

- Определение кинематических характеристик по заданному закону движения
- Определение скоростей и ускорений точек спарника
- Кинематика точек кривошипно-шатунного механизма
- Качение колеса без проскальзывания
- Кинематика точки кулисного механизма
- 1 Кинематика точки в криволинейных координатах (декартовы координаты)
- 2 Кинематика точки в криволинейных координатах (сферические координаты)
- 3 Кинематика точки в криволинейных координатах (цилиндрические координаты)



Кинематика

Кинематика точки. Примеры

Определение кинематических характеристик по заданному закону движения

Дано: $x = 3 \cos(kt) [\text{м}], y = 2 \sin(kt) [\text{м}], T = \pi [\text{с}], \omega = 1/3 [\text{с}^{-1}]$

Найти: $y(x), \bar{v}_T, \bar{a}_T, \bar{a}_{\tau}, \bar{a}_n, \rho_T$

Решение: Уравнение траектории $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ эллипс

Координаты точки $x|_{t=T} = 3 [\text{м}], y|_{t=T} = \sqrt{3} [\text{м}]$

Скорость точки $v_x = \dot{x} = -3k \sin(kt), v_y = \dot{y} = 2k \cos(kt)$

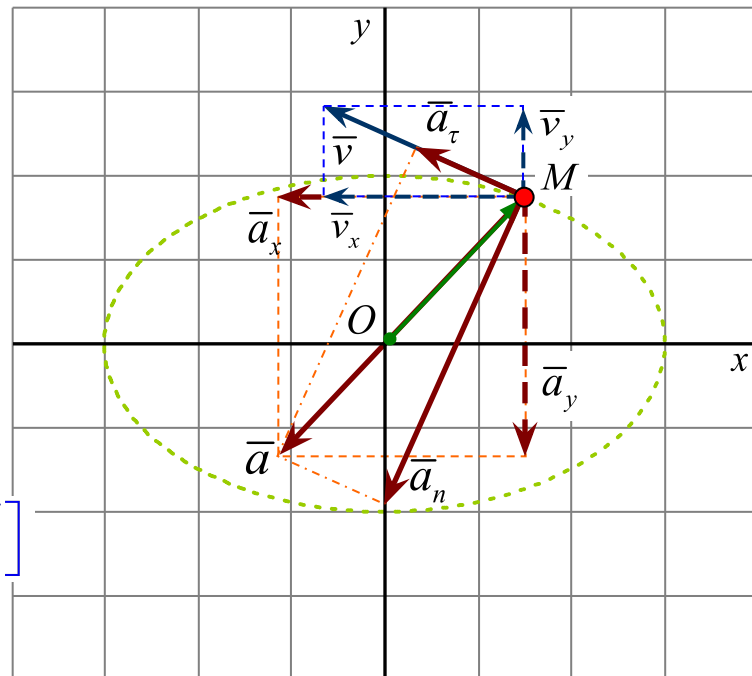
$v_x|_{t=T} = -3 \frac{\sqrt{3}}{2} \pi [\text{см}/\text{с}], v_y|_{t=T} = \pi [\text{см}/\text{с}], v|_{t=T} = \frac{\sqrt{31}}{2} \pi [\text{см}/\text{с}]$

Ускорение точки $a_x = \dot{v}_x = -3k^2 \cos(kt) = -k^2 x, a_y = \dot{v}_y = -2k^2 \sin(kt) = -k^2 y$

$a_x|_{t=T} = -\frac{3}{2} \pi^2 [\text{см}/\text{с}^2], a_y|_{t=T} = -\sqrt{3} \pi^2 [\text{см}/\text{с}^2], a|_{t=T} = \frac{\sqrt{21}}{2} \pi^2 [\text{см}/\text{с}^2]$

Тангенциальное ускорение $a_{\tau} = \frac{a_x v_x + a_y v_y}{v} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{3}{31}} \pi^2 [\text{см}/\text{с}^2]$

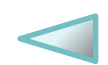
Нормальное ускорение $a_n = \sqrt{a^2 - a_{\tau}^2} = \frac{12}{\sqrt{31}} \pi^2 [\text{см}/\text{с}^2]$



