

# Примеры применения интеграла в физике и геометрии

# Примеры вычисления пути, пройденного телом при прямолинейном движении

**Пример1.** Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 3t^2 + 2t + 1 \text{ м/с}$ . Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения

**Решение:**

$$s = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1) dt = (t^3 + t^2 + t) \Big|_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110(\text{м})$$

# Примеры вычисления пути, пройденного телом при прямолинейном движении

**Пример 2.** Скорость движения точки  $v = 9t^2 - 8t$  м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

**Решение:**

$$\begin{aligned} s &= \int_3^4 (9t^2 - 8t) dt = (3t^3 - 4t^2) \Big|_3^4 = (3 \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2) - (3 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2) \\ &= 192 - 64 - 81 + 36 = 83(\text{м}) \end{aligned}$$

# Примеры вычисления пути, пройденного телом при прямолинейном движении

**Пример 3.** Скорость движения точки  $v = 12t - 3t^2$  м/с .  
Найти путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.

**Решение:**

$$\begin{aligned} s &= \int_0^4 (12t - 3t^2) dt = (6t^2 - t^3) \Big|_0^4 = (6 \cdot 4^2 - 4^3) - 0 = \\ &= 96 - 64 = 32(\text{м}) \end{aligned}$$

# Применение интегралов в физике

## 2. Вычисление работы силы, произведённой при прямолинейном движении тела

Еще одной физической величиной, которая находится с помощью интегрирования, является работа. Для нахождения работы необходимо найти определенный интеграл функции силы по перемещению.

Работа, произведённая переменной силой  $f(x)$  при перемещении по оси  $Ox$  материальной точки от  $x=a$  до  $x=b$ , вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука:

$$F=kx,$$

где  $F$ -сила,  $H$ ;  $x$ -абсолютное удлинение пружины,  $m$ , вызванное силой  $F$ , а  $k$ - коэффициент пропорциональности,  $H/m$

# Примеры вычисления работы силы, произведённой при прямолинейном движении тела

**Пример1.** Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,22 до 0,32 м?

**Решение:** по закону Гука:  $50=0,01k$ , т.е.  $k=5000 \text{ Н/м}$ . Находим пределы интегрирования  $a=0,22-0,2=0,02(\text{м})$ ,  
 $b=0,32-0,2=0,12(\text{м})$ . Теперь по формуле получим:

$$A = \int_{0,02}^{0,12} 5000x dx = 5000 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,02}^{0,12} = 2500(0,0144 - 0,0004) = 2500 \cdot 0,014 = 35(\text{Дж})$$

# Примеры вычисления работы силы, произведённой при прямолинейном движении тела

**Пример2.** При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м?

**Решение:** зная величину сжатия пружины- 0,05м и произведённую при этом работу – 25Дж, воспользуемся формулой:

$$25 = \int_0^{0,05} kx dx = k \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,05} = 0,00125k$$

Откуда  $k=25/0,00125=20000$ (Н/м). Теперь по этой же формуле находим:

$$A = \int_0^{0,1} 20000x dx = 20000 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,1} = 20000 \cdot \frac{0,01}{2} = 100(\text{Джс})$$

# Применение интегралов в геометрии

- 1) Вычисление площадей плоских фигур.**
- 2) Вычисление объёмов тел вращения.**

*Мы уже рассматривали ранее вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла, поэтому рассмотрим более подробно применение определённого интеграла к вычислению объёмов тел вращения.*

# Применение интегралов к вычислению объёмов тел вращения

Объём фигуры, образованной в результате вращения вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой  $y=f(x)$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ , вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

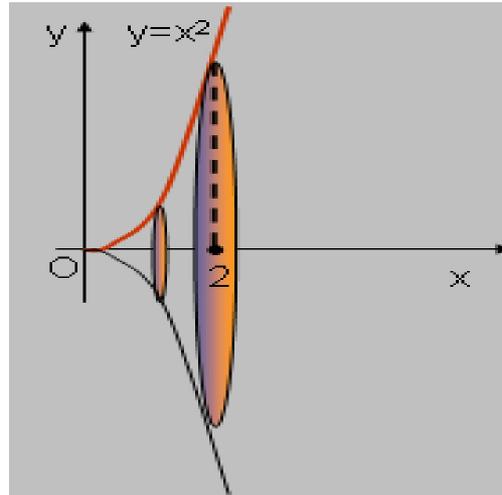
Аналогично, объём фигуры, образованной в результате вращения вокруг оси  $Oy$  криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой  $x=f(y)$ , осью  $Ox$  и прямыми  $y=a$  и  $y=b$ , вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b [\phi(y)]^2 dy$$

# Применение интегралов к вычислению объёмов тел вращения

**Пример 1.** Пусть тело образовано вращением параболы  $y=x^2$  на отрезке  $[0;2]$  вокруг оси  $Ox$ . Найдите объём тела вращения.

**Решение:** Построим тело вращения, образованное вращением фигуры вокруг оси  $Ox$ .



$$V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 \pi \cdot (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5} \text{ (куб.ед.)}$$