Лекция № 4

Комплексные числа

Новый абстрактный объект: i — **мнимая единица**.

$$i \cdot i = i^2 = -1 \ , \quad i \notin \mathbf{R}$$

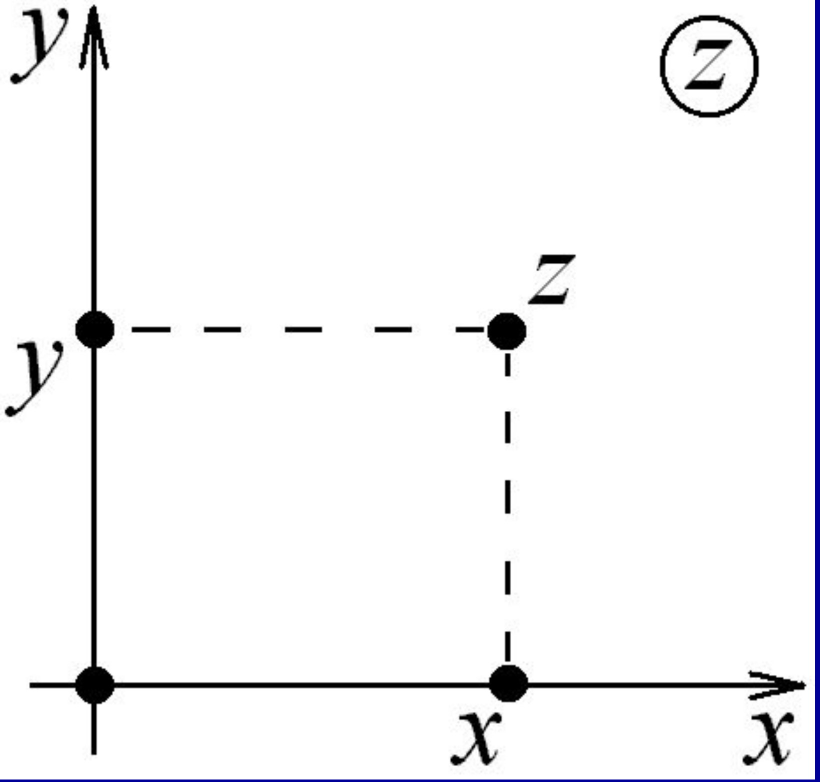
Пусть $x \in \mathbf{R}$ и $y \in \mathbf{R}$, тогда

$$z = x + i \cdot y = x + iy = < x, y > \ , \quad z \in \mathbf{C}$$

$z = x+iy$ — **алгебраическая форма** комплексного числа

$x = \operatorname{Re} z$ — **действительная часть** комплексного числа

$y = \operatorname{Im} z$ — **мнимая часть** комплексного числа



Если $y = 0$, то $z = x + i \cdot 0 = x$ — действительное число.

Множество действительных чисел **вложено** в множество комплексных чисел.

Множество комплексных чисел есть **расширение** множества действительных чисел .

Если $x = 0$, то $z = iy$ — **мнимое** число.

Если $x = y = 0$, то $z = 0$ — нуль комплексных чисел.

$x + i(-y) = x - iy = \bar{z}$ — **сопряженное** комплексное число

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi$$

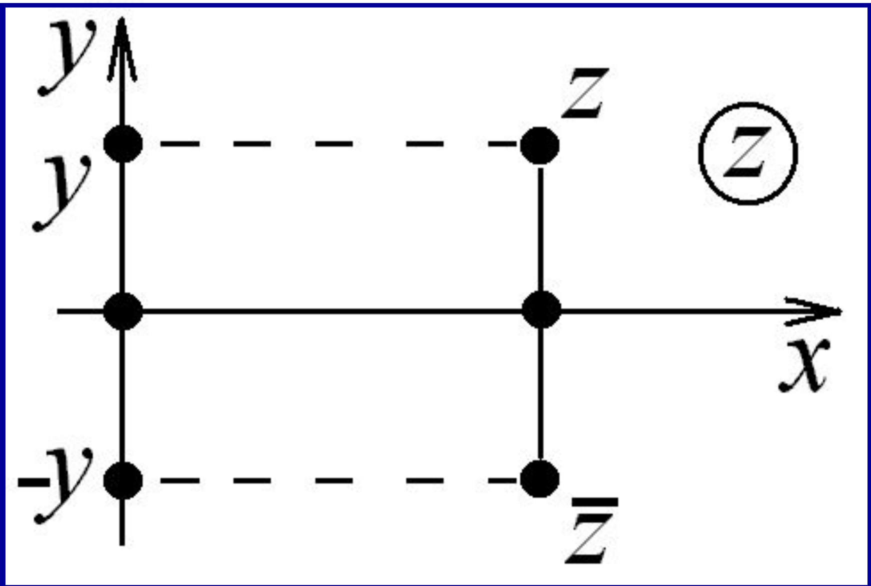
тригонометрическая форма комплексного числа:

