Кинематика Кинематика точки. Примеры

– Определение кинематических характеристик по заданному закону движения

– Определение скоростей и ускорений точек спарника

– Кинематика точек кривошипно-шатунного механизма

– Качение колеса без проскальзывания

– Кинематика точки кулисного механизма

– 1 Кинематика точки в криволинейных координатах (декартовые координаты)

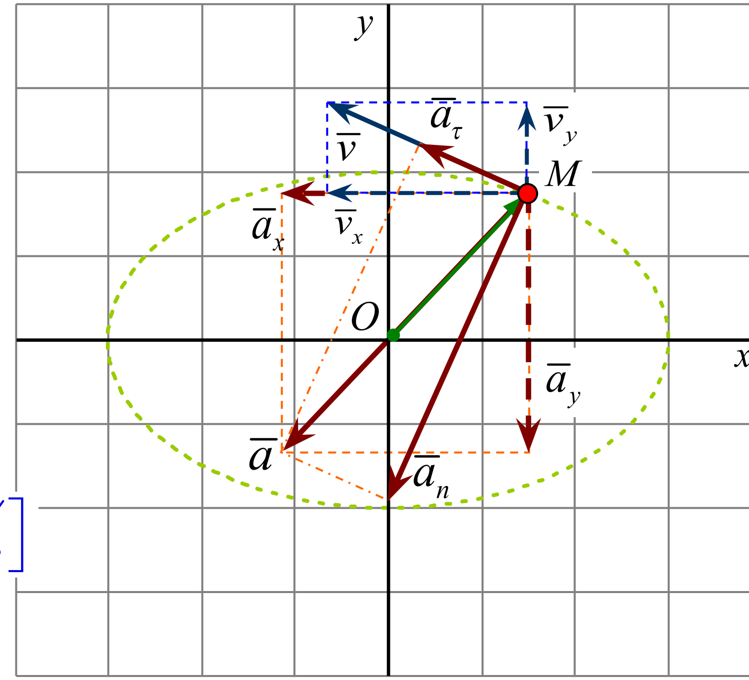
– 2 Кинематика точки в криволинейных координатах (сферические координаты)

– 3 Кинематика точки в криволинейных координатах (цилиндрические координаты)

Определение кинематических характеристик по заданному закону движения

Дано: $x = 3\cos(kt)\,[см],\quad y = 2\sin(kt)\,[см],\quad T=\pi\,[c],\quad k = {}^{1}\!/_{3}\,[c^{-1}]$

Найти: $y(x),\quad \bar v_T,\quad \bar a_T,\quad \bar a_{\tau_T},\quad \bar a_{n_T},\quad \rho_T$



Решение: Уравнение траектории $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ эллипс

Координаты точки $x\big|_{t=T} = \dfrac{3}{2}\,[см],\quad y\big|_{t=T} = \sqrt{3}\,[см]$

Скорость точки
$$v_x = \dot x = -3k\sin(kt),$$
$$v_y = \dot y = 2k\cos(kt)$$

$$v_x\big|_{t=T} = -3\tfrac{\sqrt3}{2}\pi\left[{}^{см}\!/_{c}\right],\quad v_y\big|_{t=T} = \pi\left[{}^{см}\!/_{c}\right]\quad v\big|_{t=T} = \tfrac{\sqrt{31}}{2}\pi\left[{}^{см}\!/_{c}\right]$$

Ускорение точки
$$a_x = \dot v_x = -3k^2\cos(kt) = -k^2x,$$
$$a_y = \dot v_y = -2k^2\sin(kt) = -k^2y$$

$$a_x\big|_{t=T} = -\tfrac{3}{2}\pi^2\left[{}^{см}\!/_{c^2}\right],\quad a_y\big|_{t=T} = -\sqrt3\,\pi^2\left[{}^{см}\!/_{c^2}\right]\quad a\big|_{t=T} = \tfrac{\sqrt{21}}{2}\pi^2\left[{}^{см}\!/_{c^2}\right]$$

