Множества и основные операции над ними

Запись $x \in A$ означает, что элемент x *принадлежит* множеству A. Если x не является элементом множеств A, то пишут $x \notin A$ или $\overline{x \in A}$. Два множества A и B считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Будем писать $A = B$, если A и B равны и $A \neq B$ в противном случае.

Множество называется *пустым* и обозначается $\varnothing$, если оно не содержит элементов.

Будем говорить, множество A *включено* в множество B, и писать $A \subseteq B$, если каждый элемент множества A является элементом множества B. В этом случае A называется *подмножеством* множества B. Считается, что для любого A справедливо включение $\varnothing \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то будем писать $A \subset B$ и говорить, что множество A *строго включено* во множество B.

Семейство всех подмножеств данного множества A обозначается $P(A)$.

Мощностью конечного множества A будем называть число его элементов. Мощность конечного множества A обозначается $|A|$.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Если все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого *универсального* множества U, то разность $U \setminus A$ называется *дополнением* A и обозначается $\overline{A}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Будем говорить, что множества A и B находятся *в общем положении*, и писать $A \between B$, если существуют такие элементы a, b, c, что $a \in A$ и $a \notin B$, $b \in$ B и $b \notin B$, $c \in A$ и $c \in B$.

Пример 1.

а) Справедливо ли в общем случае утверждение :
если $A \subset B$, $B \subseteq C$ *и* $C \subset D$, *то* $A \subseteq D$ *?*

Пусть $x \in A$. Так как $A \subset B$, из определения включения следует, что $x \in B$. Так как $x \in B$ и $B \subseteq C$, то $x \in C$. Так как $x \in C$ и $C \subset D$, то $x \in D$. Итак, из того, что произвольный элемент $x \in A$ следует, что $x \in D$. На основании определения заключаем, что $A \subseteq D$, то есть данное утверждение верно.

б) Может при некоторых A, B, C *и* D *выполняться набор условий:* $A \subset B$, $B \subseteq C$ *и* $C \subset D$, *и* $A \subseteq D$ *?*

Да, может. Это следует из справедливости утверждения в пункте а).

Примером могут служить множества $A = \{x\}$, $B = C = \{x, y\}$, $D = \{x, y, z\}$. Тогда $\{x\} \subset \{x, y\}$, $\{x, y\} \subseteq \{x, y\}$, $\{x, y\} \subset \{x, y, z\}$ и $\{x\} \subseteq \{x, y, z\}$.

Пример 2.

а) *Справедливо ли в общем случае утверждение:*

если $A \subset B$, $B \in C$ *и* $C \in D$, *то* $A \subseteq D$ *?*

Пусть $A = \{x\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{\{x, y\}, z\}$, $D = \{\{\{x, y\}, z\}, w\}$.

Тогда $\{x\} \subset \{x, y\}$ и $\{x, y\} \in \{\{x, y\}, z\} \in \{\{\{x, y\}, z\}, w\}$.

Но в то же время неверно, что $\{x\} \subset \{\{\{x, y\}, z\}, w\}$, так как единственный элемент x множества A не является элементом множества D, состоящего из элементов $\{\{x, y\}, z\}$ и w. Итак, утверждение из нашего примера 2а) в общем случае неверно.

б) Может ли при некоторых A, B, C *и* D *выполняться набор условий:* $A \subset B$, $B \in C$, $C \in D$ *и* $A \subseteq D$ *?*

Да, может. Например, $A = \varnothing$, $B = \{x\}$, $C = \{\{x\}, y\}$, $D = \{\{\{x\}, y\}, z\}$.

Тогда $\varnothing \subset \{x\}$, $\{x\} \in \{\{x\}, y\}$, $\{\{x\}, y\} \in \{\{\{x\}, y\}, z\}$ и в то же время $\varnothing \subseteq \{\{\{x\}, y\}, z\}$.

Задание 1.1.2

Для универсального множества $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$, множества A, заданного списком, и для B, являющегося множеством корней уравнения $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$.

1. Найти множества: $A \cup B$, $B \cap A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \vartriangle B$, $\overline{B}$, $C = (A \vartriangle B) \vartriangle A$.

2. Выяснить, какая из пяти возможностей выполнена для множеств A и C: $A \subset C$, или $C \subset A$, или $A = C$, или $A \cap C = \varnothing$, или $A \between B$.

3. Найти $P(B)$ и $|P(B)|$.

