

§ 15
Зависимость значений между синусом и косинусом

Пусть точка M с абсциссой x расположена поворотом точки $(1, 0)$

на угол α . Тогда по определению синуса и косинуса

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha.$$

Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее

координаты (x, y) удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{Аналогично, } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Из равенства (1) можно выразить $\sin \alpha$ через $\cos \alpha$

и $\cos \alpha$ через $\sin \alpha$:

$$1) \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$2) \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Зависимость между тангенсом и котангенсом

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

перемножив почленно

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Зависимость между тангенсом и косинусом

$$\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

§ 15-19
составил
mb
илюстри

Препод
автор
© 166

§26 Доказать, что при $a \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство

$$1 + \operatorname{ctg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

но определению $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$ и поэтому

$$1 + \operatorname{ctg}^2 a = 1 + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a}$$

Для любого действительного числа T , $k \in \mathbb{Z}$ и $a \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

§27

$$1) \sin(-a) = -\sin a$$

$$4) \cos(-a) = \cos a$$

$$\operatorname{tg}(-a) = \frac{\sin(-a)}{\cos(-a)} = \frac{-\sin a}{\cos a} = -\operatorname{tg} a$$

$$3) \operatorname{ctg}(-a) = -\operatorname{ctg} a$$

Применяя (1-4) к определению тангенса a , получим (3)

при $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

можно показать, что если $a \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ctg}(-a) = -\operatorname{ctg} a$

§ 28. Да покажем, что $\cos(a+b)$ справедливо равенство

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Используя формулы разности синусов

и косинусов, найдем

$$(1 - \cos(a-b))^2 + (-\sin(a+b))^2 = (\cos(a-b) - \cos a)^2 + (\sin(a-b) - \sin a)^2$$

Преобразуем это равенство используя

формулы (1) и (2) § 27

$$1 - 2\cos(a+b) + \cos^2(a+b) + \sin^2(a+b) = \cos^2 b - 2\cos$$

$$b \cos a + \cos^2 a + \sin^2 a + 2\sin b \sin a + \sin^2 a$$

Используем основное тригонометрическое

тождество, найдем

$$2 - 2\cos(a+b) = 2 - 2\cos a \cos b + 2\sin a \sin b,$$

$$\text{Отсюда } \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

§ 29. Введем формулы синуса и косинуса

двойного угла, используя формулы сложения

$$1) \sin 2a = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a =$$

$$= 2\sin a \cos a \quad \text{или}$$

$$\sin^2 a = 2\sin a \cos a$$