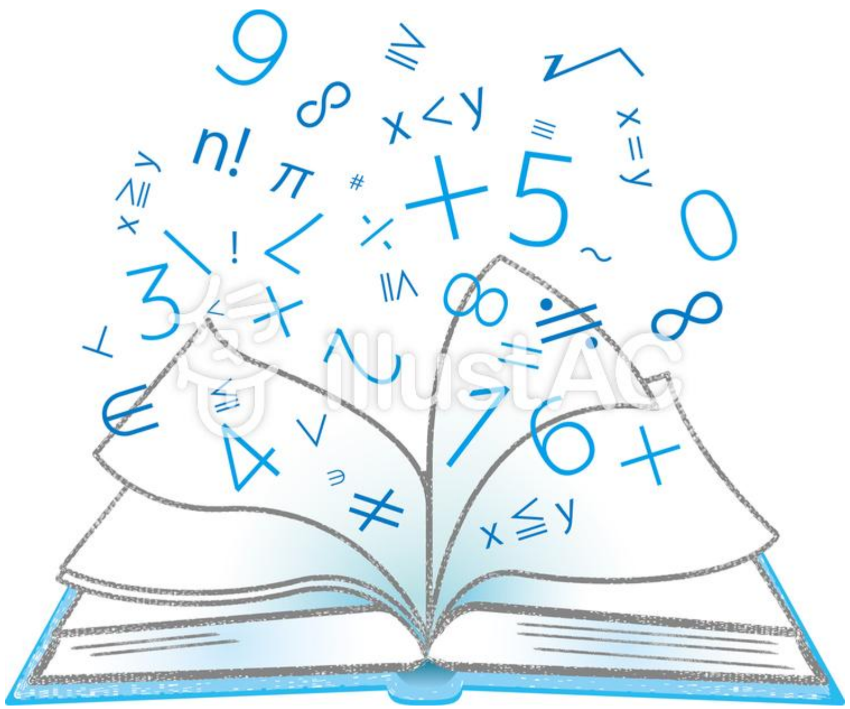
Иррациональные уравнения



Иррациональным уравнением называется уравнение, в которых переменная «х»содержится под знаком корня.

Например,

$$\sqrt{2x-3}=x+1$$

$$\sqrt[3]{x+5}-12\sqrt{x-4}=5$$

$$3x^{\frac{4}{7}}-\sqrt{x+8}=15$$

Какие из уравнений не являются иррациональными?

$$а)5+\sqrt{x-3}=x$$

$$б)\sqrt{2}x+7=2x$$

$$в)\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=4$$

$$г)\sqrt{5}x^2+x-\sqrt{2}=0$$

$$д)\sqrt{x-7}+\sqrt{8}=0$$

$$е)\sqrt[3]{3x+6}=-6$$

Идея решения

Основная идея решения иррационального уравнения состоит в сведении его к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием.

Главный способ избавиться от корня и получить рациональное уравнение – возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень, которую имеет корень, содержащий неизвестное.

Основные методы решения иррациональных уравнений:

- **возведение в степень обеих частей уравнения;**

- **введение новой переменной;**

- **разложение на множители.**

Метод возведения в степень обеих частей уравнения:

1) Если иррациональное уравнение содержит только один радикал, то нужно записать так, чтобы в одной части знака равенства оказался только этот радикал. Затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, чтобы получилась рациональное уравнение.

Метод возведения в степень обеих частей уравнения:

2) Если в иррациональном уравнении содержится два или более радикала, то сначала изолируется один из радикалов, затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, и повторяют операцию возведения в степень до тех пор, пока не получится рациональное уравнение.

Пример №1 $\sqrt{3x-2}=x$

$$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2=x^2$$

$$3x-2=x^2$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$D=9-4\cdot 2=1$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2}$$

$x_1=2$ $x_2=1$

Проверка: $x=1$: $\sqrt{3*1-2}=1$

1=1

$x=2$: $\sqrt{3*2-2}=2$

2=2

Ответ: $x_1=1$, $x_2=2$

Запомни!