$v(t)$
 $v(t)$
 $a(t)$
 $a(t)$

Радиус кривизны траектории

$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{31}{48} \sqrt{31} [\text{см}]$



Кинематика

Кинематика точки. Примеры

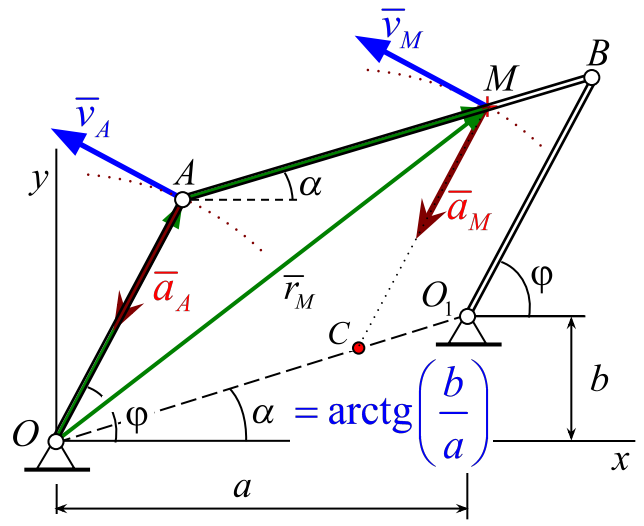
Определение скоростей и ускорений точек шарнира

Дано: $\varphi = \omega t$, $OA = OB = r$, $AB = \ell = 2.5r$, $a = 2r$, $b = 1.5r$,

$$AM = \frac{3}{4}AB, \quad \omega = \pi [T^{-1}], \quad c = 10 [\quad], \quad = \frac{1}{3} [\quad]$$

Найти: $(\boxtimes) A, M \Rightarrow y(x), \bar{v}_T, \bar{a}_T$

Решение: $(\boxtimes) A$ Уравнение движения $\bar{r}_A = \overline{OA}$ $x_A = r \cos(\omega t)$,
 $y_A = r \sin(\omega t)$



Уравнение траектории $x_A^2 + y_A^2 = r^2$ окружность. Координаты точки $x_M|_{t=T} = \frac{1}{2}r [\quad]r$, $y_M|_{t=T} = \frac{\sqrt{3}}{2} [\quad]$

Скорость $v_{Ax} = \dot{x}_A = -r\omega \sin(\omega t)$, $v_{Ax}|_{t=T} = -\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega [cm/c]$, $v_{Ay}|_{t=T} = \frac{1}{2}r\omega [cm/c]$, $v_A|_{t=T} = r\omega [cm/c]$
 $v_{Ay} = \dot{y}_A = r\omega \cos(\omega t)$

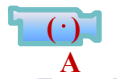
Ускорение $a_{Ax} = \dot{v}_{Ax} = -r\omega^2 \cos(\omega t)$, $a_{Ax}|_{t=T} = -\frac{1}{2}r\omega^2 [cm/c^2]$, $a_{Ay}|_{t=T} = -\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega^2 [cm/c^2]$, $a_A|_{t=T} = r\omega^2 [cm/c^2]$
 $a_{Ay} = \dot{v}_{Ay} = -r\omega^2 \sin(\omega t)$

$(\boxtimes) M$ Уравнение движения $\bar{r}_M = \overline{OA} + \overline{AM}$ $x_M = r \cos(\omega t) + \frac{3}{4}\ell \cos \alpha = r \cos(\omega t) + \frac{6}{5}r$
 $y_M = r \sin(\omega t) + \frac{3}{4}\ell \sin \alpha = r \sin(\omega t) + \frac{9}{10}r$

Уравнение траектории $(x_M - \frac{6}{5}r)^2 + (y_M - \frac{9}{10}r)^2 = r^2$ окружность.

