

Задачи управления движением

Выполнила: Колесникова В.А

Постановка задачи

Решение задачи управления состоит из двух этапов. Во-первых, путь системы должен удовлетворять определенным условиям, например следующим:

- 1) Проходить от точки $(x, y) = (0, 0)$ до точки $(x, y), 5$.
- 2) Лежать в заданной области (в данной части плоскости, например для корабля, который движется лишь по воде, но не по суше).
- 3) Минимизировать какую-либо величину экономического характера, которой может быть стоимость израсходованного топлива, затраченное время или общие затраты управляющего.

Постановка задачи

Алгебраические уравнения

$$\begin{cases} x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \alpha(t) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \end{cases}$$

Дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(x, \alpha, t), \text{ где } i = 1, 2, \dots, n$$

Ограниченные области. Пример 1.

Как обойти круглое озеро, не промочив ног!



Формулировка задачи

Найти кратчайший путь от точки $A(-2,0)$ до точки $B(2,0)$ на плоскости из которой исключена область D , определена неравенством

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

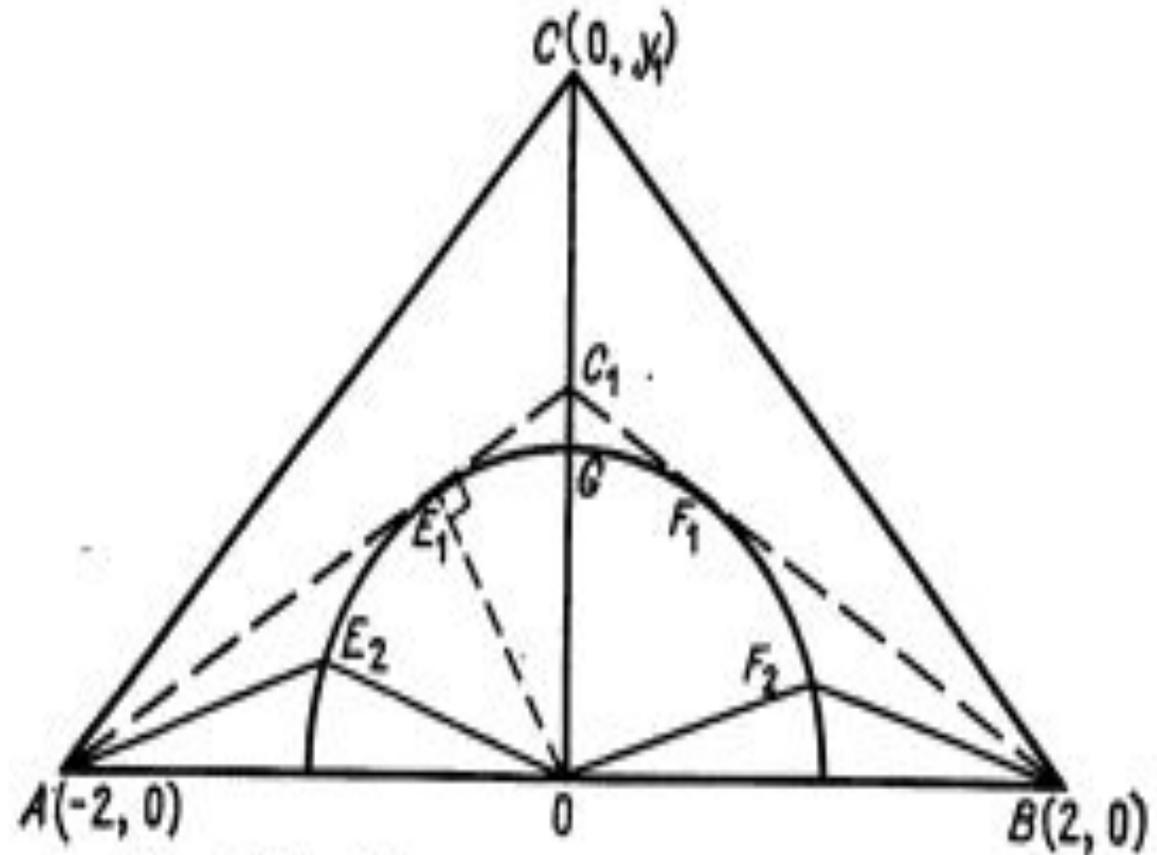


Рис. 2.1. Пути, проходящие вне круга.

Рассмотрим путь АСВ, где y_1 достаточно велико, чтобы АС и СВ не пересекались с D.

$$ACB = AC + CB$$

Так как $AC = CB$, тогда

$$ACB = 2 \cdot AC$$

По теореме Пифагора найдем AC

$$AC^2 = AO^2 + CO^2$$

$$AO = 2; CO = y_1$$

$$AC = \sqrt{4 + y_1^2}$$

$$ACB = 2 \cdot \sqrt{4 + y_1^2}$$

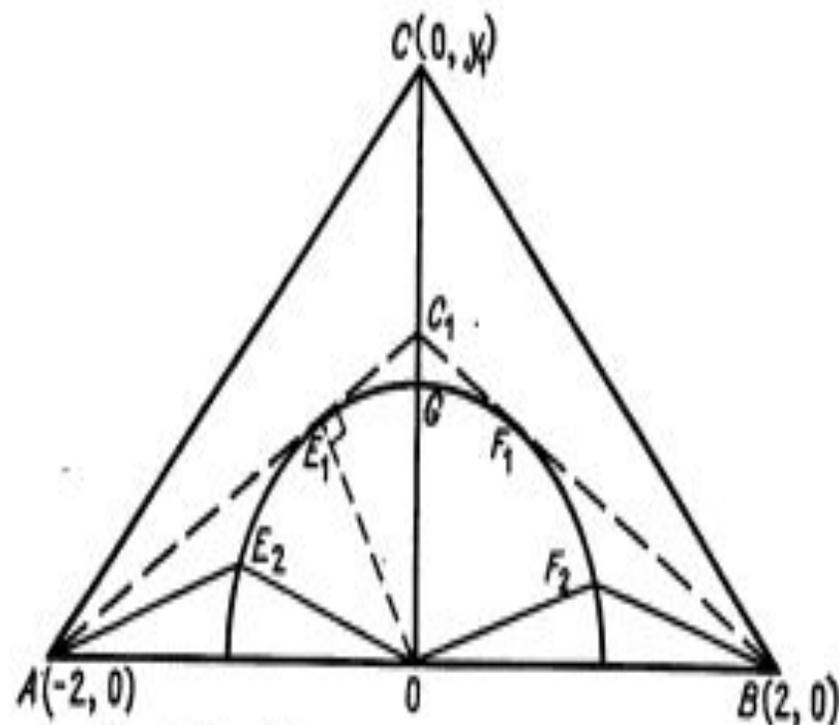


Рис. 2.1. Пути, проходящие вне круга.