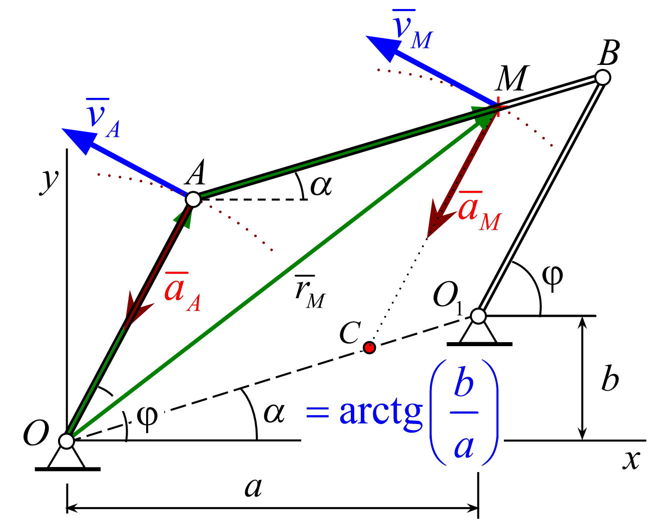
V(t) V(t) + a(t) a(t)

Тангенциальное ускорение $a_\tau = \dfrac{a_x v_x + a_x v_x}{v} = \tfrac{5}{2}\sqrt{\tfrac{3}{31}}\,\pi^2\left[{}^{см}\!/_{c^2}\right]$

Нормальное ускорение $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \tfrac{12}{\sqrt{31}}\pi^2\left[{}^{см}\!/_{c^2}\right]$

Радиус кривизны траектории $\rho = \dfrac{v^2}{a_n} = \tfrac{31}{48}\sqrt{31}\,[см]$

Определение скоростей и ускорений точек спарника



Дано: $\varphi = \omega t,\quad OA = O_1B = r,\quad AB = \ell = 2.5r,\quad a = 2r,\quad b = 1.5r,$

$$AM = \frac{3}{4}AB,\quad \omega = \pi\left[T^{-1}\right],\quad c = 10[\ \ ],\quad = \frac{1}{3}[\ \ ]$$

Найти: $(\cdot)A, M \;\Rightarrow\; y(x),\ \bar{v}_T,\ \bar{a}_T$

Решение: $(\cdot)A$ Уравнение движения $\bar{r}_A = \overline{OA}$ $\quad x_A = r\cos(\omega t),$

$$y_A = r\sin(\omega t)$$

Уравнение траектории $x_A^2 + y_A^2 = r^2$ окружность. Координаты точки $x_A\big|_{t=T} = \frac{1}{2}r\ [\ \ ],\ y_A\big|_{t=T} = \frac{\sqrt{3}}{2}r\ [\ \ ]$

Скорость $\quad v_{Ax} = \dot{x}_A = -r\omega\sin(\omega t),\quad v_{Ay} = \dot{y}_A = r\omega\cos(\omega t)$

$$v_{Ax}\big|_{t=T} = -\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega\left[{}^{см}\!/_{с}\right],\quad v_{Ay}\big|_{t=T} = \frac{1}{2}r\omega\left[{}^{см}\!/_{с}\right],\quad v_A\big|_{t=T} = r\omega\left[{}^{см}\!/_{с}\right]$$

(·) A

Ускорение $\quad a_{Ax} = \dot{v}_{Ax} = -r\omega^2\cos(\omega t),\quad a_{Ay} = \dot{v}_{Ay} = -r\omega^2\sin(\omega t)$

$$a_{Ax}\big|_{t=T} = -\frac{1}{2}r\omega^2\left[{}^{см}\!/_{с^2}\right],\quad a_{Ay}\big|_{t=T} = -\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega^2\left[{}^{см}\!/_{с^2}\right]\quad a_A\big|_{t=T} = r\omega^2\left[{}^{см}\!/_{с^2}\right]$$

$(\cdot)M$ Уравнение движения $\bar{r}_M = \overline{OA} + \overline{AM}$

$$x_M = r\cos(\omega t) + \tfrac{3}{4}\ell\cos\alpha = r\cos(\omega t) + \tfrac{6}{5}r$$

$$y_M = r\sin(\omega t) + \tfrac{3}{4}\ell\sin\alpha = r\sin(\omega t) + \tfrac{9}{10}r$$

Уравнение траектории $\left(x_M - \frac{6}{5}r\right)^2 + \left(y_M - \frac{9}{10}r\right)^2 = r^2$ окружность.

