Операции над множествами

Получения новых множеств из уже существующих

- **Объединением** множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами множества A или B:

  $$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

- **Пересечением** множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого являются элементами обоих множеств A и B:

  $$A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \& \ x \in B\}.$$

Выполняются включения $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

и $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Говорят, что два множества не пересекаются, если их пересечение – пустое множество.

- **Относительным дополнением** множества A до множества X называется множество $X \setminus A$ всех тех элементов множества X, которые не принадлежат множеству A:

  $X \setminus A = \{x \mid x \in X \ \& \ x \notin A\}$. (также называют разностью множеств X и A)
- **Симметрической разностью** множеств A и B называется множество $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- Когда фиксирован универсум U **абсолютным дополнением** множества A называется множество всех тех элементов x, которые не принадлежат множеству A:

  $A = \{ x \mid x \in U \ \& \ x \notin A\}$.

Заметим, что $A = U \setminus A$. Часто вместо A будем писать $\neg A$ или A' или $\bar{A}$.

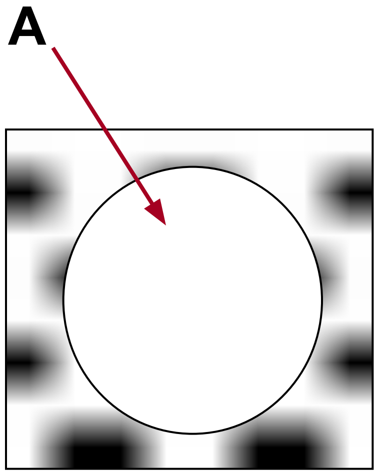
Диаграммы Эйлера

- Первым стал использовать теперь общепринятые обозначения операций над множествами **Джузеппе Пеано** (1888 г.).

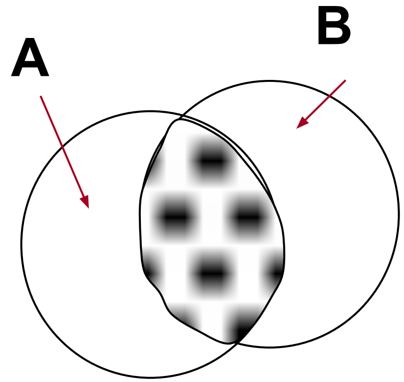
- Для наглядного представления отношений между подмножествами какого-либо универсума используются диаграммы Эйлера. В этом случае множества обозначают областями на плоскости и внутри этих областей условно располагают элементы множества.

- Часто все множества на диаграмме размещают внутри квадрата, который представляет собой универсум U.

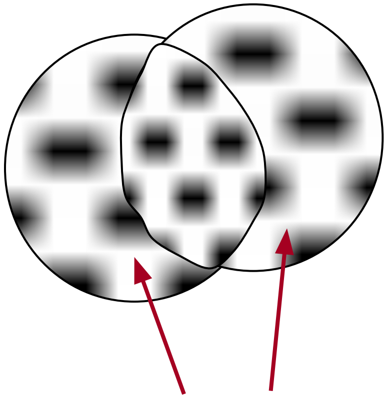
- Если элемент принадлежит более чем одному множеству, то на диаграмме области, отвечающие таким множествам, должны перекрываться, чтобы общий элемент мог одновременно находиться в соответствующих областях.



$\neg A$



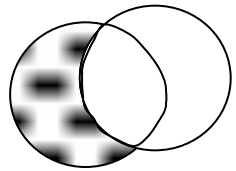
$A \cap B$



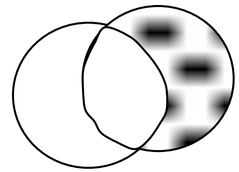
$A \cup B$

Это — диаграммы Эйлера

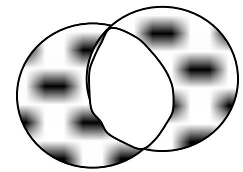
Диаграммы Эйлера (продолжение)



A\B



B\A



A÷B

- *Здесь не имеет значения относительный размер кругов либо других замкнутых областей, но лишь их взаимное расположение.*

- Такие диаграммы могут играть в логике лишь ту роль, что чертежи в геометрии: они иллюстрируют, помогают представить и доказать, но сами ничего не доказывают.
- Объединение, пересечение и дополнение обычно называются **булевскими операциями;**
- Выражения, составленные из множеств и булевских операций называются – **булевыми выражениями;**
- Значение такого **булева** выражения называют– **булевой комбинацией** входящих в него множеств;
- Равенство двух булевых выражений – **булевыми тождествами**.