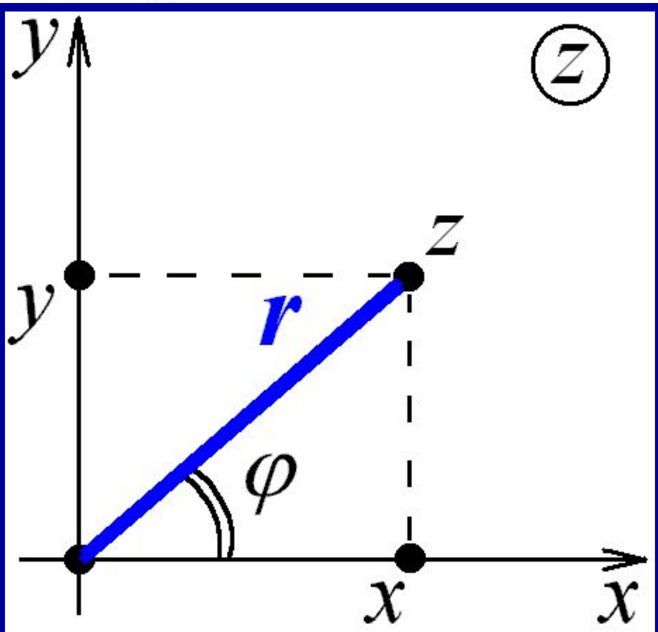
$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \geq 0$ — **модуль** комплексного числа

$\varphi = \arg z$ — **аргумент** комплексного числа

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,, \quad x \neq 0\,; \quad x = 0 \iff \varphi = \pm\frac{\pi}{2}\,; \quad \varphi = \arg z + 2\pi k$$





показательная форма комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$

$e^{i\varphi}$— пока не определена,
но имеет все свойства обычной экспоненты

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$ **формула Эйлера**

Арифметические операции над комплексными числами

По правилам обычной алгебры.
Пусть: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Равенство:

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \,\&\, y_1 = y_2 \iff r_1 = r_2 \,\&\, \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$$

2. Сложение, вычитание:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = x_3 + iy_3 = z_3$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = x_4 + iy_4 = z_4$$

3. Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$$

$$= \left[i^2 = -1 \right] = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) = x_5 + iy_5 = z_5$$

4. Деление: *числитель и знаменатель умножить на число, сопряженное знаменателю* и знаменатель должен быть отличен от нуля

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - i^2y_1y_2}{x_2^2 - i^2y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} + i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} = x_6 + iy_6 = z_6$$

$$|z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 \neq 0\ , \quad \text{т.е.} \quad z_2 \neq 0$$

Складывать, вычитать — легче в алгебраической форме.
Умножать, делить — легче в тригонометрической
или в показательной форме.

3. Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 \Bigg[\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Bigg] =$$

$$= r_1 r_2 \Bigg[\Big(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \Big) + i \Big(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \Big) \Bigg] =$$

$$= r_1 r_2 \Bigg[\cos\Big(\varphi_1 + \varphi_2\Big) + i\sin\Big(\varphi_1 + \varphi_2\Big) \Bigg] = r_5(\cos\varphi_5 + i\sin\varphi_5)$$

$$r_5 = r_1 r_2 \ ; \quad \varphi_5 = \varphi_1 + \varphi_2$$

При умножении модули перемножаются, аргументы складываются.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} =$$

$$r_1 r_2 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_5 e^{i\varphi_5}$$

При делении модули делятся, аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right] = r_6(\cos\varphi_6 + i\sin\varphi_6)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = r_6 e^{i\varphi_6}\ ;\quad r_6 = \frac{r_1}{r_2}\ ,\quad \varphi_6 = \varphi_1 - \varphi_2$$

5. Сравнение: среди комплексных чисел ввести понятия "больше", "меньше" так, чтобы согласовать эти операции с арифметическими — **нельзя**.