Рассмотрим треугольники AC_1O и OC_1B

Пусть угол E_1OC_1 и угол $C_1OF_1 = \alpha$

$$\sin A = \frac{OE_1}{AO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{угол } A = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_1C_1}{E_1O} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = E_1C_1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1F_1}{OF_1} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = C_1F_1$$

$$\text{Тогда } E_1C_1 + C_1F_1 = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Так как угол E_1OF_1 центральный \Rightarrow дуга $E_1F_1 = 2\alpha$

Для всех $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

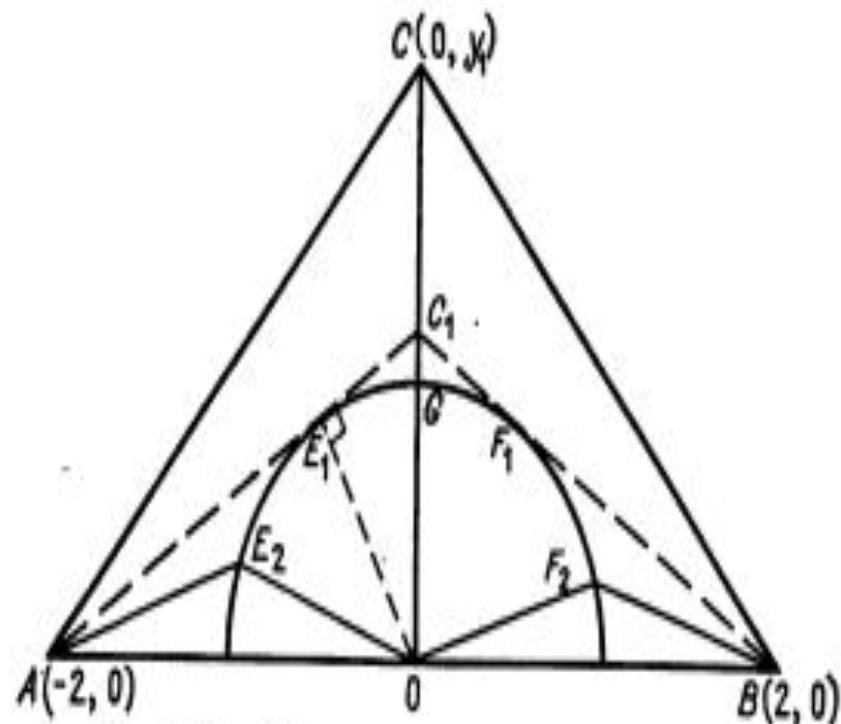


Рис. 2.1. Пути, проходящие вне круга.

Рассмотрим путь AE_2F_2B

Пусть угол $AOE_2 = \text{угол } BOF_2 = \beta$

$$AE_2G = GF_2B \Rightarrow \text{путь } AE_2F_2B = 2 \cdot S$$

$$S = AE_2 + \text{arc}(E_2G)$$

Найдем AE_2 ;

По теореме косинусов:

$$AE_2^2 = OE_2^2 + OA^2 - 2 \cdot OE_2 \cdot OA \cdot \cos\beta$$

$$AE_2^2 = 1 + 4 - 4 \cdot \cos\beta$$

$$\begin{aligned} AE_2 &= \sqrt{5 - 4 \cdot \cos\beta} = \sqrt{1 + 4 - 4 \cdot \cos\beta} = \\ &= \sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\beta + 4 - 4 \cdot \cos\beta} = \sqrt{(\cos\beta - 2)^2 + \sin^2\beta} \end{aligned}$$

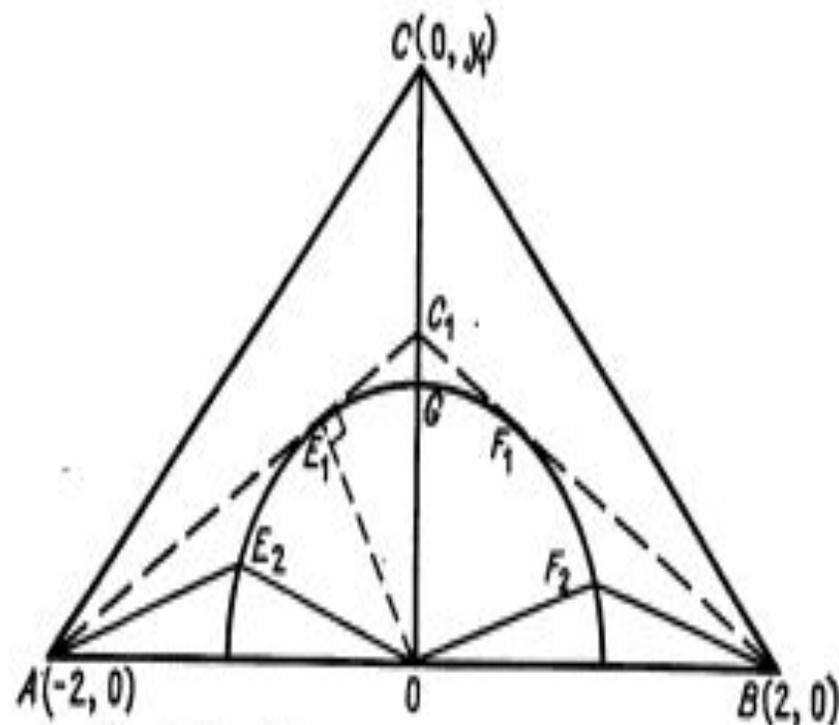


Рис. 2.1. Пути, проходящие вне круга.

Найдем минимум $S = \sqrt{5 - 4 \cdot \cos \beta} + \frac{\pi}{2} - \beta$

$$S' = \frac{4 \sin \beta}{2\sqrt{5 - 4 \cos \beta}} - 1$$

$$\frac{4 \sin \beta}{2\sqrt{5 - 4 \cos \beta}} - 1 = 0$$

$$4 \sin \beta - 2\sqrt{5 - 4 \cos \beta} = 0 \quad (\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta})$$

$$2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{5 - 4 \cos \beta}$$

$$\sqrt{4 - 4 \cdot \cos^2 \beta} = \sqrt{5 - 4 \cos \beta}$$

$$4 - 4 \cdot \cos^2 \beta = 5 - 4 \cos \beta$$

$$4 \cdot \cos^2 \beta - 4 \cos \beta + 1 = 0$$

$$(2 \cos \beta - 1)^2 = 0$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{3}$$

$$S'(0) < 0; S'\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0 \Rightarrow \beta$$

$$= \frac{\pi}{3} \text{ — точка минимума}$$

$$\beta = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Из этого можно сделать вывод, что путь AE_1GF_1B — минимальный

Движение в заданном направлении.

