



Дисциплина:

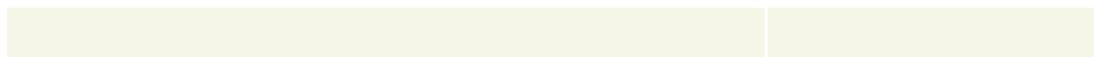
МАТЕМАТИКА

- Лектор: Ахкамова Юлия Абдулловна
- доцент кафедры математики и методики обучения математике ЮУрГГПУ
- akhkamovayua@cspu.ru

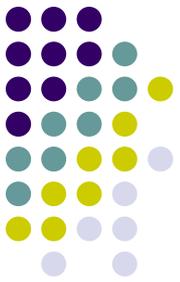


Учебный вопрос

**Статистическая проверка
гипотез**



ПОДВОПРОС



- **Основные понятия статистической проверки гипотез.**

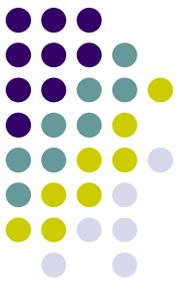


Статистической гипотезой называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

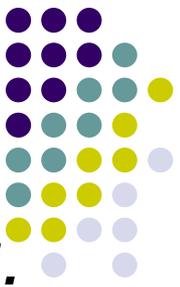
Примеры статистических гипотез:

- генеральная совокупность распределена по нормальному закону;
- генеральная совокупность распределена по закону Пуассона.

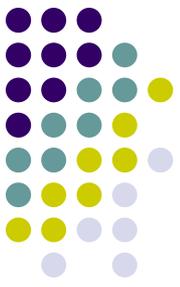
- Приведем примеры задач, которые могут быть решены с помощью проверки статистических гипотез:



- 1. *Используется два метода измерения одной и той же величины. Первый метод дает оценки этой величины, второй - . Требуется **определить, обеспечивают ли два метода измерения одной и той же величины одинаковую точность измерений.***



- **2.** *Контроль точности работы некоторой производственной системы. Получаемые характеристики выпускаемой продукции характеризуются некоторым разбросом (дисперсией). Обычно величина этого разброса не должна превышать некоторого заранее заданного уровня. Требуется **определить, обеспечивает ли система (например, линия сборки или отдельный станок) заданную точность.***



- **Нулевой гипотезой (основной)** называют **выдвинутую гипотезу** .
Основная гипотеза H_0 — это то утверждение, которое подлежит проверке.
- **Наряду с выдвинутой гипотезой всегда рассматривают и противоречащую ей гипотезу.** *Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то принимается противоречащая гипотеза.*



- **Альтернативной гипотезой** (конкурирующей) H_1 называют гипотезу, которая противоречит нулевой.
- *Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание нормального распределения равно 5, то альтернативная гипотеза, например, может состоять в предположении, что не равна 5.*



- Из генеральной совокупности проводят выборку объема n .

Для этой выборки вычисляют нужные характеристики.

- Формулируют две гипотезы: основную H_0 и альтернативную H_1 .

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки.



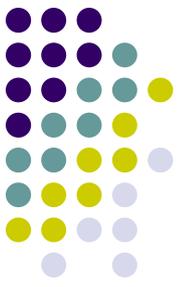
- В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях **может быть**

принято неправильное решение, т.е. могут быть допущены ошибки двух родов.

- **Ошибка первого рода** состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.
- **Ошибка второго рода** состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.



- *Следует отметить, что последствия ошибок могут оказаться различными. Если отвергнуто правильное решение "продолжать строительство жилого дома", то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение "продолжать строительство" несмотря на опасность обвала дома, то эта ошибка второго рода может привести к многочисленным жертвам. Иногда, наоборот, ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия. Вероятность совершения ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают α .*



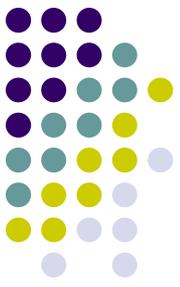
- *Следует отметить, что последствия ошибок могут оказаться различными. Если отвергнуто правильное решение "продолжать строительство жилого дома", то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение "продолжать строительство" несмотря на опасность обвала дома, то эта ошибка второго рода может привести к многочисленным жертвам. Иногда, наоборот, **ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия. Вероятность совершения ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают α .***



