Логическое следование формул

__Определение.__ Формула Φ называется *логическим следствием формул* $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$, если при любой подстановке в эти формулы вместо их переменных $X_1,\ldots,X_n$ конкретных высказываний $A_1,\ldots,A_n$ из истинности высказываний $\Phi_1(A_1,\ldots,A_n),\ldots,\Phi_m(A_1,\ldots,A_n)$ следует истинность высказывания $\Phi(A_1,\ldots,A_n)$.

Символическое обозначение $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \models \Phi$ - называется *логическим следованием*.

Формулы $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ называются *посылками* и формула Φ – *следствием* логического следования $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \models \Phi$.

Определение. Множество формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ называется *противоречивым*, если из него логически следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула Φ. Символически это записывается $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models$.

В противном случае множество формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ называется *выполнимым*.

Лемма (Транзитивность логического следования). Если $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$ и для любого значения $1 \leq i \leq m$ выполняется $\Psi_1, \ldots, \Psi_k \models \Phi_i$, то $\Psi_1, \ldots, \Psi_k \models \Phi$.

<u>Лемма (Критерии логического следования).</u> Условие $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \models \Phi$ равносильно каждому из следующих условий:

a) $\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \models \Phi$,

b) $\models \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi$,

c) $\Phi_1, \ldots, \Phi_m, \neg\Phi \models$.

В частности, $\Phi \models \Psi$ равносильно $\models \Phi \Rightarrow \Psi$. Отсюда также следует, что $\Phi = \Psi$ равносильно тому, что $\Phi \models \Psi$ и $\Psi \models \Phi$.

<u>Вывод:</u> Следующие задачи равносильны:

а) проверка тождественной истинности формул;

б) проверка логического следования формул;

в) проверка тождественной ложности формул;

г) проверка противоречивости множества формул.

Основные правила логического следования:

1) *правило отделения* (или правило *модус понененс* – от латинского modus ponens)

$$\Phi, \Phi \Rightarrow \Psi \models \Psi ;$$

2) *правило контрапозиции*

$$\Phi \Rightarrow \Psi \models \neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi ;$$

3) *правило цепного заключения*

$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \models \Phi_1 \Rightarrow \Phi_3 ;$$

4) *правило перестановки посылок*

$$\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3) \models \Phi_2 \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3) .$$

Методы проверки тождественной истинности формул

Следующие задачи равносильны:

а) проверка тождественной истинности формул;

б) проверка логического следования формул;

в) проверка тождественной ложности формул;

г) проверка противоречивости множества формул.

Основные методы проверки тождественной истинности формул:

1. Прямой метод.
2. Алгебраический метод.
3. Алгоритм Квайна.
4. Алгоритм редукции.
5. Метод семантических таблиц.
6. Метод резолюций.

Алгоритм Квайна позволяет сократить полный перебор значений пропозициональных переменных за счет последовательного фиксирования возможных значений 0 или 1 пропозициональных переменных и последующего анализа истинностных значений полученных формул с меньшим числом переменных.

При этом используются основные тавтологии и следующие простейшие равенства:

$$X \wedge 1 = X,\quad X \wedge 0 = 0,\quad X \vee 1 = 1,\quad X \vee 0 = X,$$

$$X \wedge \neg X = 0,\quad X \vee \neg X = 1,$$

$$X \rightarrow 1 = 1,\ 1 \rightarrow X = X,\ 0 \rightarrow X = 1,\quad X \rightarrow 0 = \neg X,$$

$$X \rightarrow X = 1,\ X \leftrightarrow X = 1.$$

<u>Пример.</u> С помощью алгоритма Квайна выясните, является ли тождественно истинной формула

[illegible] ¬[illegible] [illegible] ¬[illegible] [illegible].

1) при фиксировании в исходной формуле [illegible] = 1 получаем

[illegible] 1 [illegible] 1 [illegible] ¬[illegible] [illegible] ¬[illegible] [illegible],

что равносильно [illegible] ¬[illegible] [illegible].