При возведении обеих частей уравнения

- в **четную** степень (показатель корня – **четное** число) – возможно появление постороннего
  корня (проверка необходима)

- в **нечетную** степень (показатель корня – **нечетное** число) – получается уравнение, равносильное исходному (проверка не нужна)

Пример №2 $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$

$$\left(\sqrt{x^2+5x+1}\right)^2=(2x-1)^2$$

$$x^2+5x+1=4x^2-4x+1$$

$$x^2+5x+1-4x^2+4x-1=0$$

$$-3x^2+9x=0$$

$$-3x(x-3)=0$$

$-3x=0$ $\quad$ $x-3=0$

$x=0$ $\quad$ $x=3$

Проверка: 1) $x=0$: $\sqrt{0+5*0+1}=2*0-1$

1≠-1

2) $x=3$: $\sqrt{9+15+1}=6-1$

5=5

Ответ: $x=3$.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Пример №3 Решите уравнение $\sqrt{2x-3} = 4 - x$

$$\begin{cases} 2x - 3 = (4-x)^2 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} => \begin{cases} x^2 - 10x + 19 = 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$\underline{x = 5 - \sqrt{6}}$

$x = 5 + \sqrt{6} > 4$ – посторонний корень

Ответ: $x = 5 - \sqrt{6}$.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

Пример №4

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{5-x}$$

1 способ

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{5-x}$$

$$x+3 = 5-x$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

проверка

при x $=1$ $\sqrt{1+3} = \sqrt{5-1}$

$$\text{ответ}: 1$$

2 способ

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{5-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x+3 = 5-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 5 \quad \text{ответ}:\ 1. \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 (g(x) \geq 0) \end{cases}$$

Пример №5

$$2\sqrt{x+1}-\frac{4}{\sqrt{x+1}}+7=0$$

$\sqrt{x+1}=t \qquad t>0$

$$2t-\frac{4}{t}+7=0$$

$$2t^2-4+7t=0$$

$$2t^2+7t-4=0$$

$$D=49-4\cdot 2\cdot(-4)=49+32=81$$

$$t_{1,2}=\frac{-7\pm 9}{4} \qquad t_1=\frac{-16}{4}=-4\ <0$$

$$t_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$x+1=\frac{1}{4}$$

$$x=\frac{1}{4}-1$$

$$x=-\frac{3}{4}$$

Пример №6

$$(x^2 - 5x - 6)\sqrt{\frac{x+2}{x-5}} = 0$$

Пример №6 Решить уравнение

$$x - 1 = \sqrt[3]{x^2 - x - 1}$$

$$(x-1)^3 = x^2 - x - 1$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 1$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 0;\ 2.$

Пример №5   Решите уравнение

$\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-2}=3$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} => x \geq 2$

$\sqrt{3x-1}=3+\sqrt{x-2}$

$3x-1=9+6\sqrt{x-2}+x-2$

$3x-1=7+x+6\sqrt{x-2}$

$2x-8=6\sqrt{x-2}$

$x-4=3\sqrt{x-2}$

$x^2-8x+16=9(x-2)$

$x^2-17x+34=0$

$D=17^2-4*1*34=289-136=153$

$\sqrt{D}=\sqrt{153}=\sqrt{9*17}=3\sqrt{17}$

$x=\dfrac{17+3\sqrt{17}}{2} \in$ ОДЗ

$x=\dfrac{17-3\sqrt{17}}{2}<4 \notin ОДЗ$ – посторонний корень

Ответ: $\frac{17+3\sqrt{17}}{2}$

Пример №6 Решить уравнение

$$x - 1 = \sqrt[3]{x^2 - x - 1}$$

Метод введения новой переменной

Данный метод применяется в том случае, когда в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины. Тогда имеет смысл принять это выражение за новую переменную и решить уравнение сначала относительно введенной неизвестной, а потом найти исходную величину.

Пример №9 Решите уравнение

$\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} - 2 = 0 \qquad\qquad x \geq 0$

$\sqrt[8]{x} = y, \quad y \geq 0$

$y^2 + y - 2 = 0$

$\underline{y = 1}$

$y = -2 < 0 -$ посторонний корень

$y = 1, \qquad \sqrt[8]{x} = 1, \quad => x = 1$

Ответ: $x = 1$.

