

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением (ДУ)? **Уравнение, содержащее производные искомой функции или её дифференциалы.**

2. Какие из следующих уравнений являются ДУ и почему?

1) $3^y + y = 3$ **2)** $yy' + 2 = 0$ **3)** $y^2 + y'' = y$ 4) $2y^2 + 3y = 0$

5) $\frac{ds}{dt} = 3t^2 + t - 1$ 6) $2x^2 + 3x = 0$

3. Что значит решить ДУ?

Найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в верное равенство.

4. Какое решение ДУ называется общим?

Решение, содержащее постоянную C.

5. Определите порядок следующих

ДУ:

$$1) y' + \frac{2y}{x} = x^2, x \neq 0 \quad 2) \frac{ds}{dt} = 3t^2 + t - 1 \quad 3) y'' - 3y' + y = x$$

$$4) y'' + y''' = y'$$

$$5) \frac{d^2s}{dt^2} = t + 1$$

6. Как называется уравнение $f(x)dx + g(y)dy = 0$

вида:

Уравнение с разделёнными
переменными

7. Как называется уравнение $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$

вида:

Уравнение с разделяющимися
переменными

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – функции, называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка**.

Уравнение называется **линейным**, так как искомая функция y и её производная y' входят в это уравнение в **первой степени**.

Линейное ДУ первого порядка называется **однородным**, если фун $Q(x) = 0$.

Линейное ДУ первого порядка называется **неоднородным**, если функция $Q(x) \neq 0$.

Какие из данных уравнений являются линейными уравнениями первого порядка, а какие нет и почему?

$$1) \quad y' + \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

$$2) \quad y'' + 2xy = 0$$

$$3) \quad \frac{dy}{dx} + xy^2 = (x-3)^2$$

$$4) \quad xy' + 5y = 10x$$

Линейное однородное ДУ первого порядка

$$y' + P(x)y = 0$$

Решите уравнение $y' + y \sin x = 0$

Решени

е: $y' = \frac{dy}{dx}$ (Выразите производную функции через дифференциалы)

$\frac{dy}{dx} + y \sin x = 0$ (Подставьте дифференциалы в данное уравнение)

$\frac{dy}{dx} = -y \sin x$ | $\frac{dx}{y}$ (Разделите переменные)

$\frac{dy}{y} = -\sin x dx$ (Проинтегрируйте)

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$\ln y = \cos x + C$

$\ln y = \cos x \ln e + \ln C$

$y = e^{\cos x} \cdot C$ (общее решение)

Линейное однородное ДУ первого порядка

$$y' + P(x)y = 0$$

Решите
уравнение
Решение

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

е:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\ln y = \ln x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

$$\ln y = \ln x + \ln C$$

$$\ln y = \ln x \cdot C$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad | \quad \frac{dx}{y}$$

$$y = Cx \quad (\text{общее решение})$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Линейное неоднородное ДУ $y' + P(x)y = Q(x)$ (Метод Иоганна Бернулли)

Решите

Алгоритм: уравнение

1. Выполните замены в уравнении:

$$y' - \frac{3}{x}y = x.$$

$$y = U \cdot V$$

$$y' = U'V + V'U$$

$$\underbrace{U'V + V'U}_{y'} - \frac{3}{x} \underbrace{U \cdot V}_y = x$$

2. Вынесите за скобку U из 2 и 3 слагаемых:

$$U'V + V \boxed{U} - \frac{3}{x} \boxed{U} \cdot V = x$$

$$U'V + U \cdot \left(V' - \frac{3}{x}V \right) = x \quad (***)$$

3. Приравняйте скобку к 0

$$\left(V' - \frac{3}{x}V \right) = 0$$

$$V' - \frac{3}{x}V = 0$$

4. Решите однородное линейное ДУ первого

порядка

$$\frac{dV}{dx} - \frac{3V}{x} = 0$$

Выразите производную функции через дифференциалы

$$\frac{dV}{dx} = \frac{3V}{x}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{3dx}{x}$$

Разделите переменные

$$\int \frac{dV}{V} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

Проинтегрируйте

$$\ln|V| = 3 \ln|x| + C$$

$C=0$, ввиду произвольности в выборе V

$$\ln|V| = 3 \ln|x|$$

$$V = x^3$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Подстави $V = x^3$ в (***)

$$U' \cdot x^3 = x \quad | \quad \frac{1}{x^3}$$
$$U' = x^{-2}$$

5. Решите

$$DU = \frac{dU}{dx}$$

Выразите производную функции через дифференциалы

$$\frac{dU}{dx} = x^{-2} \quad | \cdot dx$$

$$dU = \frac{1}{x^2} dx$$

Разделите переменные

$$\int dU = \int \frac{dx}{x^2}$$

Проинтегрируйт
е

$$U = -\frac{1}{x} + C$$

**постоянную C писать
обязательно**

$$U'V + U \cdot \underbrace{\left(V' - \frac{3}{x}V \right)}_0 = x$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$y = U \cdot V$$

$$V = x^3$$

$$U = -\frac{1}{x} + C$$

6. Запишите общий вид решения:

$$y = \left(C - \frac{1}{x} \right) x^3$$

Домашнее задание

Решите

уравнения:

1. $yy' + 2 = 0, \quad y(0) = 2.$

Ответ: $y = 2\sqrt{1-x}.$

2. $xy' - y = x^2 \cos x.$

Ответ: $y = x(\sin x + C).$