Скорость $v_{Mx} = \dot{x}_M = -r\omega \sin(\omega t)$, Ускорение $a_{Mx} = \dot{v}_{Mx} = -r\omega^2 \cos(\omega t)$
 $v_{My} = \dot{y}_M = r\omega \cos(\omega t)$, $a_{My} = \dot{v}_{My} = -r\omega^2 \sin(\omega t)$

$v_M|_{t=T} = r\omega [cm/c]$, $a_M|_{t=T} = r\omega^2 [cm/c^2]$



Кинематика

Кинематика точки. Примеры

Кинематика точек кривошипно-шатунного механизма

Дано: $\varphi = \omega t$, $OA = AB = r$ см, $\omega = \pi$ [с⁻¹], $\omega = 10$ [], $\omega = \frac{1}{4}$ []

Найти: (⊠) A, B, M $y(x)$, \bar{v}_T , \bar{a}_T

Решение: (⊠) A Уравнения движения $\bar{r}_A = \overline{OA}$ $x_A = r \cos \varphi$,
 $y_A = r \sin \varphi$

Уравнение траектории $x_A^2 + y_A^2 = r^2$ окружность. Координаты точки $x_M|_{t=T} = \frac{\sqrt{2}}{2} r$ [], $y_M|_{t=T} = \frac{\sqrt{2}}{2} r$ []

Скорость $v_{Ax} = \dot{x}_A = -r\omega \sin \varphi$, $v_{Ay} = \dot{y}_A = r\omega \cos \varphi$ $v_A|_{t=T} = r\omega$ [см/с]

Ускорение $a_{Ax} = \dot{v}_{Ax} = -r\omega^2 \cos \varphi$, $a_{Ay} = \dot{v}_{Ay} = -r\omega^2 \sin \varphi$ $a_A|_{t=T} = r\omega^2$ [см/с²]

(⊠) B Уравнения движения $\bar{r}_B = \overline{OA} + \overline{AB}$ $x_B = r \cos \varphi + r \cos \varphi_1$ $\varphi_1 = 2\pi + \psi$ $\psi = -\varphi$
 $y_B = r \sin \varphi + r \sin \varphi_1 = 0$

$x_B = 2r \cos(\omega t)$, $y_B = 0$ Уравнение траектории $y_B = 0$

Скорость $v_{Bx} = \dot{x}_B = -2r\omega \sin \varphi$, $v_{By} = \dot{y}_B = 0$ $v_B|_{t=T} = r\omega\sqrt{2}$ [см/с]

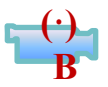
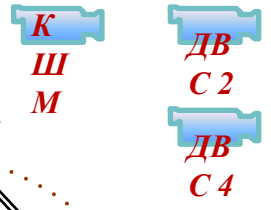
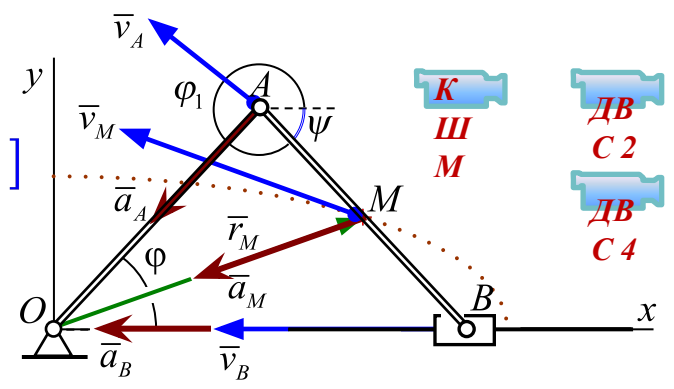
Ускорение $a_{Bx} = \ddot{x}_B = -2r\omega^2 \cos \varphi$, $a_{By} = \ddot{y}_B = 0$ $a_B|_{t=T} = r\omega^2\sqrt{2}$ [см/с²]

(⊠) M Уравнения движения $\bar{r}_M = \overline{OA} + \overline{AM}$ $x_M = \frac{3}{2}r \cos \varphi$, $y_M = \frac{1}{2}r \sin \varphi$