Пример 2

Как выбрать наилучший курс яхты

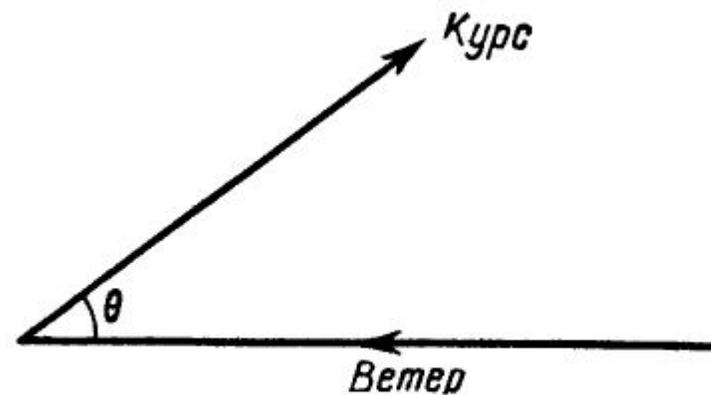


Рис. 2.2. Ветер и курс.

Формулировка задачи

Пусть ветер дует с востока;
рассмотрим курс,
прилежающий под углом θ

Пусть при $\theta \in (-\beta; \beta)$,
движения прямо по курсу
невозможно.

При $\theta < -\beta$ или $\theta > \beta$ с
увеличением значения $|\theta|$
скорость движения яхты
возрастает

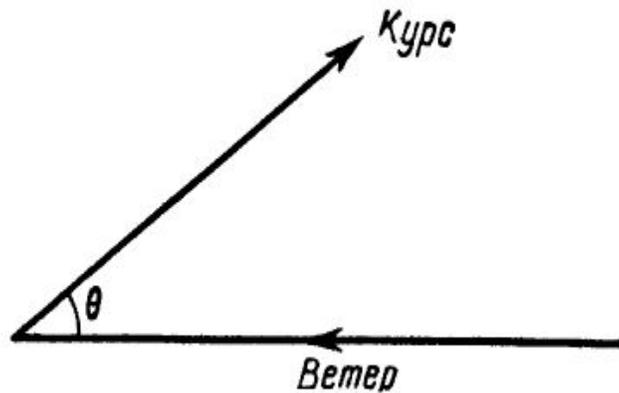


Рис. 2.2. Ветер и курс.

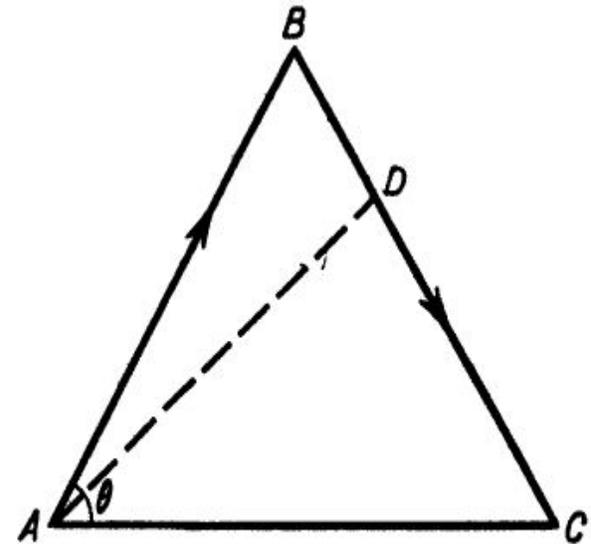


Рис. 2.3. Плавание с переменным галсом.

Рассмотрим модель в которой скорость

$$v = v_0 \cdot (1 - 2\cos\theta)$$

Пусть $\theta > \beta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, тогда

$$v = v_0 \cdot (1 - 2\cos\theta) \cdot \cos\theta$$

Найдем максимальное значение, для этого сделаем преобразования

$$\begin{aligned}(1 - 2\cos\theta)\cos\theta &= \cos\theta - 2\cos^2\theta = -2 \cdot \left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right) = \\ &= -2 \cdot \left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) = -2 \cdot \left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) + \frac{1}{8} = \\ &= \frac{1}{8} - 2 \cdot \left(\cos\theta - \frac{1}{4}\right)^2\end{aligned}$$

$$v = v_0 \cdot \left(\frac{1}{8} - 2 \cdot \left(\cos\theta - \frac{1}{4}\right)^2\right) \rightarrow \max$$

$$\theta = \theta_0; \cos\theta_0 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Τογδα } v = v_0 \cdot (1 - 2\cos\theta) = \frac{v_0}{2}$$

Время плавания галсами

$$\frac{AB}{\frac{v_0}{2}} = \frac{BD}{\frac{v_0}{2}} = \frac{AD}{\sin 2\theta_0} \cdot \frac{\sin(\theta + \gamma) + \sin(\theta - \gamma)}{\frac{v_0}{2}}$$

Время затраченное по прямолинейному курсу AD

$$t_{AD} = \frac{AD}{v_0(1 - 2\cos\gamma)}$$

Плавание галсами более выгодно, когда

$$\frac{2(\sin(\theta_0 + \gamma) + \sin(\theta_0 - \gamma))}{\sin 2\theta_0} < \frac{1}{(1 - 2\cos\gamma)}$$

$$2 \cdot (1 - 2\cos\gamma) \cdot 2(\sin(\theta_0 + \gamma) + \sin(\theta_0 - \gamma)) < \sin 2\theta_0$$

Применим формулу $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$4 \cdot (1 - 2\cos\gamma) \sin\theta_0 \cos\gamma < \sin 2\theta_0$$

$$4 \sin\theta_0 \cos\gamma - 8 \sin\theta_0 \cos^2 \gamma < 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0$$

$$\cos \gamma - 2 \cos^2 \gamma < \frac{\cos \theta_0}{4}$$

$$2 \cos^2 \gamma - \cos \gamma + \frac{\cos \theta_0}{4} > 0 \quad (\cos \theta_0 = \frac{1}{4})$$

$$2 \cos^2 \gamma - \cos \gamma + \frac{1}{8} > 0$$

$$\left(\sqrt{2} \cos \gamma - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \right)^2 > 0$$

$$\sqrt{2} \cos \gamma - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = 0$$

$\cos \gamma = \frac{1}{4} \Rightarrow$ плавание галсами предпочтительнее при условии $\cos \gamma > \frac{1}{4}$

Итак, окончательный ответ состоит в том, что существует курс $\theta = \theta_0$, который дает наивысшее значение скорости плавания против ветра.

Движение с ограничениями на производные. Пример 3.

