

Занимательная математика

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 11 КЛАСС.

**УРОК НА ТЕМУ:
КОМБИНАТОРИКА И
ВЕРОЯТНОСТЬ.**



Комбинаторика и вероятность.

В теории вероятности ключевым понятием является случайность, понятие довольно таки абстрактное. Казалось бы, если некоторое событие случайно, то, как и что для него можно подсчитать, но все таки некоторые закономерности существуют и так же существуют числовые характеристики для этих событий и способы вычислений.

Случайное событие, в рамках конкретной задачи может быть абсолютно любым. Выпадение орла или решки при подбрасывании монетки, выпадение стороны кубика, вытаскивание какой либо карты из колоды, вызов такси и приезд какой либо марки машины, падение метеорита на какой либо участок территории и многое другое. Случайное событие мы вправе выбирать сами, но строго в рамках конкретной задачи.



Комбинаторика и вероятность.

Давайте разберем, как формулы комбинаторики помогают при вычислении вероятности событий. Чтобы глубоко не углубляться в определения и правила, рассмотрим несколько примеров.

Отметим, что при решении вероятностных задач, **первоначально** следует определить, **сколько всего исходов возможно** в рамках данной задачи, то есть все пространство исходов данной задачи.



Комбинаторика и

вероятность.

Пример. Из колоды карт (36 карт) случайным образом вытаскивают 4 карты. Найти вероятность того: **а)** король червей не попался **б)** вытащили короля червей.

Решение. Сначала нам нужно определить, сколько всего исходов. В колоде 36 карт, из которых случайным образом выбирается 4 карты. Нам надо найти количество выборов карт из 36 по 4 штук, это количество перестановок без повторений элементов. То есть

а) $n = C_{36}^4$ червей не попался – то есть попалась любая другая карта. Благоприятных нам карт осталось 35, то есть нам надо найти количество комбинаций из 35 карт по 4 вытащенным картам, без повторений среди вытащенных карт. Используя формулы комбинаторики:

$$m = C_{35}^4 = \frac{35!}{4!(35-4)!} = \frac{31! \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35}{4! \cdot 31!}$$

Найдем вероят...

$$P = \frac{m}{n} = \frac{C_{35}^4}{C_{36}^4} = \frac{35!}{4!31!} \cdot \frac{4!32!}{36!} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

Комбинаторика и вероятность.

б) В этом пункте нас просят найти вероятность события, обратного событию предыдущей задачи. Так как сумма вероятностей противоположным событий равна 1, тогда нам будет проще вычислить вероятность следующим образом:

$$P = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$



Комбинаторика и

вероятность.

Пример. В урне лежат красные и синие шары. Известно, что красных шаров 8 штук, а синих 5 штук. Случайным образом вытаскивают 3 шара, найдите вероятность следующих случайных событий:

- а) Среди вытасканных шаров ровно 2 синих.
- б) Среди вытасканных шаров не меньше одного красного.
- в) Синих шаров вытащили больше красных.

Решение.

Определим, для начала, сколько всего исходов возможно в рамках данной задачи. Всего у нас получается 8 красных плюс 5 синих, итого 13 шаров. Так как вытаскивают 3 шара, то нам надо найти все возможные комбинации 3 шаров из 13 данных. При вытаскивании шары не кладутся обратно, то есть повторений у нас не возможно, тогда нам надо найти количество комбинаций из 13 шаров по 3 без повторений. Используя известную формулу:

$$n = C_{13}^3 = \frac{13!}{3!10!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{6 \cdot 10!} = 11 \cdot 2 \cdot 13 = 286$$

И так всего у нас возможно 286 комбинаций, перейдем к решению конкретных пунктов данной задачи.

Комбинаторика и вероятность.

а) Мы вытаскиваем 3 шара, причем из них должно оказаться ровно 2 синих, и как следствие 1 красный шар. Количество комбинаций для синих шаров тогда C_5^2 и для красных C_8^1 . Используя правило умножения можно найти количество благоприятных нам комбинаций m .

$$m = C_5^2 \cdot C_8^1 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{8!}{7!1!} = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 8 = 80$$

Используем классическое определение вероятности:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{80}{286} \approx 0.28$$

Комбинаторика и вероятность.

б) Посмотрим внимательно на условие: *Среди вытасенных шаров не меньше одного красного.* Это значит, что нам благоприятны следующие случаи: вытасен один красный шар, вытасено два красных шара, и вытасено 3 красных шара.

В данной задаче нам будет проще найти вероятность противоположного события требуемому, то есть вероятность того, что было вытасено менее одного красного шара – все шары синие. Найдем данную вероятность, количество комбинаций 3 синих шаров из 5:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Вероятность, что все вытасенные шары синие:

$$P = \frac{10}{286} = 0.035$$

Тогда вероятность того, что среди вытасенных шаров не меньше одного красного:

$$P = 1 - 0.035 = 0.965$$

Комбинаторика и вероятность.

в) Вероятность того, что синих шаров вытащили больше чем красных означает, что было вытасщено либо 2 синих шара и 1 красный-событие А, либо все 3 шара синие – событие В.

Тогда нам надо найти вероятность события С состоящего из суммы событий А и В.

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Обратим внимание, что указанная выше формулы справедлива только для независимых событий А и В, случай когда события зависимы мы разберем на следующем уроке.

Вероятность события А мы уже подсчитали в пункте а) данной задачи. $P(A) = 0.28$

Вероятность события В мы уже подсчитали в пункте б) данной задачи. $P(B) = 0.035$

Осталось сложить требуемые вероятности и получить ответ:

$$P(C) = P(A) + P(B) = 0.28 + 0.035 = 0.315$$

Ответ: а) 0.28 б) 0.965 в) 0.315

Комбинаторика и вероятность.

В конце урока отметим, что вероятностные задачи решать тяжелее, чем просто комбинаторные. В процессе решения нам следует выделить следующие пункты:

- а)** Определить все возможные исходы, в рамках данной задачи.
- б)** Найти количество всех этих исходов, или комбинаций всех возможных исходов.
- в)** Определить благоприятные исходы для данной задачи.
- г)** Найти количество благоприятных исходов, или их комбинаций.
- д)** Найти вероятность требуемого события.

Получается, что решение задачи состоит из 5 пунктов, ребята не забывайте эти пункты и решение окажется не таким и сложным.

Комбинаторика и вероятность.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Из колоды карт (36 карт) случайным образом вытаскивают 6 карты. Найти вероятность того: а) шестерка пик не попала б) попала любая шестерка.

2. В урне лежат красные и синие шары. Известно, что красных шаров 10 штук, а синих 7 штук. Случайным образом вытаскивают 5 шаров, найдите вероятность следующих случайных событий:

- а) Среди вытащенных шаров ровно 3 синих.
- б) Среди вытащенных шаров не больше трех красных.
- в) Красных шаров вытащили больше или равно синих.