Уравнение траектории $\frac{x_M^2}{\frac{9}{4}r^2} + \frac{y_M^2}{\frac{1}{4}r^2} = 1$ эллипс

Скорость $v_{Mx} = \dot{x}_M = -\frac{3}{2}r\omega \sin \varphi$, $v_{My} = \dot{y}_M = \frac{1}{2}r\omega \cos \varphi$ $v_M|_{t=T} = \frac{\sqrt{5}}{2}r\omega$ [см/с]

Ускорение $a_{Mx} = \ddot{x}_M = -\frac{3}{2}r\omega^2 \cos \varphi$, $a_{My} = \ddot{y}_M = -\frac{1}{2}r\omega^2 \sin \varphi$ $a_M|_{t=T} = \frac{\sqrt{5}}{2}r\omega^2$ [см/с²]



Кинематика

Кинематика точки. Примеры

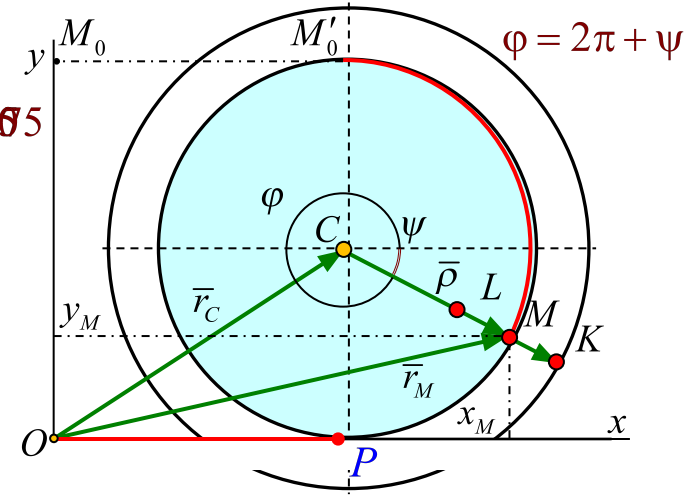
Качение колеса без проскальзывания

Дано: $v_C = v_C t$, $v_C \neq 1 \left[\frac{m}{c} \right]$, $r = 1 []$, $\lambda = 1.5 []$ $\lambda = 0.65$

Найти: $y(x)$, \bar{v}_M , \bar{a}_M , \bar{v}_K , \bar{a}_K , \bar{v}_L , \bar{a}_L

Решение: Положение точки **M** $\bar{r} = \bar{r}_C + \bar{\rho}$ $\rho = \lambda r$

В проекциях на оси **Oxy** $x = x_C + \rho \cos \varphi$
 $y = r + \rho \sin \varphi$



Уравнения связи $M'_0 M = OP = x_C$ $x_C = r \left(\varphi - \frac{3}{2} \pi \right) \Rightarrow \varphi = \frac{3}{2} \pi + \frac{v_C t}{r}$



Уравнения движения $x = v_C t + \rho \sin \left(\frac{v_C t}{r} \right)$
 $y = r - \rho \cos \left(\frac{v_C t}{r} \right)$

– Уравнения траектории в параметрическом виде

Скорость точки $v_x = v_C + v_C \lambda \cos \left(\frac{v_C t}{r} \right)$ $v_y = v_C \lambda \sin \left(\frac{v_C t}{r} \right)$

Ускорение точки $a_x = -\frac{v_C^2}{r} \lambda \sin \left(\frac{v_C t}{r} \right)$ $a_y = +\frac{v_C^2}{r} \lambda \cos \left(\frac{v_C t}{r} \right)$



Кинематика точки кулисного механизма

Дано: $\varphi = \omega t$, $O_1A = r$, $OB = 3r$, $\omega = \omega_m [\text{ }^{-1}]$, $\omega = 20 [\text{ }]$, $\omega = 30 [\text{ }]$