Положим здесь [illegible] = 1:

[illegible] 1 [illegible] ¬1 [illegible],

что равносильно [illegible].

Отсюда при [illegible] = 1 получаем

[illegible] 1 [illegible] = [illegible] = 1 и

при [illegible] = 0 получаем [illegible] 0 [illegible] = 0 [illegible] = 1.

Положим теперь □□ = 0:

□□0 □ □□□ □ □□□ □ □¬0 □ □□□ = □□ □ 1 = 1.

2) при фиксировании в исходной формуле □□ = 0 получаем

□□□□ □ □□□ □ □0 □ □□□ □ □0 □ ¬□□□□ □ □¬□□ □ □□□,

что равносильно □□□□ □ □□□ □ ¬□□□ □ □¬□□ □ □□□.

Положим здесь □□ = 1:

□□1 □ □□□ □ ¬□□□ □ □¬1 □ □□□,

что равносильно □□□ □ ¬□□□ □ □□ = 0 □ □□ = 1.

Положим теперь □□ = 0:

□□0 □ □□□ □ ¬□□□ □ □¬0 □ □□□ = ¬□□ □ 1 = 1.

Таким образом, данная формула тождественно истинная.

<u>Алгоритм редукции</u> используется при доказательстве тождественной истинности формул с большим количеством импликаций. Идея метода основывается на получении противоречия из предположения, что истинностное значение рассматриваемой формулы равно 0 при некоторых истинностных значениях ее пропозициональных переменных. При этом используется тот факт, что импликация ложна в том и только том случае, если ее посылка истинна и заключение ложно.

Пример. С помощью алгоритма редукции выясним, является ли тождественно истинной формула

[illegible] ¬[illegible] [illegible]¬[illegible].

	([illegible]	⇒	[illegible])	∧	([illegible]	⇒	[illegible])	∧	([illegible]	∨	¬	[illegible]))	⇒	(¬	[illegible]	∨	[illegible])
1.													0				
2.						$\boxed{1}$										0	
3.		1				1				1				0			0
4.															1		
5.	(1)		1		0		(0)										
6.											0	(1)					
7.									(0)	0	(0)						

На каждом шаге алгоритма в скобках указываются значения переменных, которые были получены ранее на предыдущих шагах вычислений. Стрелка показывает полученное противоречие.

Метод семантических таблиц в алгебре высказываний

Оценкой переменных в формуле $\Phi=\Phi(X_1,\ldots,X_n)$ называется отображение α множества $\{X_1,\ldots,X_n\}$ в множество $\{0,1\}$.

Обозначения: $\models_\alpha \Phi$ и $\not\models_\alpha \Phi$.

Семантической таблицей называется упорядоченная пара множеств формул $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$.

Семантическая таблица $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ называется *выполнимой*, если существует такая оценка переменных α, что

1) $\models_{\alpha} \Phi$ для любой формулы $\Gamma \in \Gamma$,

2) $\not\models_{\alpha} \Psi$ для любой формулы $\Psi \in \Delta$.

Примеры.

1. Семантическая таблица

$$\langle \{X, \neg Y\} \mid \{X \Rightarrow Y\} \rangle$$

выполнима для оценки $\alpha(X)=1$, $\alpha(Y)=0$;

2. Семантическая таблица

$$\langle \varnothing \mid \{X \vee \neg X\} \rangle$$

невыполнима.

Теорема (о табличной проверке общезначимости формул).

Для любой формулы Φ условие $\models \Phi$ выполняется тогда и только тогда, когда семантическая таблица $\langle \varnothing \mid \{\Phi\} \rangle$ невыполнима.

Семантическая таблица $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ называется

– *закрытой*, если $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$,

– *атомарной*, если множества Γ, Δ состоят из переменных.

Предложение. Каждая закрытая семантическая таблица невыполнима и каждая незакрытая атомарная семантическая таблица выполнима.

