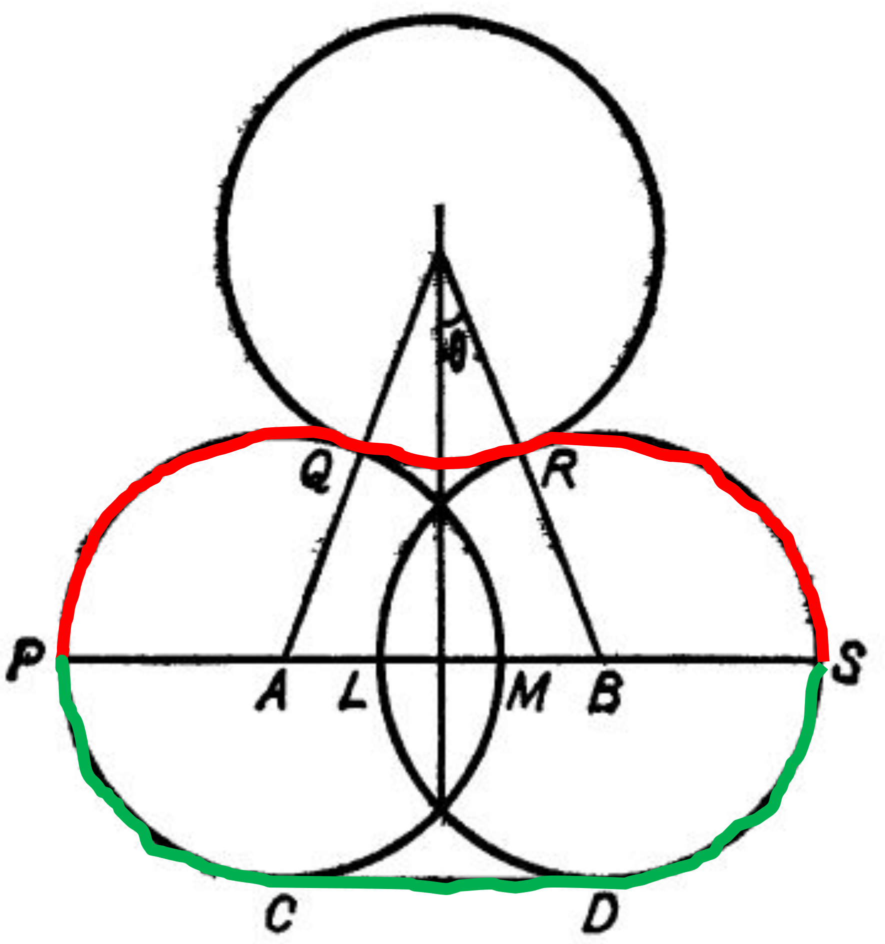

Рис. 2.13. К задаче 3.

Б) Автомобиль, расположенный в точке L направленный вверх, нужно передвинуть в точку M так, чтобы он был направлен вниз. Каков кратчайший путь, если разрешен задний ход и если задний ход запрещен?

Решение

Если задний ход запрещён:

1. $LR + RQ + QM = \pi - 2\theta + 2\pi - 2\theta = 3\pi - 4\theta$

2. $LR + RS + SD + DC + CP + PQ + QM = 3\pi + 2b$

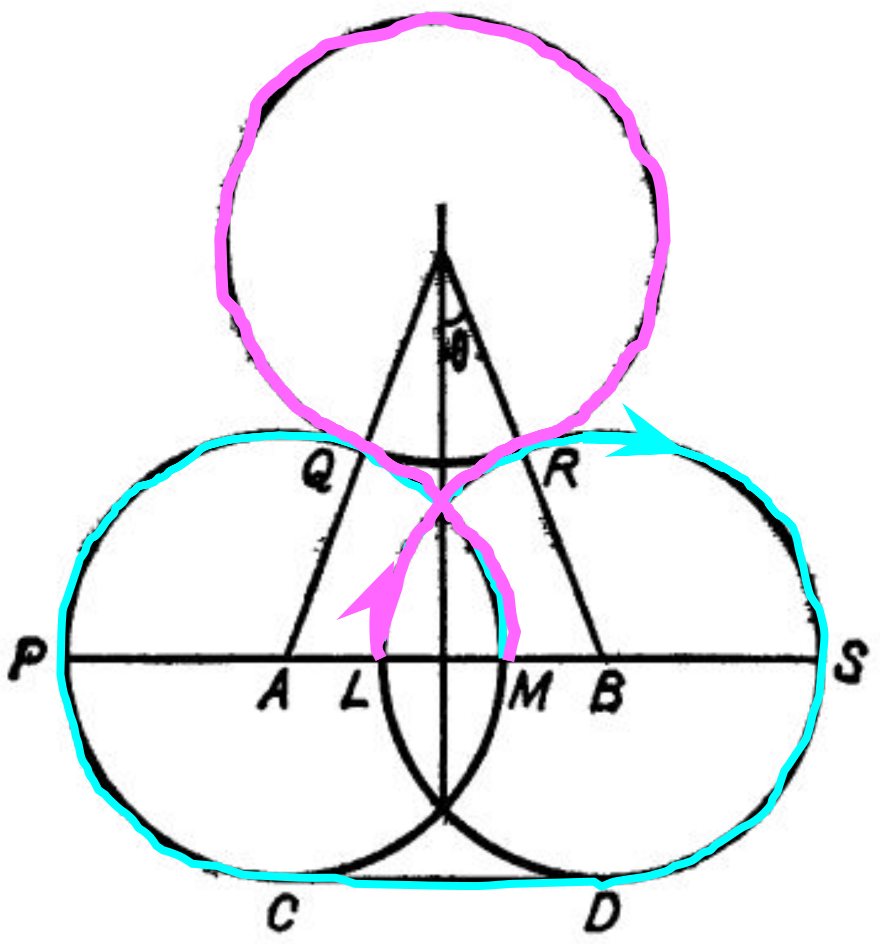

Рис. 2.13. К задаче 3.

Если задний ход разрешен:

1. $LR + RQ + QM = \pi$ (короче)
2. $LR + RS + SD + DC + CM = 2\pi + 2b$

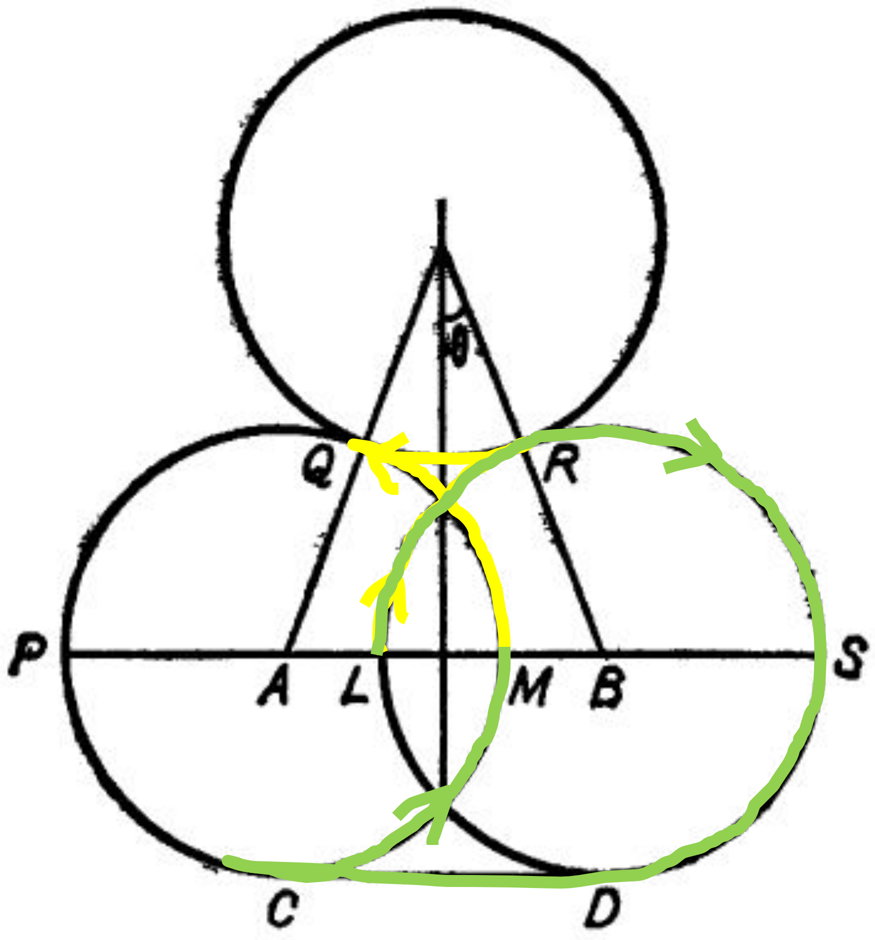

Рис. 2.13. К задаче 3.

Спасибо за внимание!