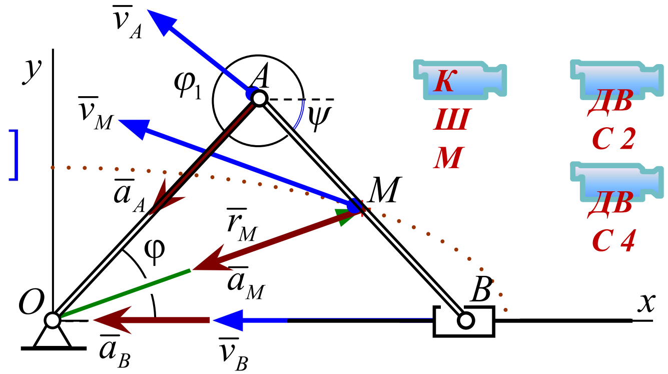
Скорость $\quad v_{Mx} = \dot{x}_M = -r\omega\sin(\omega t),\quad v_{My} = \dot{y}_M = r\omega\cos(\omega t)$

Ускорение $\quad a_{Mx} = \dot{v}_{Mx} = -r\omega^2\cos(\omega t),\quad a_{My} = \dot{v}_{My} = -r\omega^2\sin(\omega t)$

(·) M

$$v_M\big|_{t=T} = r\omega\left[{}^{см}\!/_{с}\right]\qquad a_M\big|_{t=T} = r\omega^2\left[{}^{см}\!/_{с^2}\right]$$

Кинематика точек кривошипно-шатунного механизма



Дано: $\varphi = \omega t$, $OA = AB = r$, см, $\omega T = \pi\ [c^{-1}]$, $=10\ [\ \ ]$, $=\frac{1}{4}\ [\ \ ]$

Найти: $(\cdot)\ A, B, M \quad y(x), \quad \bar v_T, \quad \bar a_T$

Решение: $(\cdot)\ A$ Уравнения движения $\bar r_A = \overline{OA}$ $\quad x_A = r\cos\varphi,$

$y_A = r\sin\varphi$

Уравнение траектории $x_A^2 + y_A^2 = r^2$ окружность. Координаты точки $x_A\big|_{t=T} = y = \frac{\sqrt{2}}{2} r\ [\text{см}]$, $\ \big|_{t=T} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ [\ \ ]$

Скорость $v_{Ax} = \dot x_A = -r\omega\sin\varphi, \quad v_{Ay} = \dot y_A = r\omega\cos\varphi \qquad v_A\big|_{t=T} = r\omega\ [\text{см}/c]$

Ускорение $a_{Ax} = \dot v_{Ax} = -r\omega^2\cos\varphi, \quad a_{Ay} = \dot v_{Ay} = -r\omega^2\sin\varphi \qquad a_A\big|_{t=T} = r\omega^2\ [\text{см}/c^2]$

$(\cdot)\ B$ Уравнения движения $\bar r_B = \overline{OA} + \overline{AB}$ $\quad x_B = r\cos\varphi + r\cos\varphi_1$ $\qquad \varphi_1 = 2\pi + \psi \qquad \psi = -\varphi$

$y_B = r\sin\varphi + r\sin\varphi_1 = 0$

$x_B = 2r\cos(\omega t), \quad y_B = 0$ Уравнение траектории $y_B = 0$

Скорость $v_{Bx} = \dot x_B = -2r\omega\sin\varphi, \quad v_{By} = \dot y_B = 0 \qquad v_B\big|_{t=T} = r\omega\sqrt{2}\ [\text{см}/c]$

Ускорение $a_{Bx} = \ddot x_B = -2r\omega^2\cos\varphi, \quad a_{By} = \ddot y_B = 0 \qquad a_B\big|_{t=T} = r\omega^2\sqrt{2}\ [\text{см}/c]$

$(\cdot)\ M$ Уравнения движения $\bar r_M = \overline{OA} + \overline{AM}$ $\quad x_M = \frac{3}{2} r\cos\varphi, \quad y_M = \frac{1}{2} r\sin\varphi$

