Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением (ДУ)?

Уравнение, содержащее производные искомой функции или её дифференциалы.

2. Какие из следующих уравнений являются ДУ и почему?

1) $3^y + y = 3$ $\boxed{2)}\, yy' + 2 = 0$ $\boxed{3)}\, y^2 + y'' = y$ 4) $2y^2 + 3y = 0$

$\boxed{5)}\, \dfrac{ds}{dt} = 3t^2 + t - 1$ 6) $2x^2 + 3x = 0$

3. Что значит решить ДУ?

Найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в верное равенство.

4. Какое решение ДУ называется общим?

Решение, содержащее постоянную С.

5. Определите порядок следующих ДУ:

1) $y' + \frac{2y}{x} = x^2, x \neq 0$ 2) $\frac{ds}{dt} = 3t^2 + t - 1$ 3) $y'' - 3y' + y = x$

4) $y'' + y''' = y'$ 5) $\frac{d^2s}{dt^2} = t + 1$

6. Как называется уравнение вида: $f(x)dx + g(y)dy = 0$

Уравнение с разделёнными переменными

7. Как называется уравнение вида: $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$

Уравнение с разделяющимися переменными

Уравнение вида $\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – функции, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка.***

Уравнение называется ***линейным***, так как искомая функция y и её производная ***y’*** входят в это уравнение в ***первой степени***.

Линейное ДУ первого порядка называется **однородным**, если фун $Q(x) = 0$.

Линейное ДУ первого порядка называется **неоднородным**, если функция $Q(x) \neq 0$.

Какие из данных уравнений являются линейными уравнениями первого порядка, а какие нет и почему?

1) $y' + \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

2) $y'' + 2xy = 0$

3) $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = (x-3)^2$

4) $xy' + 5y = 10x$

Линейное однородное ДУ первого порядка

$$\boxed{y' + P(x)y = 0}$$

Решите уравнение $y' + y\sin x = 0$

Решение: $y' = \dfrac{dy}{dx}$ *(Выразите производную функции через дифференциалы)*

$\dfrac{dy}{dx} + y\sin x = 0$ *(Подставьте дифференциалы в данное уравнение)*

$\dfrac{dy}{dx} = -y\sin x \; \Big| \; \dfrac{dx}{y}$ *(Разделите переменные)*

$\dfrac{dy}{y} = -\sin x dx$ *(Проинтегрируйте)*

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln x + C}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx$$

$$\boxed{\int \sin x \, dx = -\cos x + C}$$

$\ln y = \cos x + C$ $\quad \ln y = \cos x \ln e + \ln C$

$y = e^{\cos x} \cdot C$ (общее решение)

Линейное однородное ДУ первого порядка

$$\boxed{y' + P(x)y = 0}$$

Решите уравнение

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

Решение:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Big| \quad \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln x + C}$$

$$\ln y = \ln x + C$$

$$\ln y = \ln x + \ln C$$

$$\ln y = \ln x \cdot C$$

$$\boxed{y = Cx}$$ (общее решение)

Линейное неоднородное ДУ $\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$
(Метод Иоганна Бернулли)

Алгоритм:

Решите уравнение

$$y' - \frac{3}{x}y = x.$$

1. Выполните замены в уравнении:

$$y = U \cdot V$$

$$y' = U'V + V'U$$

$$\underbrace{U'V + V'U}_{y'} - \frac{3}{x}\underbrace{U \cdot V}_{y} = x$$

2. Вынесите за скобку U из 2 и 3 слагаемых:

$$U'V + V'\boxed{U} - \frac{3}{x}\boxed{U} \cdot V = x$$

$$U'V + U \cdot \left(V' - \frac{3}{x}V\right) = x \qquad (***)$$

3. Приравняйте скобку к 0

$$\left(V' - \frac{3}{x}V\right) = 0$$

$$V' - \frac{3}{x}V = 0$$

4. Решите однородное линейное ДУ первого порядка

$$\frac{dV}{dx} - \frac{3V}{x} = 0$$

Выразите производную функции через дифференциалы

$$\frac{dV}{dx} = \frac{3V}{x}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{3dx}{x}$$

Разделите переменные

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int \frac{dV}{V} = 3\int \frac{dx}{x}$$

Проинтегрируйте

$$\ln|V| = 3\ln|x| + C$$

C=0, ввиду произвольности в выборе v

$$\ln|V| = 3\ln|x|$$

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

$$\boxed{V = x^3}$$

Подстави м $\boxed{V = x^3}$ **В** **(***)**

$$U'V + U \cdot \underbrace{\left(V' - \frac{3}{x}V\right)}_{0} = x$$

$$U' \cdot x^3 = x \quad \Big| \; \frac{1}{x^3}$$

$$U' = x^{-2}$$

5. Решите ДУ

$$U' = \frac{dU}{dx}$$

Выразите производную функции через дифференциалы

$$\frac{dU}{dx} = x^{-2} \quad \Big| \cdot dx$$

$$dU = \frac{1}{x^2}dx$$

Разделите переменные

$$\int dU = \int \frac{dx}{x^2}$$

Проинтегрируйт е

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C}$$

$$\boxed{U = -\frac{1}{x} + C}$$

постоянную С писать обязательно

$$y = U \cdot V$$

$$\boxed{V = x^3}$$

$$\boxed{U = -\frac{1}{x} + C}$$

6. Запишите общий вид решения:

$$\boxed{y = \left(C - \frac{1}{x} \right) x^3}$$

Домашнее задание

Решите уравнения:

1. $yy' + 2 = 0, \quad y(0) = 2.$ Ответ: $y = 2\sqrt{1 - x}.$

2. $xy' - y = x^2 \cos x.$ Ответ: $\mathrm{y = x(\sin x + C)}.$