Как поставить неработающий автомобиль в гараж

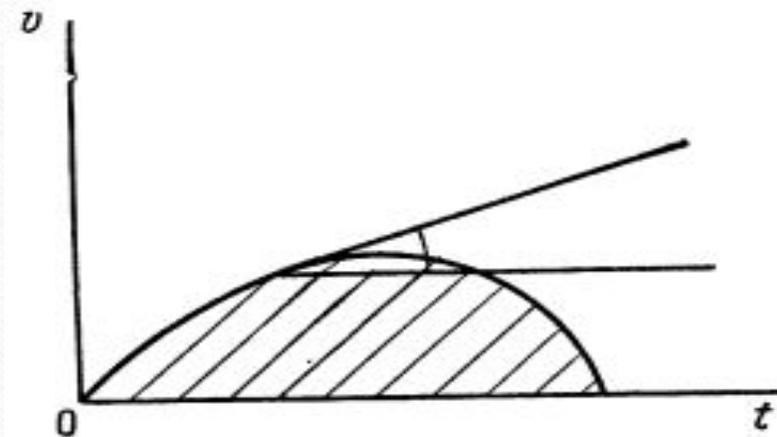


Рис. 2.5. График зависимости скорости от времени. Заштрихованная площадь соответствует пройденному расстоянию, наклон графика — ускорению.

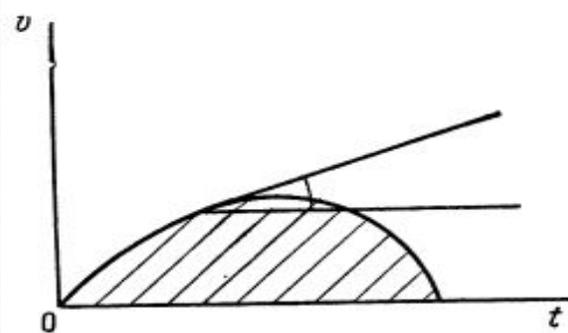


Рис. 2.5. График зависимости скорости от времени. Заштрихованная площадь соответствует пройденному расстоянию, наклон графика — ускорению.

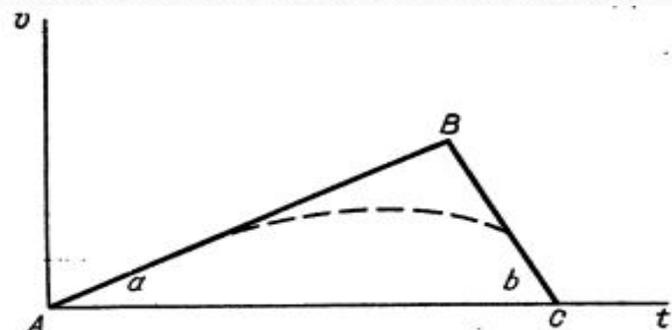


Рис. 2.6. Ускорение и замедление автомобиля.

В простейшей модели предполагается, что никаких сил сопротивления не существует, а есть лишь силы, тянущие или толкающие машину. Направление считаем положительным. Можно развить ускорение f , ограниченное значениями $-b < f < a$.

Задача состоит в том, чтобы найти минимальное время, необходимое для прохождения данного расстояния, в случае, когда начальная и конечная точки соответствуют состояниям покоя.

Решение получается при использовании наибольших значений ускорения ($f = a$) и замедления ($f = -b$)

Пример 4

Улучшение модели.

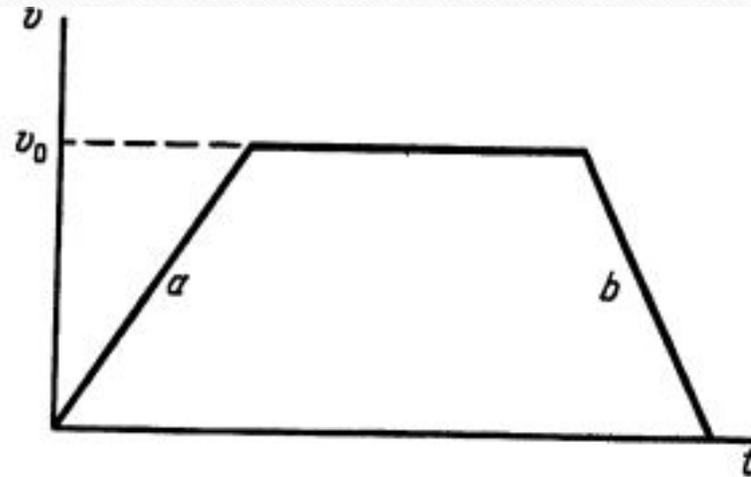


Рис. 2.7. Влияние ограничения максимальной скорости.

Способы улучшения модели:

1. Учесть трение или сопротивление вязких сил.
Уравнение движения при максимальной силе можно представить в виде: $m \frac{dv}{dt} + k_1 v + k_2 = a$, где m -масса ограничения теперь накладываются на силу a , а не на ускорения.
2. Учесть наличие максимальной безопасной скорости $v = v_0$ наряду с максимальным ускорением и замедлением.
3. Определение «оптимального решения» может быть изменено в зависимости от преследуемой цели.

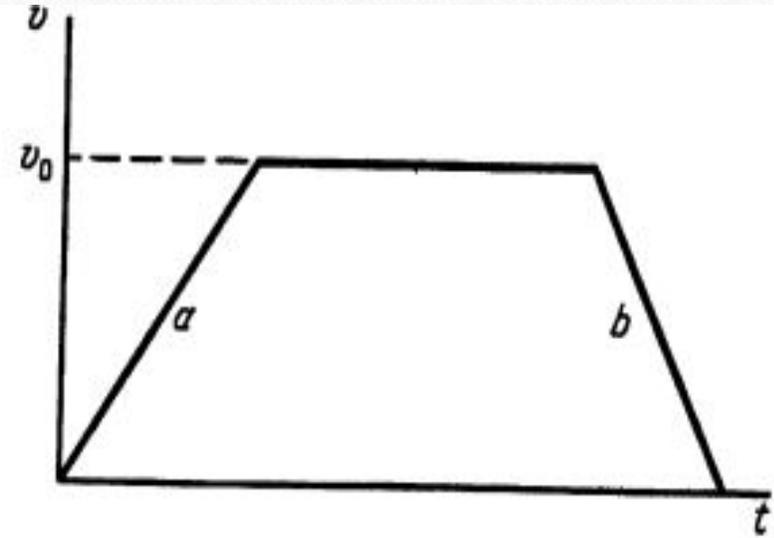


Рис. 2.7. Влияние ограничения максимальной скорости.

Маневрирование автомобилем.
Пример 5.

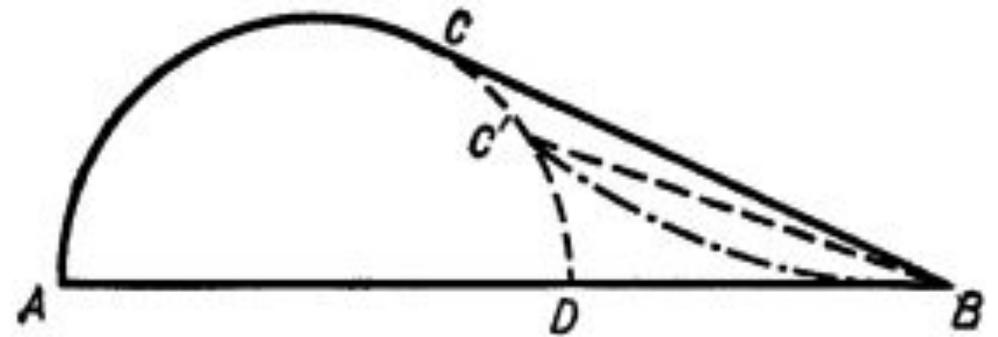


Рис. 2.8. Пути при $AB > 2a$.