Найти: $(\boxtimes) B$, $y(x)$, \bar{v} , \bar{a}

Решение: $(\boxtimes) A$ Уравнения движения $\bar{r}_A = \overline{OA} = \overline{OO_1} + \overline{O_1A}$

$$x_A = d + r \cos \varphi, \quad y_A = r \sin \varphi$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r \sin \varphi}{d + r \cos \varphi}$$

$$r_A = \sqrt{(d + r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}$$

$(\boxtimes) B$ Уравнения движения $\bar{r}_B = \overline{OB}$

$$x_B = 3r \cos \psi, \quad y_B = 3r \sin \psi$$

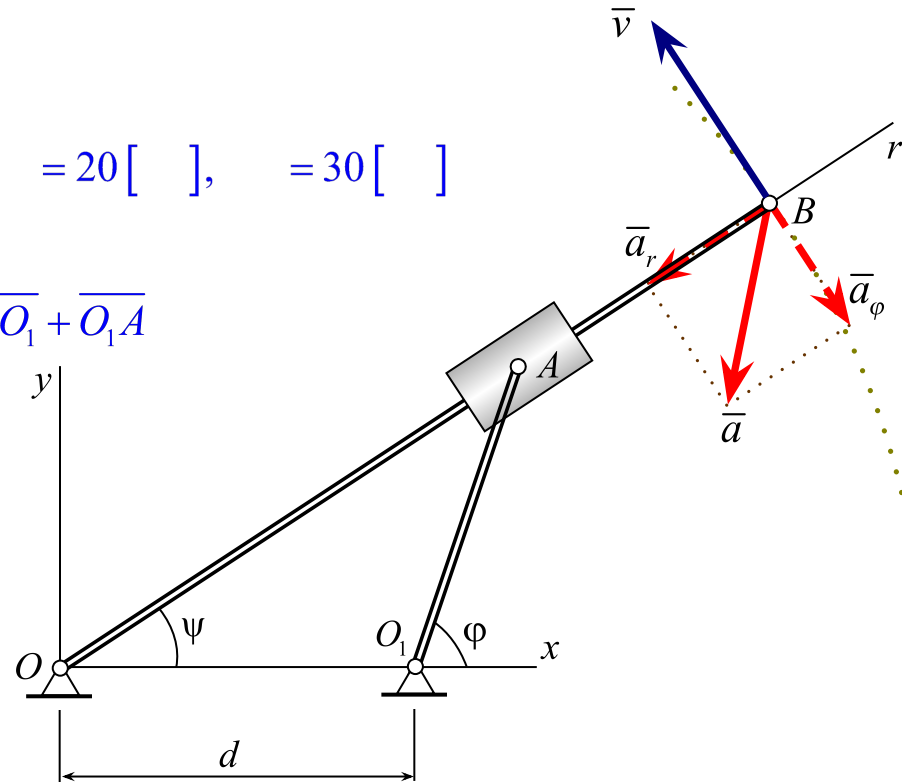
Уравнение траектории $x_B^2 + y_B^2 = 9r^2$ дуга окружности радиуса $3r$

Полярные координаты: r, ψ Уравнения движения $r_B = 3r$

Скорость точки $v_r = \dot{r}_B = 0, \quad v_\varphi = r_B \dot{\psi} = 3r \dot{\psi}, \quad v_B = 3r \dot{\psi} \quad [\text{cm/c}]$

Ускорение точки $a_r = \ddot{r}_B - r_B \dot{\psi}^2 = -3r \dot{\psi}^2$

$$a_\psi = r_B \ddot{\psi} + 2\dot{r}_B \dot{\psi} = 3r \ddot{\psi} \quad a_B = 3r \sqrt{\dot{\psi}^2 + \ddot{\psi}^2} \quad [\text{cm/c}]$$



Кинематика точки в криволинейных координатах

Дано: $x = R \cos^2\left(\frac{1}{2}kt\right)$, $y = \frac{1}{2}R \sin(kt)$, $z = R \sin\left(\frac{1}{2}kt\right)$, $k = \pi \left[\text{с}^{-1} \right]$, $R = 1 \left[\text{м} \right]$

Найти: \vec{v} , \vec{a}

Решение: **Декартовы координаты**

Траектория точки – пересечение поверхностей

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \left(x - \frac{1}{2}R\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}R^2$$



