§25 Выясним зависимость между синусом и косинусом

Пусть точка М ед окр получена поворотом точки (1, 0) на угол a. Тогда по определению синуса и косинуса $x = \cos a$, $y = \sin a$. §25-29 составить конспект

Точка М принадлежит единой окр, поэтому ее координата $(x; y)$ удовлетворяют уравнению

1) $x^2 + y^2 = 1$ следовательно, $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ Проверочная с 166

из равенства (1) можно выразить $\sin a$ через $\cos a$ и $\cos a$ через $\sin a$:

2) $\sin a = \pm\sqrt{1 - \cos^2 a}$

3) $\cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a}$

Зависимость между тангенсом и котангенсом

$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$, $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$

перемножаем почленно

$\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} a = 1$

Зависимость между тангенсом и косинусом

$$\frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

§26 Доказать, что при $a \neq \pi k, k \in Z$ справедливо равенство

$$1 + ctg^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

по определению $ctg\, a = \frac{\cos a}{\sin a}$ и поэтому

$$1 + ctg^2 a = 1 + \frac{\cos^2}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a}$$

Эти преобразования верны т.к $\sin a \neq 0$ при $a \neq \pi k, k \in Z$.

§27

1) $\sin(-a) = -\sin a$

2) $\cos(-a) = \cos a$

$$tg(-a) = \frac{\sin(-a)}{\cos(-a)} = \frac{-\sin a}{\cos a} = -tg\, a$$

3) $tg(-a) = -tg\, a$

Формулы (1-2) справедливы при любом a, формула (3) при $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

можно показать, что если $a \neq \pi k, k \in Z$, то $ctg(-a) = -ctg\, a$

§28 Для любых a и B справедливо равенство

$$\cos(a+B)=\cos a\cos B-\sin a\sin B$$

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

$$(1-\cos(a-B))^2+(-\sin(a+B))^2=(\cos(-B)-\cos a)^2+(\sin(-B)-$$
$$-\sin a)^2$$

Преобразуем это равенство используя формулы (1) и (2) §27

$$1-2\cos(a+B)+\cos^2(a+B)+\sin^2(a+B)=\cos^2 B-2\cos$$
$$B\cos a+\cos^2+\sin^2 B+2\sin B\sin a+\sin^2 a$$

используем основное тригонометрическое тождество, получаем

$$2-2\cos(a+B)=2-2\cos a\cos B+2\sin a\sin B,$$

откуда $\cos(a+B)=\cos a\cos B-\sin a\sin B$

§29 Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения

1) $\sin 2a=\sin(a+a)=\sin a\cos a+\sin a\cos a=$

$=2\sin a\cos a$ и так

$$\sin^3 2a=2\sin a\cos a$$