- *Если, например, принят уровень значимости 0,05, то это означает, что в пяти случаях из ста имеется риск допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу).*
- *Очень часто генеральная совокупность должна подчиняться некоторым параметрам. Например, фасовочная машина должна наполнять пакеты сахаром по 1 кг. Как узнать, действительно ли генеральная совокупность подчиняется этим ограничениям? С этой целью проводят испытания гипотез.*



- По результатам выборки вычисляется величина, называемая статистикой.
Формула для вычисления статистики зависит от вида решаемой задачи. **Значение статистики наносят на координатную ось.**



В зависимости от взаимного расположения значения статистики и граничных точек возможен один из трех вариантов:

- нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 ;
- отклоняется гипотеза H_0 (без всякой проверки принимается H_1);
- доказательство является неубедительным, нужно больше данных.

Опрос по учебному вопросу



- **Определение нулевой статистической гипотезы.**
- **Определение альтернативной статистической гипотезы.**
- **Определение доверительной вероятности (надежности). Ее обозначение?**
- **Определение уровня значимости. Ее обозначение? Каким его принимают?**

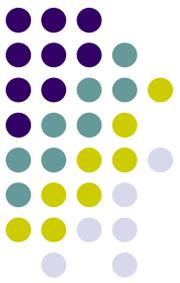
ПОДВОПРОС.



- **Критерий Пирсона
хи-квадрат. Примеры
задач.**



- **Критерий χ^2 применяется для определения** *связи между качественными признаками.* Также его можно применять для *определения сходства эмпирических распределений или для проверки гипотезы о совпадении эмпирического распределения с предсказанным теоретическим.* Например, с помощью критерия χ^2 можно *определить вероятность совпадения эмпирического распределения с нормальным.* Обычно χ^2 **используется, когда количество измерений больше или равно 40.**



Для определения количества интервалов (карманов) можно использовать следующее правило:

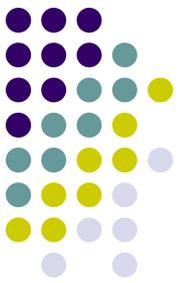
Если количество измерений n :

- **от 40 до 100, то рекомендуется выбрать от 7 до 9 интервалов;**
- **от 100 до 500, то рекомендуется выбрать от 8 до 12 интервалов;**
- **от 500 до 1000, то рекомендуется выбрать от 10 до 16 интервалов;**
- **1000 – 10000, то рекомендуется выбрать от 12 до 22 интервалов.**



Если есть интервалы с частотами
менее 5, то их необходимо
объединить с соседними
интервалами.

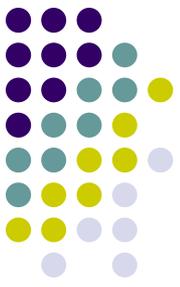
Величины интервалов классов
при этом подлежат пересчету,
переопределяются границы
классов от x_i до x_{i+1} .



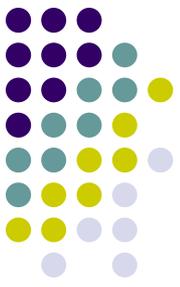
Вычисление статистики критерия хи-квадрат производится по формуле

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^c \frac{(n_i - np_i)^2}{p_i}$$

где $c=k$ – количество интервалов (после объединения), на которые можно разделить наши измерения, p_i - теоретические вероятности найденные по таблице или с помощью функции НОРМРАСП() программы Excel, а n – общее число наблюдений.



- **Параметры нормального распределения для расчета теоретических вероятностей вычисляются по эмпирическим частотам, т.к. мы не знаем истинных параметров генеральной совокупности.**



- *Пример* . Проводилось экспериментальное исследование по изучению влияния развлекательной телепередачи на молодежь. **Испытуемые пожелавшие принять участие в исследовании случайным образом были разделены на две группы экспериментальную (теоретическую) и контрольную.** Одним из параметров оценки влияния телепередачи служил показатель личностной тревожности. Результаты испытуемых контрольной и экспериментальной группы даны в таблице .





- **Вопрос: Можно ли утверждать, что полученные эмпирические данные подчиняются закону нормального распределения?**



Контрольная группа

Количество баллов	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	4	10	20	38	20	15	5	5

Экспериментальная группа

Количество баллов	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	7	7	15	30	23	17	12	5	5

n_i - Число испытуемых, набравших данное количество баллов

Проверим, действительно ли можно считать данные, полученные в контрольной группах, распределенными по нормальному закону.