Автомобиль движется и точки $A \perp$ прямой AB .
Определить минимальные пути от A до B без использования заднего хода при следующих предположениях.

1. $AB > 2a$. Очевидно, что нужно начинать с поворота по направлению к B по окружности ACD радиуса a . Проведем касательную CB . Тогда искомым путем будет ACB .

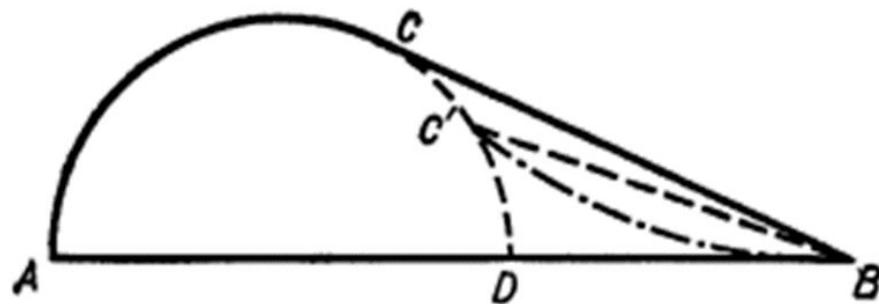


Рис. 2.8. Пути при $AB > 2a$.

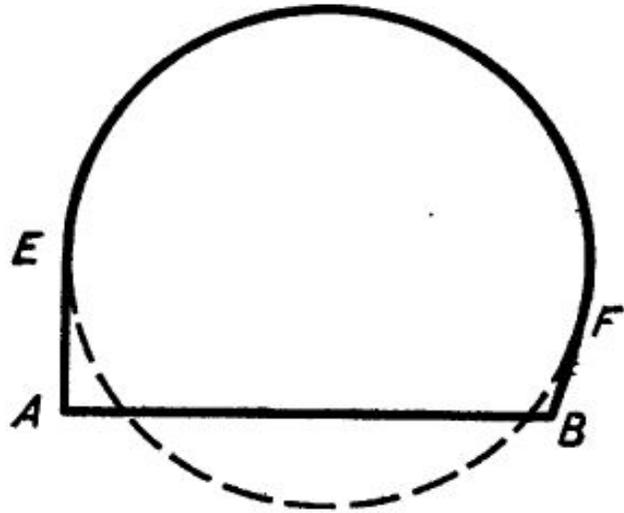


Рис. 2.9. Прямолинейные и криволинейные участки пути.

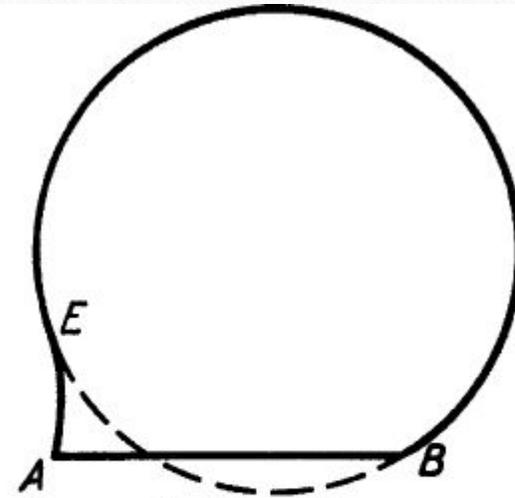


Рис. 2.10. Кривые с кривизной противоположных знаков.

2. Случай $AB < 2a$. Если точка B лежит внутри AD , круговой участок пути не может проходить через B . Можно сначала двигаться по прямой линии AE , затем использовать окружность, касательную к AE , и касательный к ней отрезок прямой TB , проходящий через точку B (рис. 2.9).

Другое решение заключается в использовании сначала дуги AE , изогнутой в направлении от точки B , а затем перехода на сопряжённую окружность EB (рис. 2.10).

Пример 6.

Поставить машину между разметочных линий.

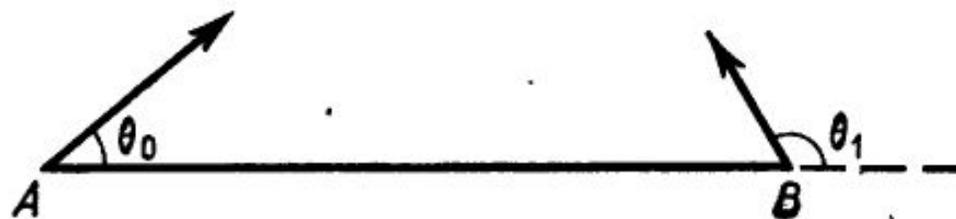


Рис. 2.11. К постановке задачи.

Автомобиль, расположенный в точке A так, что он может начать двигаться под углом θ_0 к линии AB , необходимо переместить в точку B , расположив его под углом θ_1 к AB .

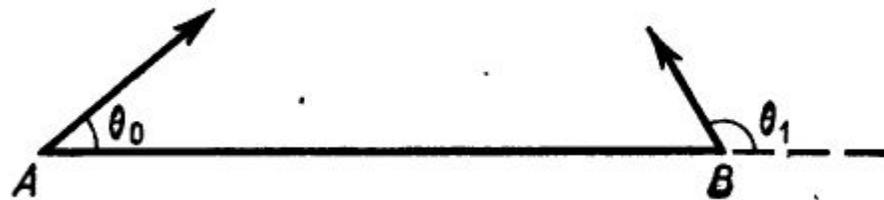


Рис. 2.11. К постановке задачи.

Метод заключается в том, чтобы нарисовать окружности (радиуса a), касающиеся заданных направлений в точках A и B , нанося на них стрелки направления движения. Теперь соединить две окружности касательной, учитывая направление движения, например EH , FG .