Формула Муавра

$$z^2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

$$z^3 = z^2\cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

$$z^n = z^{n-1}\cdot z = r^{n-1}\left[\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi\right]\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad \textbf{формула Муавра}}$$

Корень n-ой степени из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = w \ , \quad z \in \mathbf{C} \ , \quad w \in \mathbf{C} \ : \quad w^n = z$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ ; \quad w = R(\cos\psi + i\sin\psi)$$

r, φ — заданы; R, ψ — надо найти.

$$w^n = R^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$R^n = r \ ; \quad n\psi = \varphi + 2\pi k \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt[n]{r} \ , \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$$

причем $\sqrt[n]{r}$ — арифметический корень из неотрицательного числа.

$$k=0\ :\ \ \psi_0=\frac{\varphi}{n}\ ;\ \ k=1\ :\ \ \psi_1=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}$$

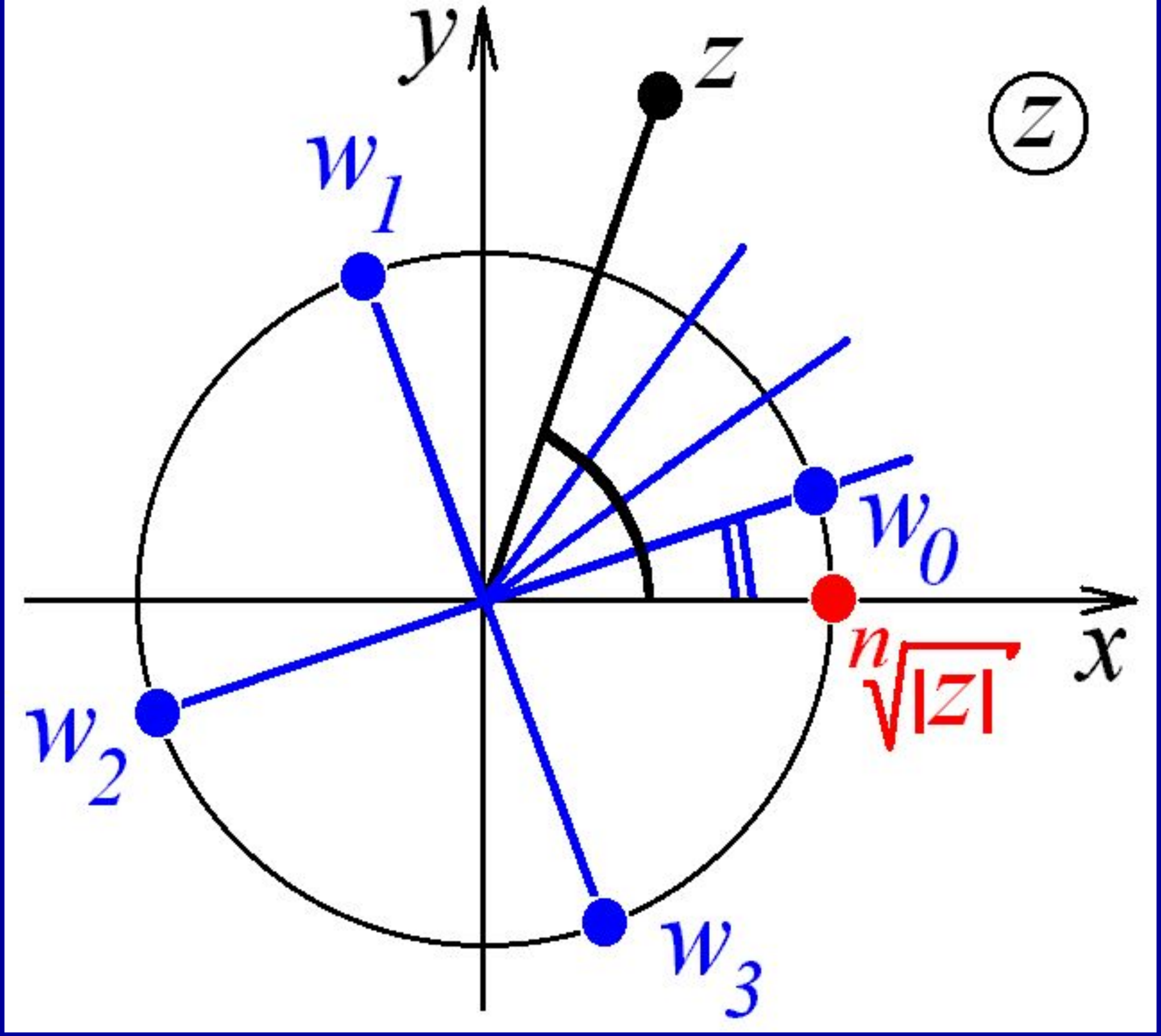
$$k=n-1\ :\ \psi_{n-1}=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}(n-1)\ ;\ \ k=n\ :\ \psi_n=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}n=\psi_0$$