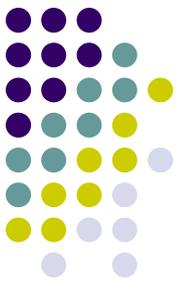
- **Разобьем данные на классы, частота которых себя не менее пяти измерений, для этого нам придется объединить испытуемых набравших 2 и 4 балла в один класс (в первый).**
- **Перепишем таблицу, указав интервалы классов.**



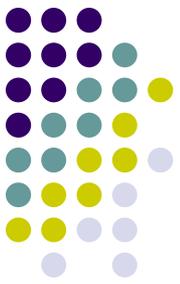
- Так в интервал от $[2;4)$ у нас попадает $2+4=6$ испытуемых.
- В интервал от $[4;5)$ попадает 10 испытуемых.
- И т.д. Проблемы возникают только с последним интервалом, а значит необходимо добавить интервал $[10;11)$.

На частоту попадания испытуемых в этот интервал это никак не скажется.

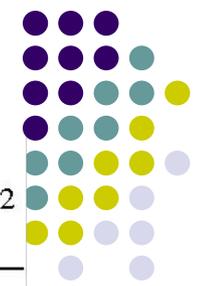
До объединения было 9 классов;



- Следует отметить, что последствия ошибок могут оказаться различными. Если отвергнуто правильное решение "продолжать строительство жилого дома", то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение "продолжать строительство" несмотря на опасность обвала дома, то эта ошибка второго рода может привести к многочисленным жертвам. Иногда, наоборот, **ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия. Вероятность совершения ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают α .**



- *Следует отметить, что последствия ошибок могут оказаться различными. Если отвергнуто правильное решение "продолжать строительство жилого дома", то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение "продолжать строительство" несмотря на опасность обвала дома, то эта ошибка второго рода может привести к многочисленным жертвам. Иногда, наоборот, ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия. Вероятность совершения ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают α .*



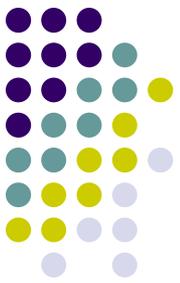
№	[$x_{i-1}; x_i$)	$p_i = \Phi\left(\frac{x_i - a}{h}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - a}{h}\right)$	n_i	$(n_i - np_i)$	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	[2;4)					
2	[4;5)					
3	[5;6)					
4	[6;7)					
5	[7;8)					
6	[8;9)					
7	[9;10)					
8	[10;11)					
	Сумма	-	-	-	-	$\chi^2_{эмп} =$

Сосчитаем общее число наблюдений, $n = 5 + 10 + 20 + 20 + 20 + 15 + 5 + 110 = 205$

Следует отметить, что последствия ошибок могут оказаться различными. Если отвергнуто правильное решение "продолжать строительство жилого дома", то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение "продолжать строительство" несмотря на опасность обвала дома, то эта ошибка второго рода может привести к многочисленным жертвам. Иногда, наоборот, ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия. Вероятность совершения ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают α .

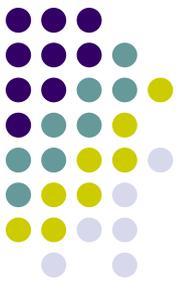


- *Следует отметить, что последствия ошибок могут оказаться различными. Если отвергнуто правильное решение "продолжать строительство жилого дома", то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение "продолжать строительство" несмотря на опасность обвала дома, то эта ошибка второго рода может привести к многочисленным жертвам. Иногда, наоборот, **ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия. Вероятность совершения ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают α .***



- *Следует отметить, что последствия ошибок могут оказаться различными. Если отвергнуто правильное решение "продолжать строительство жилого дома", то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение "продолжать строительство" несмотря на опасность обвала дома, то эта ошибка второго рода может привести к многочисленным жертвам. Иногда, наоборот, **ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия. Вероятность совершения ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают α .***

Задание на самоподготовку



- Необходимо отметить, что последствия ошибок могут различаться. Если отвергнуто правильное решение "продолжать строительство жилого дома", то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение "продолжать строительство" несмотря на опасность обвала дома, то эта ошибка второго рода может привести к многочисленным жертвам. Иногда, наоборот, ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия. Вероятность совершения ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают α .