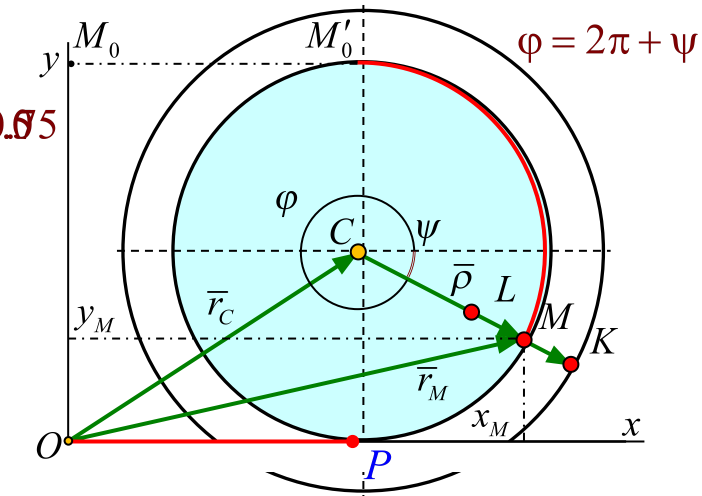
Уравнение траектории $\dfrac{x_M^2}{\frac{9}{4}r^2} + \dfrac{y_M^2}{\frac{1}{4}r^2} = 1$ эллипс

Скорость $v_{Mx} = \dot x_M = -\frac{3}{2} r\omega\sin\varphi, \quad v_{My} = \dot y_M = \frac{1}{2} r\omega\cos\varphi \qquad v_M\big|_{t=T} = \frac{\sqrt{5}}{2} r\omega\ [\text{см}/c]$

Ускорение $a_{Mx} = \ddot x_M = -\frac{3}{2} r\omega^2\cos\varphi, \quad a_{My} = \ddot y_M = -\frac{1}{2} r\omega^2\sin\varphi \qquad a_M\big|_{t=T} = \frac{\sqrt{5}}{2} r\omega^2\ [\text{см}/c^2]$

К Ш М
ДВ С 2
ДВ С 4
(·) A
(·) B
(·) M

Качение колеса без проскальзывания



Дано: $x_C = v_C t, \quad v_C = 1\left[{}^{м}/_{c}\right], \quad r = 1[\ \ ], \quad R = 1.5[\ \ ]$ $\lambda = 0.5$

Найти: $y(x), \ \bar{v}_M, \ \bar{a}_M, \ \bar{v}_K, \ \bar{a}_K, \ \bar{v}_L, \ \bar{a}_L$

Решение: Положение точки M $\quad \bar{r} = \bar{r}_C + \bar{\rho} \qquad \rho = \lambda r$

В проекциях на оси ***Oxy***

$$x = x_C + \rho\cos\varphi$$
$$y = r + \rho\sin\varphi$$

Уравнения связи $\quad \overset{\smile}{M'_0M} = OP = x_C \qquad x_C = r\left(\varphi - \frac{3}{2}\pi\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi + \frac{v_C}{r}t$

Уравнения движения

$$x = v_C t + \rho\sin\left(\frac{v_C}{r}t\right)$$
$$y = r - \rho\cos\left(\frac{v_C}{r}t\right)$$

– Уравнения траектории в параметрическом виде

Скорость точки

$$v_x = v_C + v_C\lambda\cos\left(\frac{v_C}{r}t\right)$$
$$v_y = v_C\lambda\sin\left(\frac{v_C}{r}t\right)$$

Ускорение точки

$$a_x = -\frac{v_C^2}{r}\lambda\sin\left(\frac{v_C}{r}t\right)$$
$$a_y = \frac{v_C^2}{r}\lambda\cos\left(\frac{v_C}{r}t\right)$$