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right]$$

где

$$k=0,1,2,...,n-1$$

Таким образом, $\sqrt[n]{z}$ имеет n штук разных ответов, у которых модули равны, а аргументы отличаются на $2\pi/n$.



y
z
z
w1
w0
x
$\sqrt[n]{|z|}$
w2
w3

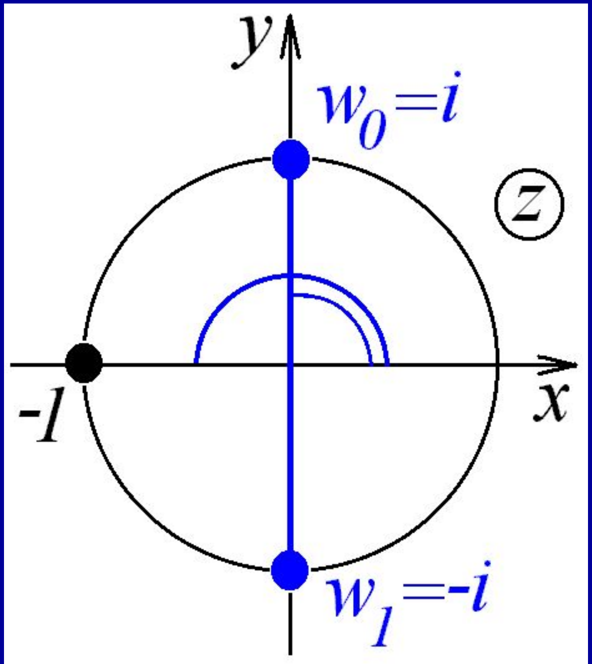
Пример. Найти $\sqrt{-1}$.

$$-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)\ ;\quad |-1| = 1\ ,\quad \arg(-1) = \pi$$

$$R = \sqrt{1} = 1\ ;\ \psi_0 = \frac{\pi}{2}\ ,\quad \psi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$w_0 = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i\ ;\quad w_1 = 1 \cdot (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -i$$

$$\boxed{\sqrt{-1} = \pm i}$$



Основная теорема алгебры

$$P_2(z) = az^2 + bz + c\,; \;\; P_2(z_*) = 0 \iff z_* \;\; \text{— корень многочлена}$$

$$D = b^2 - 4ac \geq 0 \implies z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D < 0 \implies D = (-1)|D|\,; \quad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}\sqrt{-1}}{2a}$$

$$D < 0 \implies z_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|D|}}{2a}$$

$$P_2(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Теорема. *Любой многочлен n-ой степени*

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

имеет хотя бы один корень среди комплексных чисел, т.е. существует z_1 такой, что

$$P_n(z_1) = 0\ ; \quad P_n(z) = a_n(z - z_1)Q_{n-1}(z)$$

Следствие основной теоремы алгебры. *Любой многочлен n-ой степени*

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

среди комплексных чисел имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность, т.е. существуют z_1, z_2, ... z_n такие, что

$$P_n(z_k) = 0\,,\ k = 1, 2, \ldots, n\ ;\ \ P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdot\ldots\cdot(z - z_n)$$

Например, у многочлена $P_n(z) = (z - z_1)^n$ один корень z_1, но кратность этого корня равна n.

"ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ"

Очень большой и очень важный раздел математики. Решение большого количества прикладных задач из: физики, теоретической механики, электротехники, сопротивления материалов, гидравлики, механики жидкости и газа, электроники, биологии, экономики и т.д. и т.п.

Определение. Уравнение, содержащее независимые переменные, неизвестную функцию и производные от неизвестной функции называется **дифференциальным уравнением**.

Определение. Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция зависит только от одной независимой переменной, то такое уравнение называется **обыкновенным** дифференциальным уравнением.

Определение. Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция зависит от двух или от большего числа независимых переменных, то такое уравнение называется уравнением **с частными производными**.