Скорость точки

$$v_x = \dot{x} = -\frac{1}{2}Rk \sin(kt), \quad v_y = \dot{y} = \frac{1}{2}Rk \cos(kt), \quad v_z = \dot{z} = \frac{1}{2}Rk \cos\left(\frac{1}{2}kt\right)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{1}{2}Rk \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{1}{2}kt\right)}$$

Ускорение точки

$$a_x = \dot{v}_x = -\frac{1}{2}Rk^2 \cos(kt), \quad a_y = \dot{v}_y = -\frac{1}{2}Rk^2 \sin(kt), \quad a_z = \dot{v}_z = \frac{1}{4}Rk^2 \sin\left(\frac{1}{2}kt\right)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \frac{1}{2}Rk^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{1}{2}kt\right)}$$



Кинематика точки в криволинейных координатах

Дано: $x = R \cos^2\left(\frac{1}{2}kt\right)$, $y = \frac{1}{2}R \sin(kt)$, $z = R \sin\left(\frac{1}{2}kt\right)$, $k = \pi \left[\text{с}^{-1} \right]$, $R = 1 \left[\text{м} \right]$

Найти: \bar{v} , \bar{a}

Решение: **Сферические координаты**

Уравнения движения $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}kt\right)$ $\operatorname{tg} \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}kt\right) \Rightarrow$

$$r = R, \quad \varphi = \frac{1}{2}kt, \quad \theta = \frac{1}{2}kt$$



Уравнение траектории $\rho = R, \quad \varphi = \theta$

Скорость точки $v_r = \dot{r} = 0$, $v_\varphi = r\dot{\varphi} \cos \theta = \frac{1}{2}Rk \cos\left(\frac{1}{2}kt\right)$, $v_\theta = \rho\dot{\theta} = \frac{1}{2}Rk$

$$v = \frac{1}{2}Rk \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{1}{2}kt\right)}$$

Ускорение точки $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{4}Rk^2 \left[1 + \cos^2\left(\frac{1}{2}kt\right) \right]$,

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} \cos \theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \cos \theta + 2\rho\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta = -\frac{1}{2}Rk^2 \sin\left(\frac{1}{2}kt\right),$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}Rk^2 \sin(kt)$$



Кинематика точки в криволинейных координатах

Дано: $x = R \cos^2\left(\frac{1}{2}kt\right)$, $y = \frac{1}{2}R \sin(kt)$, $z = R \sin\left(\frac{1}{2}kt\right)$, $k = \pi \left[\text{с}^{-1} \right]$, $R = 1 \left[\text{м} \right]$

Найти: \bar{v} , \bar{a}

Решение: **Цилиндрические координаты**

Уравнения движения $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = R \cos\left(\frac{1}{2}kt\right)$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}kt\right)$ $z = R \sin\left(\frac{1}{2}kt\right) \Rightarrow$

$$\rho = R \cos\left(\frac{1}{2}kt\right), \quad \varphi = \frac{1}{2}kt, \quad z = R \sin\left(\frac{1}{2}kt\right)$$



Уравнение траектории $\rho^2 + z^2 = R^2, \quad \rho = R \cos \varphi$

Скорость точки $v_\rho = \dot{\rho} = -\frac{1}{2}kR \sin\left(\frac{1}{2}kt\right)$, $v_\varphi = \rho \dot{\varphi} = \frac{1}{2}Rk \cos\left(\frac{1}{2}kt\right)$, $v_z = \dot{z} = \frac{1}{2}Rk \cos\left(\frac{1}{2}kt\right)$.

$$v = \frac{1}{2}Rk \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{1}{2}kt\right)}$$

Ускорение точки $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{4}Rk^2 \left[1 + \cos^2\left(\frac{1}{2}kt\right) \right]$,

$$a_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) = -\frac{1}{4}Rk^2 \sin\left(\frac{1}{2}kt\right),$$

$$a_z = \ddot{z} = \frac{1}{8}Rk^2 \sin\left(\frac{1}{2}kt\right)$$