Пример решения задания 1.1.2

Решим задание 1.1.2 для $A=\{1,-2,3,-4\}$ *и уравнения*

$$x^4-7x^3+6x^2+32x-32=0.$$

Сначала найдём множество B корней данного уравнения. Подбором устанавливаем, что корнем исходного многочлена $x^4-7x^3+6x^2+32x-32$ является 1; поделив этот многочлен на $x-1$, получим многочлен x^3-6x^2+32.

Также подбором устанавливаем, что –2 является корнем многочлена x^3-6x^2+32 и делим этот многочлен на $x+2$. Получим многочлен $x^2-8x+16$. Его корни совпадают и равны 4.

Итак, множество B найдено, $B=\{-2,1,4\}$. Теперь решаем пункты 1—3 данного задания.

1. $A\cup B=\{-4,-2,1,3,4\}$, $B\cap A=\{-2,1\}$,

$A\setminus B=\{-4,3\}$, $B\setminus A=\{4\}$,

$A\,\Delta\, B=\{-4,3,4\}$, $\overline{B}=\{-5,-4,-3,-1,2,3,5\}$,

$C = (A \Delta B) \Delta A = \{-4,3,4\} \Delta \{1,-2,3,-4\} = \{4\} \cup \{1,-2\} = \{-2,1,4\}.$

2. Так как $-4 \in A$ и $-4 \notin C$, $4 \in C$ и $4 \notin A$, $1 \in A \cap C$, значит, $A \oplus B$.

3. $P(B) = \{\varnothing, \{-2\}, \{1\}, \{4\}, \{-2,1\}, \{-2,4\}, \{1,4\}, \{-2,1,4\}\}.$

Как видим, $P(B)$ содержит 8 элементов, т. е. $|P(B)| = 8.$

Задание 1.1.3

Пусть A, B и C — множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям α, β и γ соответственно. Изобразите в системе координат $x0y$ множество D, полученное из множеств A, B и C по формуле δ.

Пример решения задания 1.1.3

Пусть A, B и C — множества *точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям* $x+2>y$, $x^2+y^2\le 4$ *и* $|x|\le 2;\ \ |y|\le 2$ *соответственно. Изобразите в системе координат* $x0y$ *множество* D, *полученное из множеств* A, B *и* C *по формуле* $A\setminus(B\,\Delta\,C)$.

Множество B представляет из себя множество точек круга радиуса 2 с центром в начале координат, включающего границу, A – множество точек плоскости, расположенных выше и на прямой $y=x+2$, и C — множество точек, лежащих внутри и на границе квадрата $|x|\le 2;\ \ |y|\le 2$.

Отметим горизонтальной штриховкой множество $B \Delta C$, а вертикальной — множество A (рис. 1.1.3, а).

Удалив из области, помеченной вертикальной штриховкой, точки области, помеченной горизонтальной штриховкой, мы получим множество точек, образующих D. Изобразим результат, отметив точки множества D вертикальной штриховкой (рис. 1.1.3, б).

