

Тема: Предел функции в точке и на бесконечности

Цели обучения:

10.4.1.8 – знать определение предела функции в точке и уметь вычислять его

10.4.1.9– знать определение предела функции на бесконечности и уметь вычислять его

Классическое определение предела функции на языке «Эпсилон-Дельта»

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , кроме, быть может самой точки x_0 .

Число A называют пределом функции в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ , что для всех x из δ – окрестности точки x_0 справедливо неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функций.

Формулировка теорем, когда $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$ аналогичны, поэтому будем пользоваться обозначением: $\lim f(x)$.

- ◆ Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов:

$$\lim [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x)$$

- ◆ Предел произведения двух функций равен произведению пределов:

$$\lim [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$$

- ◆ Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim f(x)$$

Основные теоремы о пределах

- ◆ Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} \quad (\lim f_2(x) \neq 0)$$

- ◆ Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

- ◆ Предел показательно – степенной функции:

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}$$

Способы вычисления пределов

- Непосредственной подстановкой.
- Разложение числителя и знаменателя на множители и сокращение дроби.
- Умножение на сопряженные выражения, с целью избавления от иррациональности.
- Деление на старшую степень.

Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \quad \frac{C}{\infty} = 0$$

Properties of Limits

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 4} x^2 = (4)^2 = 16$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 4} 5x = 5 \lim_{x \rightarrow 4} x = 5(4) = 20$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x}{\lim_{x \rightarrow \pi} x} = \frac{0}{\pi} = 0$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{e. } \lim_{x \rightarrow \pi} (x \cos x) = \left(\lim_{x \rightarrow \pi} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x \right)$$

$$= \pi(\cos \pi)$$

$$= -\pi$$

$$\text{f. } \lim_{x \rightarrow 3} (x + 4)^2 = \left[\left(\lim_{x \rightarrow 3} x \right) + \left(\lim_{x \rightarrow 3} 4 \right) \right]^2$$

$$= (3 + 4)^2$$

$$= 7^2 = 49$$



Упражнение 1

Вычислить значение предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x - 3)$$

Упражнение 2

Вычислить предел:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 3}{x - 1}$$

Упражнение 3

Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$$

$$\frac{C}{0} = \infty \quad \frac{C}{\infty} = 0$$



Упражнение 4

Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x + 3}{4x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{7x - 14}{21x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3x^3 - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 6)$$

Вычисление пределов

Часто при подстановке получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad 1^{\infty}; \quad 0^0; \quad 0^{\infty}; \quad \infty^0; \quad \infty - \infty$$

Эти выражения называются **неопределенности**, а вычисление пределов в этом случае называется **раскрытие неопределенности**.

Не удалось
разобраться
в теме

Остались
вопросы

Тема
раскрыта,
все
понятно