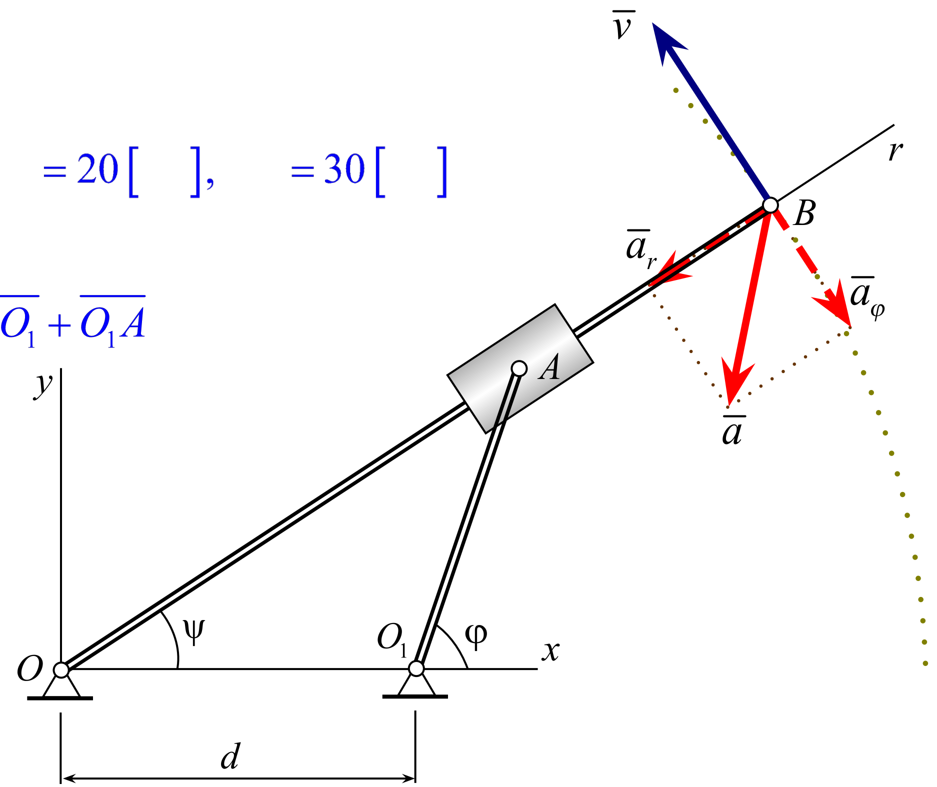
Кинематика точки кулисного механизма

Дано: $\varphi = \omega t,\quad O_1A = r,\quad OB = 3r,\ d,\quad \omega = const\left[\ ^{-1}\right],\quad = 20\left[\ \ \right],\quad = 30\left[\ \ \right]$

Найти: $(\ )B,\quad y(x),\quad \bar{v},\quad \bar{a}$

Решение: $(\ )A$ Уравнения движения $\bar{r}_A = \overline{OA} = \overline{OO_1} + \overline{O_1A}$

$x_A = d + r\cos\varphi,\quad y_A = r\sin\varphi$



$$tg\psi = \frac{r\sin\varphi}{d + r\cos\varphi}$$

$$r_A = \sqrt{(d + r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}$$

$(\ )B$ Уравнения движения $\bar{r}_B = \overline{OB}$

$x_B = 3r\cos\psi,\quad y_B = 3r\sin\psi$

Уравнение траектории $x_B^2 + y_B^2 = 9r^2$ дуга окружности радиуса $3r$

Полярные координаты: $\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{\psi}$ Уравнения движения $r_B = 3r$

Скорость точки $v_r = \dot{r}_B = 0,\qquad v_\varphi = r_B\dot{\psi} = 3r\dot{\psi},\qquad v_B = 3r\dot{\psi}\quad [см/c]$

Ускорение точки $a_r = \ddot{r}_B - r_B\dot{\psi}^2 = -3r\dot{\psi}^2$

$a_\psi = r_B\ddot{\psi} + 2\dot{r}_B\dot{\psi} = 3r\ddot{\psi}\qquad a_B = 3r\sqrt{\ddot{\psi}^2 + \dot{\psi}^4}\quad [см/c]$

Кинематика точки в криволинейных координатах

Дано: $x = R\cos^2\left(\tfrac{1}{2}kt\right),\quad y = \tfrac{1}{2}R\sin\left(kt\right),\quad z = R\sin\left(\tfrac{1}{2}kt\right),\quad k = \pi\left[\ ^{-1}\right],\qquad = 1\left[\quad\right]$

Найти: $\overline{v},\quad \overline{a}$

Решение: **Декартовые координаты**

Траектория точки – пересечение поверхностей

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\quad \left(x - \tfrac{1}{2}R\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}R^2$$