Определение. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Пример. *Найти скорость, с которой опускается груз на парашюте.*

В соответствии со вторым законом Ньютона

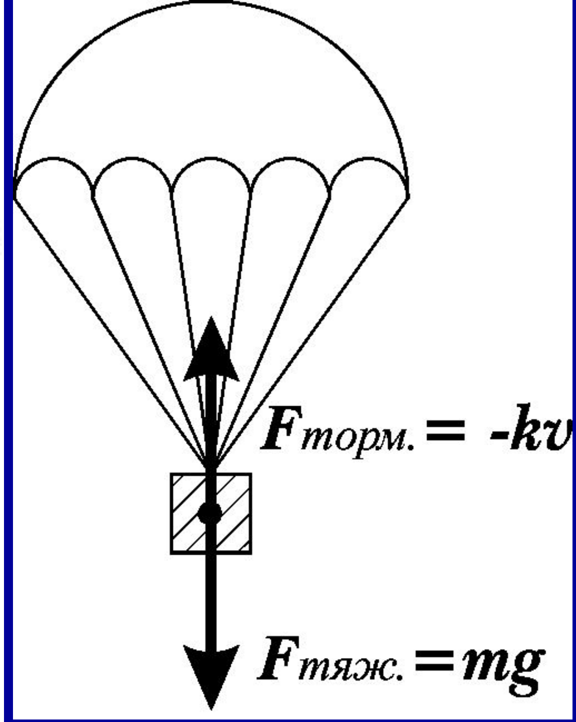
$$\boxed{ma = F}$$

m – масса ; $a = \dfrac{dv}{dt}$ – ускорение ; F – сила

$$F = F_{\text{тяг.}} + F_{\text{торм.}}$$

$$F_{\text{тяг.}} = mg\ ; \qquad F_{\text{торм.}} = -kv$$

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = mg - kv \qquad (1)}$$



$v = v(t)$ – неизвестная функция;

t – независимая переменная;

k, m, g – заданные константы;

(1) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

Решение:

$$v(t) = Ce^{-kt/m} + \frac{mg}{k}\ , \quad C = \text{const}\ .$$

Непосредственная подстановка в уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = Ce^{-kt/m}\left(-\frac{k}{m}\right)$$

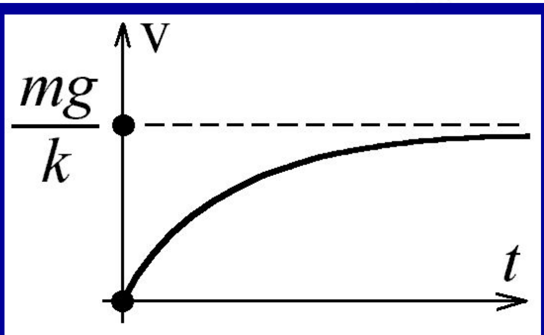
$$mCe^{-kt/m}\left(-\frac{k}{m}\right) = mg - k\left(Ce^{-kt/m} + \frac{mg}{k}\right) \text{ – тождество!}$$

Решений бесчисленное множество, т.к.

C – произвольная константа

$$C\ :\quad v(t)\big|_{t=0} = 0 \implies 0 = Ce^0 + \frac{mg}{k} \implies C = -\frac{mg}{k}$$

$$v(t) = -\frac{mg}{k}e^{-kt/m} + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$



$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{k}$$

Дифференциальное уравнение 1-го порядка. Общее и частное решение.

Определение. Уравнение
$$\boxed{F(x, y, y') = 0 \qquad (2)}$$
которое связывает: независимую переменную x, неизвестную функцию $y = y(x)$ и производную y' неизвестной функции – называется **обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка**.

Определение. Уравнение
$$\boxed{y' = f(x, y) \qquad (3)}$$
называется дифференциальным уравнением **в нормальной форме** или **в нормальном виде**.

В этом случае также говорят, что **уравнение разрешено относительно производной**.

Переход от вида (2) к виду (3): не надо **решать**, а надо только **переписать** уравнение в другом виде.

Пример. $xy' - y = 0$; $y' = \dfrac{y}{x}$ нормальная форма

$$F(x, y, y') = xy' - y \ , \quad f(x, y) = \frac{y}{x}$$

Определение. **Решением** дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x)$, которая обращает это уравнение в тождество $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ или $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$, т.е. в равенство, справедливое при всех допустимых значениях аргумента.

Определение. График функции $y = \varphi(x)$ называется **интегральной кривой** дифференциального уравнения.

Определение. Если у дифференциального уравнения найдено одно решение, то его называют **частным** решением.

Определение. Если все решения дифференциального уравнения удалось записать одной формулой: $y = \varphi(x, C)$, то говорят, что найдено **общее** решение. В общее решение дифференциального уравнения первого порядка входит одна произвольная постоянная.

Для $xy' - y = 0$: $y = x$ частное решение

$y = Cx$ – общее решение

$y = \varphi(x, C)$ является общим решением, если:

1) при любом допустимом конкретном значении константы $C = C_o$ функция $y = \varphi(x, C_o)$ является решением;
2) для частного решения $y = \varphi_1(x)$ можно подобрать $C = C_1$, что $y = \varphi(x, C_1)$ совпадает с $y = \varphi_1(x)$.