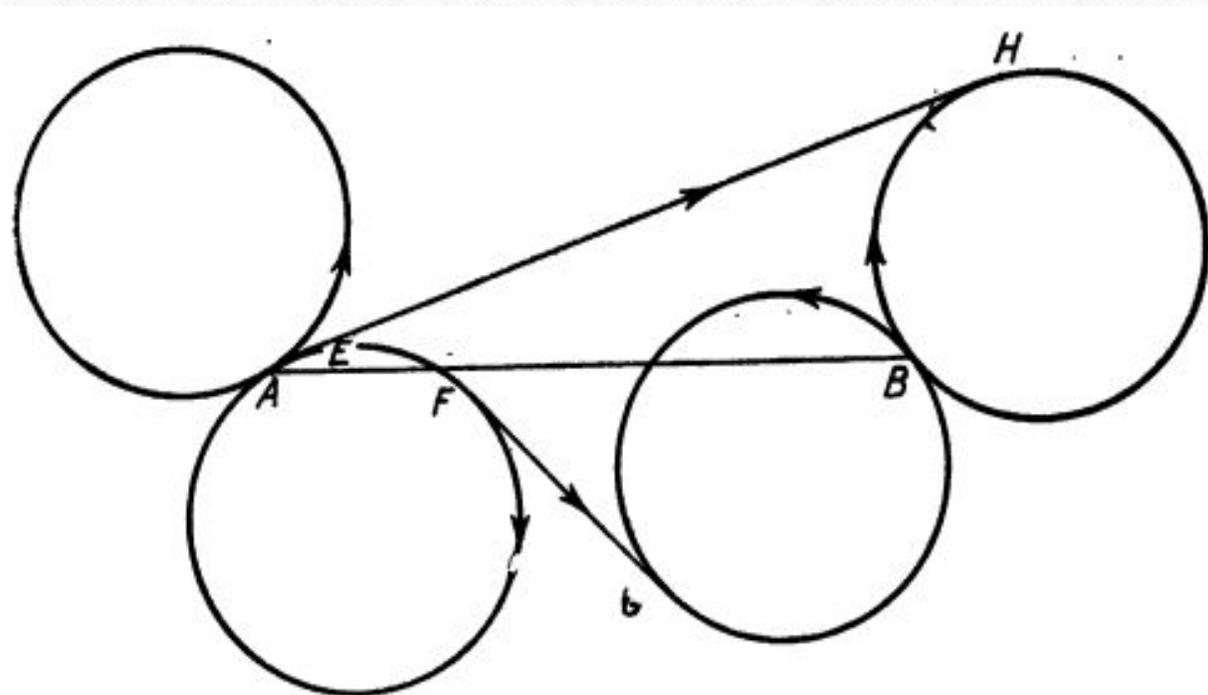


Рис. 2.12. Геометрическое решение.

Задачи.

№ 3. Если движущийся аппарат способен совершить поворот по любой окружности радиуса, большего a , кратчайший путь будет состоять из дуг окружностей радиуса a и отрезков прямых. Если задний ход не разрешен, круговой путь должен идти лишь в «прямом» направлении. Если задний ход возможен, круговой путь может быть пройден в обоих направлениях. Нарисуйте три окружности равного радиуса a ; центры A и B двух окружностей находятся на расстоянии $2b = 4a \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$), третья касается первых двух, как показано на рис. 2.13. Проведите с другой стороны общую касательную CD к пересекающимся окружностям. Вычислите теперь длину дуги $PQ + QR + RS$ и длину $PC + CD + DS$, где точки P и S принадлежат общему диаметру AB . Какая величина больше? Зависит ли это от θ ? Могут ли они быть равными? Далее, сравните длину дуги $LR + RQ + QM$ с длиной дуги $LD + DC + CM$.

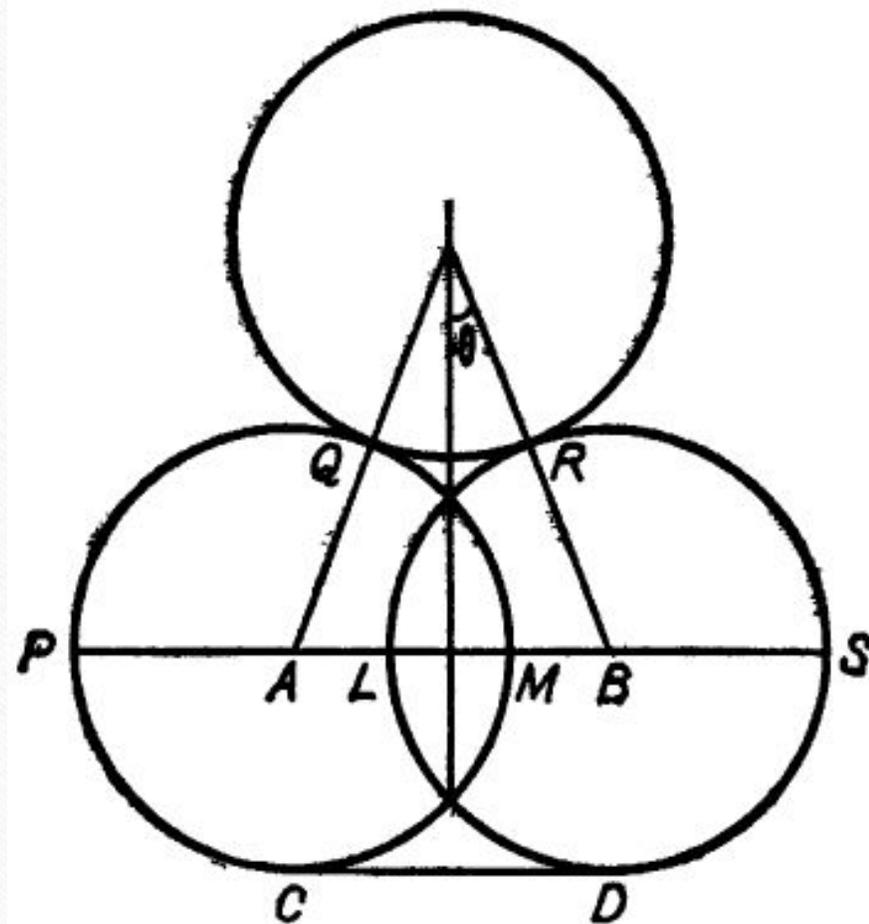


Рис. 2.13. К задаче 3.

РЕШЕНИЕ.

$$AB = 2b = 4a \sin \theta \text{ (по условию)}$$

$$\angle A + \angle B = 180 - 2\theta$$

$$\angle A = 90 - \theta$$

$$\angle B = 90 - \theta$$

$$\angle PAQ = 180 - 90 + \theta = 90 + \theta$$

$$\overline{QR} = 2\theta$$

$$\overline{PQ} = 90 + \theta$$

$$\overline{RS} = 90 + \theta$$

$$\overline{PC} = 90$$

$$CD = 2b$$

$$\overline{DS} = \frac{\pi}{2} = 90$$

$$\text{I) } PQ + QR + RC = 180 + 4\theta = \pi + 4\theta$$

$$\text{II) } PC + CD + DC = \pi + 2b$$

Величина дуги зависит от θ .