Пример №10 Найдите сумму корней уравнения:

$$(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$$

$$x^2+5x+4-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$$

Обозначим $y=\sqrt{x^2+5x+2}\,, y\geq 0$ и перейдем к уравнению

$$y^2+2-3y=6$$

$$y^2-3y-4=0$$

$$y=-1<0 - \text{посторонний корень}$$

$$\underline{y=4}$$

$$\sqrt{x^2+5x+2}=4$$

$$x^2+5x+2=16$$

$$x^2+5x-14=0$$

$$x=-7$$

$$x=2$$

<u>Проверка: </u>1) $x=-7$, тогда $\sqrt{(-7)^2+5(-7)+2}=4$

$$\sqrt{16}=4;\quad 4=4 \quad \text{верно}$$

2) $x=2$, тогда $\sqrt{2^2+5*2+2}=4$

$$\sqrt{16}=4;\quad 4=4 \quad \text{верно}$$

Ответ: -5.

Пример №11 Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = a, \quad a > 0$$

$$a - 2 * \frac{1}{a} = 1$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$a = -1 < 0$ – посторонний корень

$\underline{a = 2}$

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2$$

$$2x + 1 = 4(x - 1)$$

$$2x = 5 \quad => x = 2{,}5$$

Ответ: $x = 2{,}5$.

Метод разложения на множители

Для решения иррациональных уравнений данным методом следует пользоваться правилом:

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей, входящих в произведение; равен нулю; а остальные при этом имеют смысл.

Уравнение $\sqrt{f(x)} \cdot q(x) = 0$ **равносильно совокупности**

1) $\begin{cases} f(x) = 0 \\ q(x) - \text{определена} \end{cases}$

2) $\begin{cases} q(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

Пример №12

Решите уравнение: $(x^2 - 5x - 6)\sqrt{\frac{x+2}{x-5}} = 0$

Решение:

1) $\frac{x+2}{x-5} = 0$

$x = -2$

2) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ \frac{x+2}{x-5} \geq 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} x = 6, \ x = -1 \\ x \in (-\infty; -2] \cup (5; \infty) \end{cases}$

Ответ: {-2;6}

Пример №13

Решите уравнение: $\sqrt{x-3} * x^2 = 4\sqrt{x-3}$

Решение:

$$\sqrt{x-3} * (x^2 - 4) = 0$$

1) $x - 3 = 0$

$x = 3$

2) $\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} => \begin{cases} x = 2, \quad x = -2 \\ x \geq 3 \end{cases}$

Система решений не имеет.

Ответ: {3}

Пример №14 Решите уравнение:

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} - 3\sqrt{x-3} - 5\sqrt{x-2} + 15 = 0$$

Решение:

ОДЗ: $x \geq 3$

$$\sqrt{(x-3)(x-2)} - 3\sqrt{x-3} - 5\sqrt{x-2} + 15 = 0$$

$$\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x-2} - 3\right) - 5\left(\sqrt{x-2} - 3\right) = 0$$

$$\left(\sqrt{x-3} - 5\right)\left(\sqrt{x-2} - 3\right) = 0$$

1) $\sqrt{x-3} = 5$

   $x = 28$

2) $\sqrt{x-2} = 3$

   $x = 11$

Ответ: {11;28}

Дополнительные методы решения иррациональных уравнений:

- **метод «пристального взгляда» (метод анализа уравнения);**
- **использование монотонности функции;**
- **переход к уравнению с модулем.**

Метод анализа уравнения

Свойства корней, которые используют при решении уравнений данным способом:

1. Все корни четной степени являются арифметическими, то есть если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла; если подкоренное выражение равно нулю, то корень так же равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то значение корня положительно.

2. Все корни нечетной степени определены при любом значении подкоренного выражения.

3. Функции $y = \sqrt[2n]{x}$ и $y = \sqrt[2n+1]{x}$

являются возрастающими в своей области определения.

Пример №15 $\sqrt{x+1}+\sqrt{20}=\sqrt{5}$

$$\sqrt{x+1}=-\sqrt{5}$$

Арифметический корень не может быть отрицательным числом, поэтому уравнение решений не имеет.