Определение. Если частное решение найдено в неявном виде

$$\Phi(x, y) = 0 ,$$

то его называют **частным интегралом** исходного дифференциального уравнения. Если в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

найдено общее решение, то его называют **общим интегралом**.

Определение. Если решение дифференциального уравнения записано с помощью неопределённых интегралов

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy + C = 0 ,$$

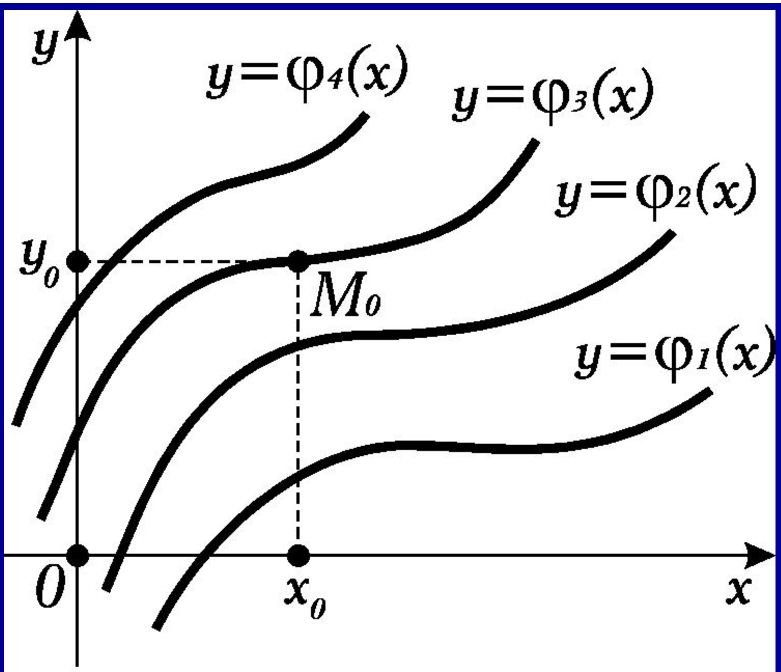
то говорят, что решение найдено **в квадратурах**.

Задача Коши

Определение. **Задача Коши** или **задача с начальными данными**: найти такое частное решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения, которое удовлетворяет ещё и заданному **начальному условию** $\varphi(x_o) = y_o$, т.е. в заданной точке $x = x_o$ решение принимает заданное значение y_o.

Задача Коши,
задача с начальными условиями
x_o, y_o– заданные числа

$$\boxed{\begin{cases} y' = f(x,y)\ , \\ y|_{x=x_o} = y_o \end{cases} \qquad (4)}$$



Теорема **о существовании и единственности решения у задачи Коши.** Рассмотрим задачу (4) – задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, записанного в нормальном виде. Если функция $f(x, y)$ – правая часть дифференциального уравнения и функция $f'_y(x, y)$ – её производная по переменной "y" определены и непрерывны в некоторой области (D), содержащей точку $M_o(x_o, y_o)$, то у задачи Коши (4) существует, причем единственное, решение.

Следствие теоремы. *Если на плоскости xOy найдена такая область (D), в которой непрерывны функции $f(x, y), f'_y(x, y)$, то тогда через любую точку области (D) проходит интегральная кривая рассматриваемого дифференциального уравнения, причем, только одна. Поэтому, в частности, интегральные кривые уравнения (3) в области (D)* **не пересекаются.**