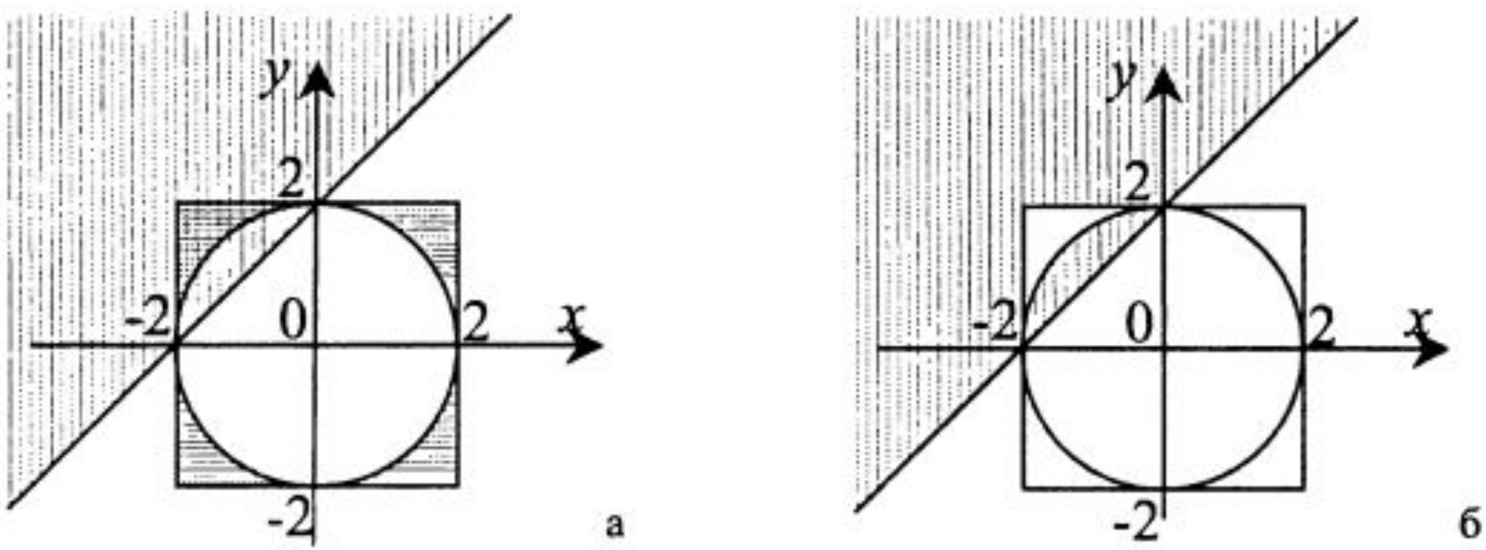

Рис. 1.1.3

Задание 1.1.4

1. Существуют ли множества A, B, X такие, что выполняется набор условий α?

2. Существуют ли множества N, E, P такие, что выполняется набор условий β?

Пример решения задания 1.1.4

1. Существуют ли множества A, B, X *такие, что выполняется набор условий:* $\overline{A \cup B} = \varnothing$, $X \,\Delta\, A = \varnothing$, $B \setminus A \neq \varnothing$?

Изобразим множества A, B, X в виде прямоугольников, расположенных на плоскости в общем положении, и поставим в каждой области, на которые плоскость разбита прямоугольниками, по одному символу: символ 4, например, обозначает список всех элементов, попавших во множества A и B, но не попавших в X, и т. д. Теперь составим множества A, B, X и универсальное множество U (рис. 1.1.4):

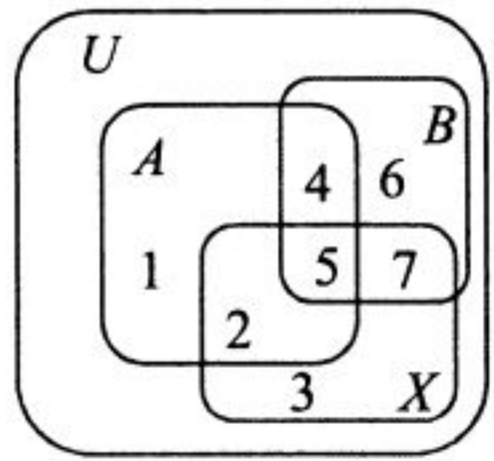

Рис. 1.1.4

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \quad A = \{1,2,4,5\}, \quad B = \{4,5,6,7\}, \quad X = \{2,3,5,7\}.$$

Изменим множества A, B, X так, чтобы выполнились условия нашего задания.

Из того, что $\overline{A \cup B} = \varnothing$, следует, что множество $U \setminus (A \cup B)$ не должно содержать элементов, т. е. из U удаляем 8 и 3.

Чтобы выполнилось условие $X \Delta A = \varnothing$, нужно удалить элементы списков 1, 4, 7. Тогда получится, что множества A, B, X и U имеют следующий вид: $A = \{2,5\} = X$, $B = \{5,6\}$, $U = \{2,5,6\}$. Заметим, что для этих множеств $B \setminus A = \{6\} \neq \varnothing$.

Если под символами 2, 5 и 6 будем понимать соответствующие числа, то мы получим конкретный пример множеств A, B, X, для которых выполнены все условия заданного набора требований.

2. Существуют ли множества N, E, P такие, что выполняется набор условий: $E \setminus N = P \setminus E = \varnothing$, $P \setminus N \neq \varnothing$?

Попробуем построить множества N, E, P так же, как мы это делали в п. 1. Пусть $N = \{1,2,4,5\}$, $E = \{4,5,6,7\}$, $P = \{2,3,5,7\}$. Чтобы выполнилось условие $E \setminus N = \varnothing$, удаляем элементы списков 6, 7. Для выполнения условия $P \setminus E = \varnothing$ удаляем элементы из списков 2, 3. Но тогда множество $P \setminus N$ не будет содержать элементов. Итак, мы показали, что этот набор условий противоречив, т. е. не существует множеств N, E, P таких, что выполнены условия упражнения.