Булевы тождества

Джордж Буль

Джордж Буль (англ.George Boole; 2 ноября 1815, Линкольн — 8 декабря 1864, Баллинтемпл, графство Корк, Ирландия) — английский математик и логик. Профессор математики Королевского колледжа Корка (ныне Университетский колледж Корк) с 1849. Один из основоположников математической логики. Разработал алгебру логики (булеву алгебру).

Теорема Для любых подмножеств *A*, *B* и *C* универсума *U* выполняются следующие основные булевы тождества:

1	$A \cup B = B \cup A$ (коммутативность $\cup$)	$A \cap B = B \cap A$ (коммутативность $\cap$)
2	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$)	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$)
3	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$)
4	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \mathrm{U} = A$
5	$A \cup \neg A = U$	$A \cap \neg A = \varnothing$
6	$A \cup A = A$ (идемпотентность $\cup$)	$A \cap A = A$ (идемпотентность $\cap$)

Булевы тождества (продолжение)

Теорема 4 (продолжение).

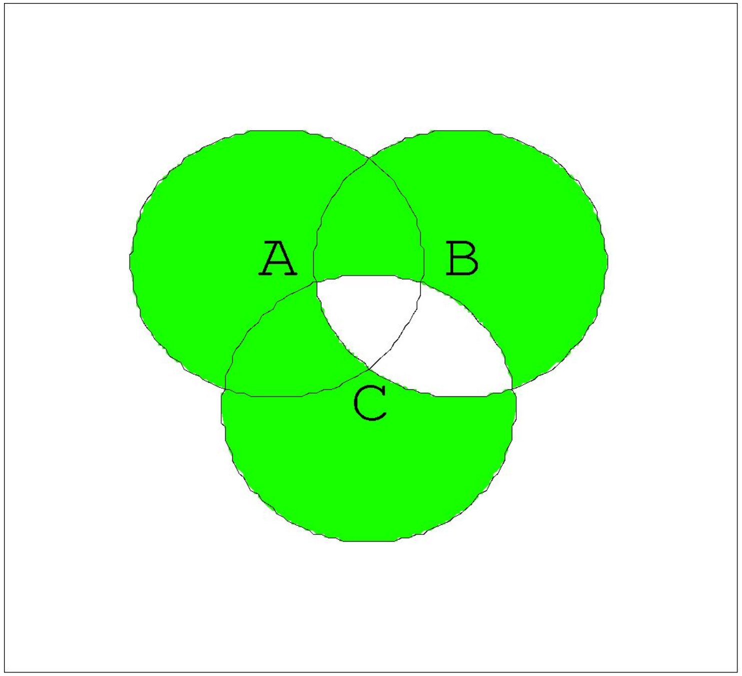
7	$A \cup U = U$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
8	$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ (закон де Моргана)	$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ (закон де Моргана)
9	$A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения)	$A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения)

10 $A \setminus B = A \cap \neg B$

Булевы выражения

Булевы выражения

1. $(A \cup B \cup C) \setminus (C \cap B) = (C \div B) \cup (A \setminus (A \cap B \cap C))$



Два способа

доказательства тождеств

С применением преобразований, основанных на законах булевой алгебры (равносильности булевой алгебры)

С применением понятий: множества, элемент множества, включение $\subset$, принадлежность $\in$

ДОКАЗАТЬ ТОЖДЕСТВА

Пример 1.

Доказатьтождество $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Решение.

Сначала покажем, что $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

***Действительно*, если $x \in A \cup (B \cap C)$, то $x \in A$ или $x \in B \cap C$.**

Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$.

Отсюда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Доказать тождества (самостоятельно)

I. С помощью диаграмм Эйлера

II. С помощью Булевых тождеств

Следующее утверждение докажите или опровергните (опровергнуть можно на частном примере с помощью диаграммы Эйлера:

1. $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$.
2. Найдите множество X, удовлетворяющее условию $A \cap X = \varnothing$ и $A \cup X = U$.

1. Проверить тождество $A \cup B = (A \div B) \div (A \cap B)$.
2. Проверить, что $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$.

Final