Для дифференциального уравнения

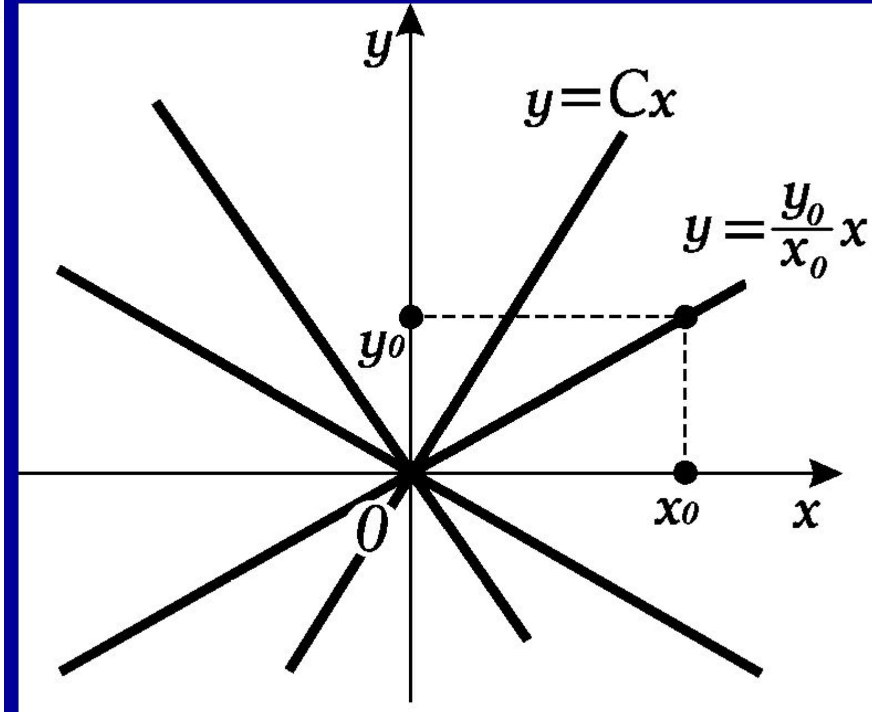
$$y' = \frac{y}{x}$$

$$f(x,y) = \frac{y}{x}\ ; \quad f'_y(x,y) = \frac{1}{x}\ ; \quad x \neq 0$$

$$(D)\ :\ \ \mathbf{R}^2 \setminus Oy$$

$$\forall M_o(x_o, y_o)\ :\ \ x_o \neq 0 \ \ \Longrightarrow$$

$y = \dfrac{y_o}{x_o}x$ частное решение



Определение. Точка $M_*(x_*, y_*)$, для которой не выполняется теорема называется **особой точкой** рассматриваемого дифференциального уравнения.

Для уравнения $y' = y/x$ вся ось $x=0$ состоит из особых точек.

Дифференциальные уравнения 1 порядка, интегрируемые в квадратурах

$$F(x, y, y') = 0 \text{ или } y' = f(x, y) \ .$$

1. Уравнение с **разделяющимися переменными**: $f_1(y) \cdot y' = f_2(x)$.
2. Уравнение с **однородной правой частью**: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
3. **Линейное** уравнение: $a_1(x)y' + a_o(x)y = b(x)$.

Конечно же, этими тремя случаями не исчерпываются все уравнения первого порядка, для которых существуют способы построения решений.

1. Уравнение с разделяющимися переменными.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением **с разделяющимися переменными**, если оно может быть представлено в виде

$$f_1(y) \cdot y' = f_2(x)$$

Производная y' представляется как отношение дифференциалов: $y' = dy/dx$

$$f_1(y) \cdot \frac{dy}{dx} = f_2(x)$$

затем обе части умножаются на dx: $f_1(y)dy = f_2(x)dx$

переменные **разделились**

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx \quad \text{– решение в квадратурах}$$

Если удастся записать через элементарные функции

$$\Phi_1(y) = \Phi_2(x) + C$$

общий интеграл.

Если удастся в явном виде выразить одну переменную через другую

$$y = \varphi(x, C) \quad \text{или} \quad x = \psi(y, C)$$

общее решение.

Чтобы получить решение дифференциального уравнения, часто меняют ролями переменные x и y, т.е. x считается искомой функцией от независимой переменной y.

Пример. *Решить дифференциальное уравнение*

$$(xy + x)y' = xy + y \ .$$

$$x(y+1)\frac{dy}{dx} = y(x+1) \ ; \quad \frac{y+1}{y}dy = \frac{x+1}{x}dx$$

$$\int \frac{y+1}{y}dy = \int \frac{x+1}{x}dx \ , \quad \int \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

Окончательно:

$$y + \ln|y| = x + \ln|x| + C$$

общий интеграл.

2. Уравнение первого порядка с однородной правой частью.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка, записанное в нормальной форме (т.е. разрешённое относительно y'), называется **с однородной правой частью**, если правая часть дифференциального уравнения есть функция, зависящая только от дроби y/x, т.е.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Вводится новая неизвестная функция

$$u(x) = \frac{y}{x}\ , \quad \text{т.е.} \quad y = u(x) \cdot x$$

Тогда

$$y' = (ux)' = u'x + ux' = u'x + u\ ; \quad u'x + u = f(u)$$

Переменные разделяются:

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u) \ , \quad \frac{du}{dx}x = f(u) - u \ , \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}\,; \quad F(u)+C_1 = \ln|x|+C_2\,; \quad F(u) = \ln|x|+C$$

где $C = C_2 - C_1$. Теперь возвращение к исходным переменным:

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C$$

найден общий интеграл.

