Примеры применения интеграла в физике и геометрии

Примеры вычисления пути, пройденного телом при прямолинейном движении

Пример1. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 2t + 1\, м/с$. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения

Решение:

$$s = \int_0^{10} \left(3t^2 + 2t + 1\right) dt = \left(t^3 + t^2 + t\right)\Big|_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110 (м)$$

Примеры вычисления пути, пройденного телом при прямолинейном движении

Пример 2. Скорость движения точки $v = 9t^2 - 8t\ м/с$. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

Решение:

$$s = \int_3^4 \left(9t^2 - 8t\right)dt = \left(3t^3 - 4t^2\right)\Big|_3^4 = \left(3 \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2\right) - \left(3 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2\right)$$

$$= 192 - 64 - 81 + 36 = 83(м)$$

Примеры вычисления пути, пройденного телом при прямолинейном движении

Пример 3. Скорость движения точки $v = 12t - 3t^2$ $м/с$.
Найти путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.

Решение:

$$s = \int_0^4 \left(12t - 3t^2\right)dt = \left(6t^2 - t^3\right)\Big|_0^4 = \left(6 \cdot 4^2 - 4^3\right) - 0 =$$

$$= 96 - 64 = 32(м)$$

Применение интегралов в физике

2. Вычисление работы силы, произведённой при прямолинейном движении тела

Еще одной физической величиной, которая находится с помощью интегрирования, является работа. Для нахождения работы необходимо найти определенный интеграл функции силы по перемещению.

Работа, произведённая переменной силой *f(x)* при перемещении по оси *Ox* материальной точки от *x=a* до *x=b*, вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука:

$$F=kx,$$

где *F*-сила, *Н;* *x*-абсолютное удлинение пружины, *м,* вызванное силой *F,* а *k*- коэффициент пропорциональности, *Н/м*

Примеры вычисления работы силы, произведённой при прямолинейном движении тела

Пример1. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,22 до 0,32 м?

Решение: по закону Гука: 50=0,01k, т.е. k=5000 *Н/м*. Находим пределы интегрирования *a=0,22-0,2=0,02(м)*, *b=0,32-0,2=0,12(м)*. Теперь по формуле получим:

$$A = \int_{0,02}^{0,12} 5000x\,dx = 5000\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,02}^{0,12} = 2500(0,0144 - 0,0004) = 2500 \cdot 0,014 = 35(Дж)$$

Примеры вычисления работы силы, произведённой при прямолинейном движении тела

Пример2. При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м?

Решение: зная величину сжатия пружины- 0,05м и произведённую при этом работу – 25Дж, воспользуемся формулой:

$$25 = \int_0^{0,05} kxdx = k\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,05} = 0{,}00125k$$

Откуда k=25/0,00125=20000(Н/м). Теперь по этой же формуле находим:

$$A = \int_0^{0,1} 20000xdx = 20000\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,1} = 20000\cdot\frac{0{,}01}{2} = 100(\text{Дж})$$

Применение интегралов в геометрии

1) Вычисление площадей плоских фигур.

2) Вычисление объёмов тел вращения.

Мы уже рассматривали ранее вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла, поэтому рассмотрим более подробно применение определённого интеграла к вычислению объёмов тел вращения.

Применение интегралов к вычислению объёмов тел вращения

Объём фигуры, образованной в результате вращения вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y=f(x)*, осью *Ox* и прямыми *x=a* и *x=b*, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

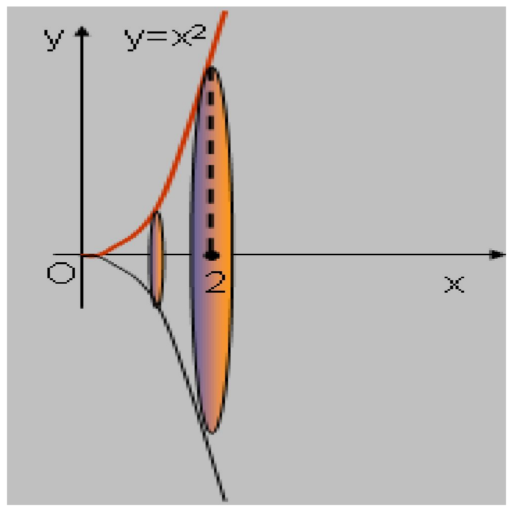
Аналогично, объём фигуры, образованной в результате вращения вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой x*=f(y)*, осью *Ox* и прямыми *y=a* и *y=b*, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b [\phi(y)]^2 dy$$

Применение интегралов к вычислению объёмов тел вращения

Пример 1. Пусть тело образовано вращением параболы $y=x^2$ на отрезке [0;2] вокруг оси Ox. Найдите объём тела вращения.

Решение: Построим тело вращения, образованное вращением фигуры вокруг оси 0x.



$$V=\int_0^2 S(x)\partial x=\int_0^2 \pi\cdot(x^2)^2\,\partial x=\pi\int_0^2 x^4\partial x=\pi\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2=\frac{32\pi}{5}(куб.ед.)$$