Если $4\theta = 2b$, тогда дуги равны

Если $4\theta > 2b$, тогда I > II

Если $4\theta < 2b$, тогда I < II

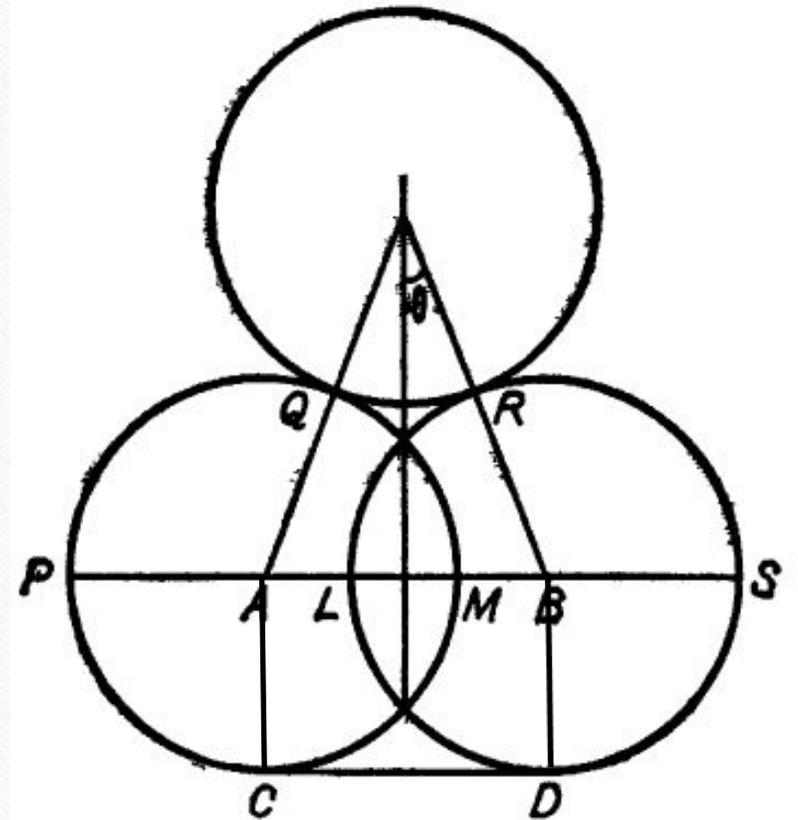


Рис. 2.13. К задаче 3.

РЕШЕНИЕ.

$$\widetilde{LR} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\widetilde{RQ} = 2\theta$$

$$\widetilde{QM} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\widetilde{LD} = \frac{\pi}{2}$$

$$CD = 2b$$

$$\widetilde{CM} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{I) } LR + RQ + QM = \pi$$

$$\text{II) } LD + CD + CM = \pi + 2b$$

Вывод:

$$\text{II} > \text{I}$$

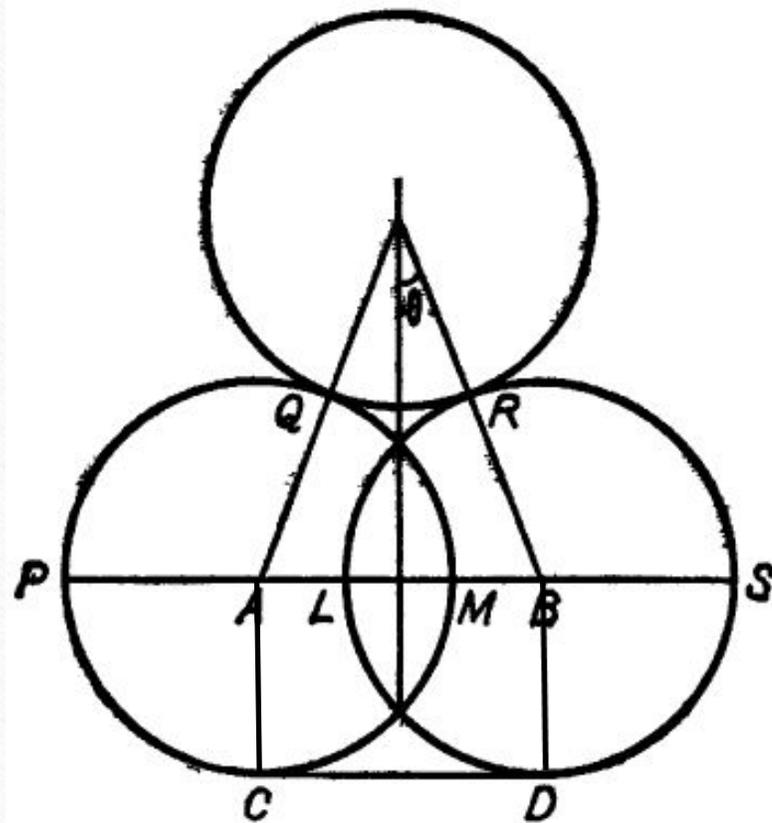


Рис. 2.13. К задаче 3.

А) Автомобиль, расположенный в точке P и направленный вверх (в плоскости рисунка), нужно передвинуть в точку S так, чтобы он был направлен вниз. Каков кратчайший путь такого перемещения?

1. $PQ + QR + RS$, т.к. только по этому пути автомобиль будет направлен вниз.
2. Если задний ход разрешен, то $PC + CD + DS$, если $4\theta > 2b$ то это кратчайший путь.

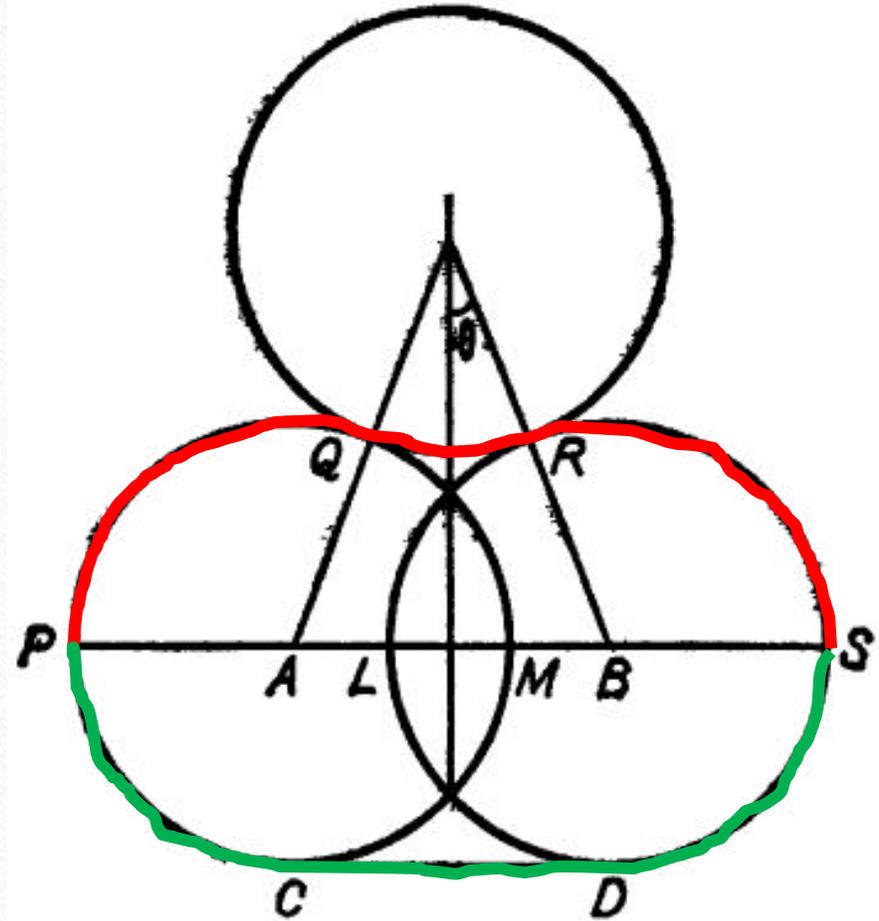


Рис. 2.13. К задаче 3.