Следствие. Если для формулы Φ выполнимость семантической таблицы $\langle \varnothing \mid \{\Phi\} \rangle$ сводится к выполнимости закрытых семантических таблиц, то формула Φ тождественно истинна.

Правила корректного преобразования семантических таблиц, сохраняющие выполнимость этих таблиц, называются *правилами табличного вывода*.

Для семантических таблиц T_0, T_1, T_2 такие правила символически записываются выражениями вида $\dfrac{T_0}{T_1}$ или $\dfrac{T_0}{T_1, T_2}$, которые означают, что таблица T_0 выполнима в том и только том случае, если выполнима таблица T_1 (или, соответственно, одна из таблиц T_1, T_2).

Основные правила табличного вывода

$$L_\wedge \quad \frac{\langle \Gamma, \Phi \wedge \Psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \Phi, \Psi | \Delta \rangle}$$

$$R_\wedge \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \Phi \wedge \Psi \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \Phi \rangle, \langle \Gamma | \Delta, \Psi \rangle}$$

$$L_\vee \quad \frac{\langle \Gamma, \Phi \vee \Psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \Phi | \Delta \rangle, \langle \Gamma, \Psi | \Delta \rangle}$$

$$R_\vee \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \Phi \vee \Psi \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \Phi, \Psi \rangle}$$

$$L_\Rightarrow \quad \frac{\langle \Gamma, \Phi \Rightarrow \Psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \Psi | \Delta \rangle, \langle \Gamma | \Delta, \Phi \rangle}$$

$$R_\Rightarrow \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \Phi \Rightarrow \Psi \rangle}{\langle \Gamma, \Phi | \Delta, \Psi \rangle}$$

$$L_\neg \quad \frac{\langle \Gamma, \neg\Phi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \Phi \rangle}$$

$$R_\neg \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \neg\Phi \rangle}{\langle \Gamma, \Phi | \Delta \rangle}$$

Лемма (корректность основных правил табличного вывода).

Для всех основных правил табличного вывода вида $\dfrac{T_0}{T_1}$ или $\dfrac{T_0}{T_1, T_2}$ таблица T_0 выполнима в том и только том случае, если выполнима таблица T_1 (или, соответственно, одна из таблиц T_1, T_2).

Табличным выводом для семантической таблицы T_0 называется корневое дерево, корнем которого является таблица T_0 и вершинами являются такие семантические таблицы, что из вершины T_i в вершину T_j (и в вершину T_k) идет дуга в том и только том случае, если $\frac{T_i}{T_j}$ или $\frac{T_i}{T_j, T_k}$ являются правилами табличного вывода. При этом листьями такого дерева являются закрытые или атомарные таблицы.

Табличный вывод называется *успешным*, если он является конечным деревом, все листья которого являются закрытыми таблицами.

Теорема полноты табличного вывода. Семантическая таблица T_0 невыполнима в том и только том случае, если для этой таблицы T_0 существует успешный табличный вывод.

Следствие. Формула Ф тождественно истинна в том и только том случае, если для семантической таблицы $\langle \varnothing \mid \{\Phi\} \rangle$ существует успешный табличный вывод.

<u>Пример.</u> С помощью семантических таблиц докажем тождественную истинность формулы $\Phi = \big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X\big) \Rightarrow X,$ которая называется *законом Пирса*.

Табличный вывод семантической таблицы $T_0 = \langle \varnothing \mid \Phi \rangle$:

$$T_0 = \langle \varnothing \mid \big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X\big) \Rightarrow X \rangle$$

$$\big\downarrow \quad R_\Rightarrow$$

$$\langle\, (X \Rightarrow Y) \Rightarrow X \mid X \rangle$$

$$\swarrow \;\; \searrow \quad L_\Rightarrow$$

$$\langle\, X \mid X \rangle, \ \langle\, \varnothing \mid X \Rightarrow Y, X \rangle$$

$$\big\downarrow \quad R_\Rightarrow$$

$$\langle\, X \mid Y, X \rangle$$