Делили на разность $f(u) - u$, т.е. предполагали $f(u) - u \neq 0$.

Если есть значение $u = u_o =$const: $f(u_o) = u_o$, то

$$y = u_o x \ \text{ – тоже решение исходного уравнения.}$$

Пример. *Решить дифференциальное уравнение*

$$xyy' = x^2 + y^2 \ ; \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \ , \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Замена $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u \ , \quad \text{т.е.} \quad \frac{du}{dx}x = \frac{1}{u} \ , \quad udu = \frac{dx}{x}$$

Следовательно,

$$\int udu = \int \frac{dx}{x} \, , \ \ \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C \ , \ \ \frac{1}{2}u^2 = \ln(C_1 x) \ , \text{ где } C = \ln C_1$$

Вернуться к старой переменной y:

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln(C_1 x) \ , \quad y^2 = 2x^2 \ln(C_1 x) \ , \quad y = \pm x\sqrt{2\ln(C_1 x)}$$

3. Линейное уравнение первого порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$a_1(x)y' + a_o(x)y = f(x) \ ,$$

называется **линейным**. Заданные функции: $a_1(x)$, $a_o(x)$ – коэффициенты уравнения, $f(x)$ – правая часть ("неоднородность") уравнения.

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения a_1, a_o зависит от переменной x, то уравнение
с переменными коэффициентами.

Если оба коэффициента a_1, a_o постоянны, то
с постоянными коэффициентами.

Если функция $f(x)$ есть тождественный ноль, то уравнение называется **линейным однородным**. В противном случае – **линейным неоднородным**.

В нормальном виде:

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \quad \text{где} \ \ p(x) = \frac{a_o(x)}{a_1(x)} \ , \quad q(x) = \frac{f(x)}{a_1(x)}$$

В области (D), где отличен от нуля коэффициент $a_1(x)$ и непрерывны функции $a_1(x)$, $a_o(x)$ и $f(x)$, теорема о $\exists!$ решения у задачи Коши.

Искомая функция $y(x)$ заменяется произведением двух неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$:

$$y(x) = u(x)v(x) \; ; \quad \text{тогда} \;\; y' = u'v + uv'$$

исходное дифференциальное уравнение приобретает вид

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \; , \quad u'v + u \cdot \Big[v' + p(x)v\Big] = q(x)$$

Функция $v(x)$ выбирается так, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль:

$$v' + p(x)v = 0$$

для $v(x)$ линейное однородное д.у. 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \; , \quad \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx \ , \quad v = \varphi(x) \ , \quad \text{где} \quad \varphi(x) = e^{-\int p(x)dx}$$

достаточно найти только одну функцию $v(x)$.

Возвратиться к исходному уравнению:

$$u'v + u \cdot \underbrace{[v' + p(x)v]}_{=0} = q(x) \ ; \quad u'\varphi(x) = q(x)$$

для $u(x)$ также уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}\varphi(x) = q(x) \ , \quad du = \frac{q(x)}{\varphi(x)}dx \ , \quad \int du = \int \frac{q(x)}{\varphi(x)}dx$$

$$u = \int \frac{q(x)}{\varphi(x)}dx + C$$

Теперь определяется $y(x)$:

$$y = u(x)v(x) = \left[\int \frac{q(x)}{\varphi(x)}dx + C\right]\varphi(x)$$

т.е.

$$y = \left[\int q(x)e^{+\int p(x)dx}dx + C\right]e^{-\int p(x)dx} .$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y' + \frac{1}{x+1}y = x^2 \ .$$

Решение:

$$y = uv \ ; \quad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + u \cdot \left[v' + \frac{1}{x+1}v\right] = x^2$$

Выражение в квадратных скобках приравнивается к нулю:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x+1}v = 0 \, ; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{1}{x+1}dx \, , \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$\ln|v| = -\ln|x+1|, \quad \ln|v| = \ln|x+1|^{-1} \ , \qquad v = (x+1)^{-1}$$

Возвращаемся к исходному уравнению

$$u'v + u \cdot \underbrace{[v' + \frac{1}{x+1} v]}_{=0} = x^2 \ ; \quad \frac{du}{dx}\frac{1}{x+1} = x^2$$

$$du = x^2(x+1)dx \ , \quad \int du = \int x^2(x+1)dx \ , \quad u = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = uv = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C\right)\frac{1}{x+1}$$