Б) Автомобиль, расположенный в точке L направленный вверх, нужно передвинуть в точку M так, чтобы он был направлен вниз. Каков кратчайший путь, если разрешен задний ход и если задний ход запрещен?

Решение

Если задний ход запрещён:

1. $LR + RQ + QM = \pi - 2\theta + 2\pi - 2\theta = 3\pi - 4\theta$
2. $LR + RS + SD + DC + CP + PQ + QM = 3\pi + 2b$

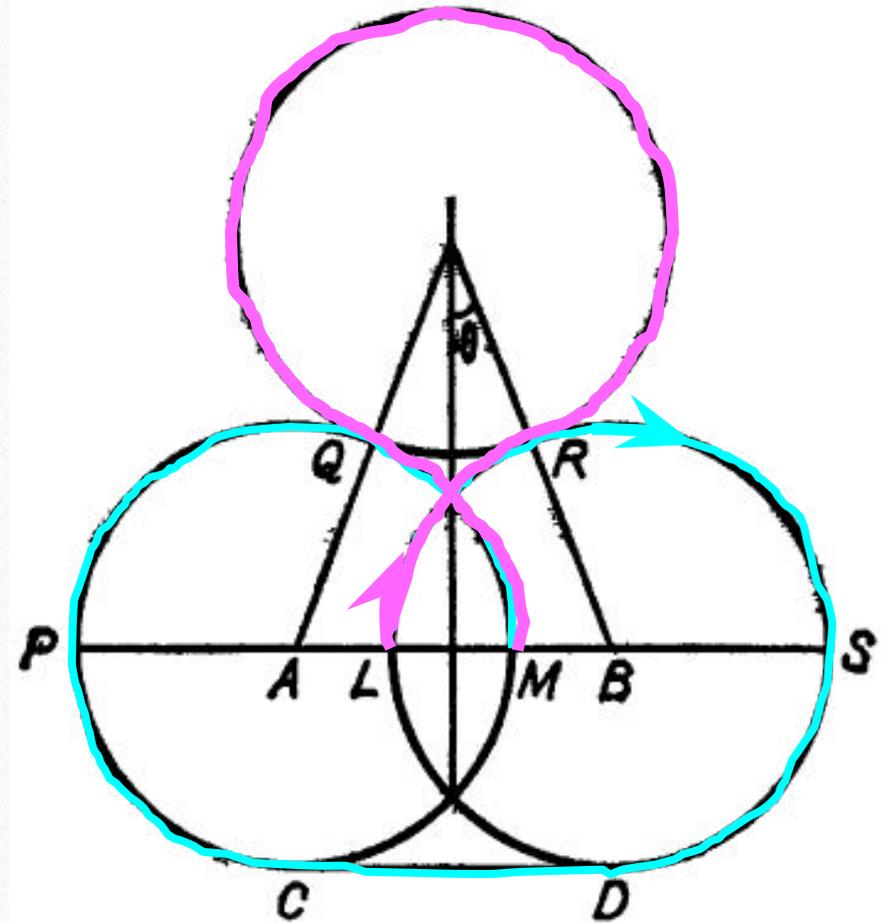


Рис. 2.13. К задаче 3.

Если задний ход разрешен:

1. $LR + RQ + QM = \pi$ (короче)

2. $LR + RS + SD + DC + CM = 2\pi + 2b$

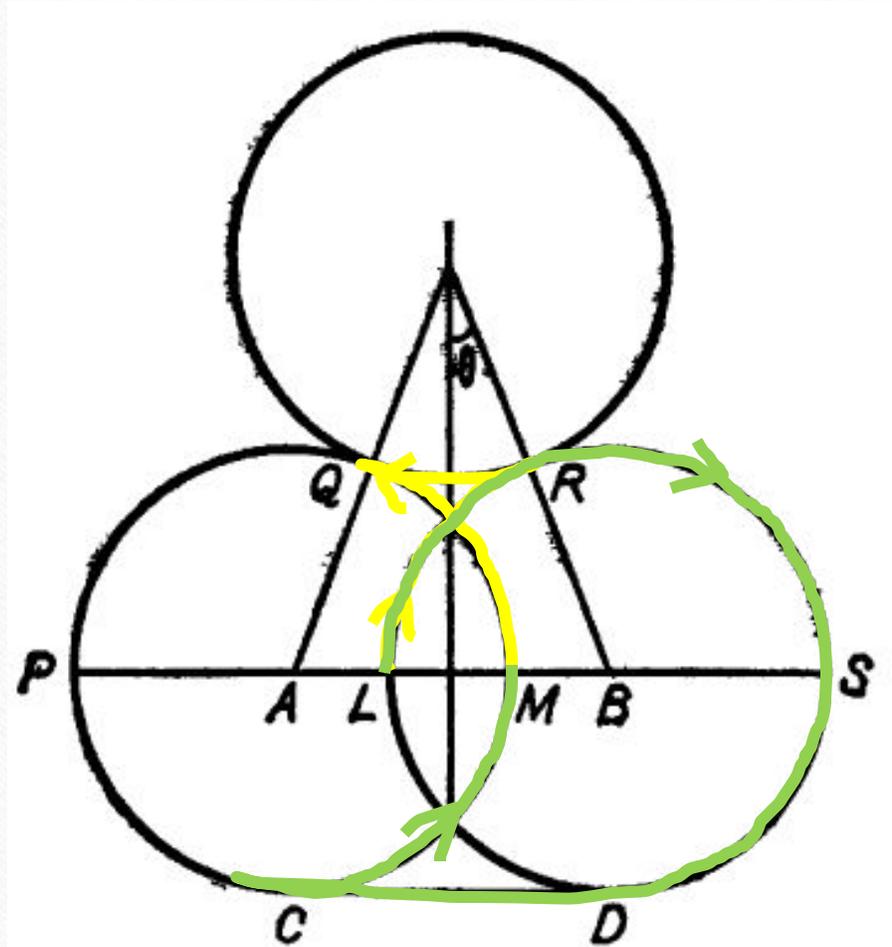


Рис. 2.13. К задаче 3.

Спасибо за внимание!