Пример №16 $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+9}=4$

$$\sqrt{x^2+4}\geq 2$$

$$\sqrt{x^2+9}\geq 3$$

Уравнение не имеет решений.

Пример №17 $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x^2+5} = 1$

$$x^2 + 1 < 2x^2 + 5$$

Уравнение не имеет решений.

Пример №18 $\sqrt{4-x} - \sqrt{x-6} = 2$

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x - 6 \geq 0 \end{cases} => \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

Уравнение не имеет решений.

Метод использования монотонности функции

Использование монотонности функций, входящих в уравнение, нередко значительно упрощают техническую часть решения.

Сформулируем два свойства монотонных функций:

1. Сумма возрастающих (убывающих) функций – функция возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.

2. Разность возрастающей и убывающей (соответственно, убывающей и возрастающей) функций – функция возрастающая (убывающая) на их общей области определения.

Метод использования монотонности функций

<u>Теорема о корне</u>

Пусть $y=f(x)$ – монотонная на некотором промежутке функция. Тогда при любом значении a уравнение $f(x)=a$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Пример №19 Решите уравнение: $\sqrt{37x+12}-\sqrt{31-6x}=2.$

Ответ: {1}

Пример №20

Решите уравнение: $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8.$

Ответ: {10}

Пример №21

Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[9]{x-6}=6.$$

Ответ: {7}

Метод перехода к уравнению с модулем

<u>Пример №22</u> Найти наибольший корень уравнения

$$\sqrt{x^2 + 12x + 36} = x^2 - 36$$

$$\sqrt{(x+6)^2} = x^2 - 36$$

$$|x+6| = x^2 - 36$$

1) $\begin{cases} x + 6 < 0 \\ -x - 6 = x^2 - 36 \end{cases}$

$$\begin{cases} x < -6 \\ x^2 + x - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -6 \\ x = 7 \\ x = -6 \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x + 6 \geq 0 \\ x + 6 = x^2 - 36 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ x^2 - x - 42 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ x = -6 \\ x = 5 \end{cases}$$

Ответ: наибольший корень уравнения $x = 7$.

Пример №23

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 2$$

$$\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} = 2$$

$$\left|\sqrt{x+1}+1\right| + \left|\sqrt{x+1}-1\right| = 2$$

$$\sqrt{x+1}+1+\left|\sqrt{x+1}-1\right| = 2$$

1) $\begin{cases} \sqrt{x+1}-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2\sqrt{x+1} = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} \geq 1 \\ x \geq -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 0$$

2) $\begin{cases} \sqrt{x+1}-1 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2 = 2 \text{ (верно)} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} < 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x \in [-1; 0)$$

Ответ: $x \in [-1; 0]$

Пример №24

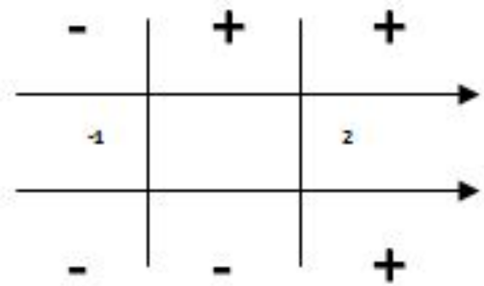
При каких значениях k уравнение имеет два корня?

$$|x+1| + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = k$$

$$|x+1| + |x-2| = k$$

$$x = -1$$

$$x = 2$$



$$\begin{cases} x < -1 \\ -x - 1 - x + 2 = k \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ x + 1 - x + 2 = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 2 \\ x + 1 + x - 2 = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x = \dfrac{1-k}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ k = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 2 \\ x = \dfrac{k+1}{2} \end{cases}$$

Условия существования двух корней:

$$\begin{cases} k \ne 3 \\ \dfrac{1-k}{2} < -1 \\ \dfrac{k+1}{2} \ge 2 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} k \ne 3 \\ k > 3 \\ k \ge 3 \end{cases} \quad => \quad k > 3$$

Ответ: при $k > 3$ уравнение имеет два корня.