Скорость точки

$$v_x = \dot{x} = -\tfrac{1}{2}Rk\sin\left(kt\right),\quad v_y = \dot{y} = \tfrac{1}{2}Rk\cos\left(kt\right),\quad v_z = \dot{z} = \tfrac{1}{2}Rk\cos\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \tfrac{1}{2}Rk\sqrt{1 + \cos^2\left(\tfrac{1}{2}kt\right)}$$

Ускорение точки

$$a_x = \dot{v}_x = -\tfrac{1}{2}Rk^2\cos\left(kt\right),\quad a_y = \dot{v}_y = -\tfrac{1}{2}Rk^2\sin\left(kt\right),\quad a_z = \dot{v}_z = \tfrac{1}{4}Rk^2\sin\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \tfrac{1}{2}Rk^2\sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\sin^2\left(\tfrac{1}{2}kt\right)}$$

Кинематика точки в криволинейных координатах

Дано: $x = R\cos^2\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$, $y = \tfrac{1}{2}R\sin(kt)$, $z = R\sin\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$, $k = \pi\left[\ {}^{-1}\right]$, $=1\left[\ \right]$

Найти: $\overline{v}$, $\overline{a}$

Решение: **Сферические координаты**

Уравнения движения $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = R$ $\quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$ $\quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$ $\Rightarrow$

$$r = R,\quad \varphi = \tfrac{1}{2}kt,\quad \theta = \tfrac{1}{2}kt$$

Уравнение траектории $\quad \rho = R,\quad \varphi = \theta$

Скорость точки $\quad v_r = \dot r = 0,\qquad v_\varphi = r\dot\varphi\cos\theta = \tfrac{1}{2}Rk\cos\left(\tfrac{1}{2}kt\right),\qquad v_\theta = \rho\dot\theta = \tfrac{1}{2}Rk$

$$v = \tfrac{1}{2}Rk\sqrt{1+\cos^2\left(\tfrac{1}{2}kt\right)}$$

Ускорение точки

$$a_r = \ddot r - r\dot\varphi^2\cos^2\theta - r\dot\theta^2 = -\tfrac{1}{4}Rk^2\left[1+\cos^2\left(\tfrac{1}{2}kt\right)\right],$$

$$a_\varphi = \rho\ddot\varphi\cos\theta + 2\dot\rho\dot\varphi\cos\theta + 2\rho\dot\varphi\dot\theta\sin\theta = -\tfrac{1}{2}Rk^2\sin\left(\tfrac{1}{2}kt\right),$$

$$a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta = -\tfrac{1}{2}Rk^2\sin(kt)$$

Кинематика точки в криволинейных координатах

Дано: $x = R\cos^2\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$, $y = \tfrac{1}{2}R\sin(kt)$, $z = R\sin\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$, $k = \pi\,\left[\ ^{-1}\right]$, $=1\left[\quad\right]$

Найти: $\bar{v}$, $\bar{a}$

Решение: **Цилиндрические координаты**

Уравнения движения $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = R\cos\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$ $\quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$ $\quad z = R\sin\left(\tfrac{1}{2}kt\right) \quad \Rightarrow$

$$\rho = R\cos\left(\tfrac{1}{2}kt\right),\quad \varphi = \tfrac{1}{2}kt,\quad z = R\sin\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$$

Уравнение траектории $\rho^2 + z^2 = R,\quad \rho = R\cos\varphi$

Скорость точки $v_\rho = \dot{\rho} = -\tfrac{1}{2}kR\sin\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$, $\quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = \tfrac{1}{2}Rk\cos\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$, $\quad v_z = \dot{z} = \tfrac{1}{2}Rk\cos\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$.

$$v = \tfrac{1}{2}Rk\sqrt{1 + \cos^2\left(\tfrac{1}{2}kt\right)}$$

Ускорение точки

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\tfrac{1}{4}Rk^2\left[1 + \cos^2\left(\tfrac{1}{2}kt\right)\right],$$

$$a_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right) = -\tfrac{1}{4}Rk^2\sin\left(\tfrac{1}{2}kt\right),$$

$$a_z = \ddot{z} = \tfrac{1}{8}Rk^2\sin\left(\tfrac{1}{2}kt\right)$$