

Механика деформируемого твёрдого тела

<https://vk.com/mehss>

Литература

1. *Садовский Б.Н., Прядко И.Н.
Кинематика. Конспекты лекций.*
2. *Маркеев А.П. Теоретическая механика.
Москва: ЧеРо, 1999.*
3. *Бухгольц Н.Н. Основной курс
теоретической механики: в 2-х ч.
М.: Наука, 1965.*

(см. http://vk.com/t_meh)

§ 11. Осевые кинетические моменты системы материальных точек

Рассмотрим систему матер. точек $\Sigma_A = \{A_1, \dots, A_n\}$,
 m_k — масса т. A_k , $r_k = r_{OA_k} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ — координатный
 вектор т. A_k относительно шеру-а ДСО S , $v_k = \dot{r}_k$.
 Тогда $M = \sum_{k=1}^n M_k = \sum_{k=1}^n r_k \times m_k v_k$ — инерционный момент
 системы Σ_A ; M — элемент \mathbb{R}^3 (зависит от времени t), т.е.

$M = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$. Координаты M_x, M_y, M_z называются

осевыми инерционными моментами системы Σ_A .

Выразим M_z через цилиндрич.-е коорд.-ты.

1) Сначала рассмотрим M_z для одной т. $A(x, y, z)$:

$$M = M_A = r \times m v, \text{ где } r = r_{OA}, v = \dot{z};$$

$$M_z = \langle M, e_z \rangle, \text{ где } e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Цилиндрич. координ.-м: (ρ, φ, z) , $\rho = |OA'|$,

$\varphi = (\vec{Ox}, \vec{OA'})_H$, A' - проекция A на Oxy ;

$$e_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\varphi = \varphi(t)$ - зависит от времени t ; $r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''} =$

$$= \rho \cdot e_\rho + z \cdot e_z$$

(см. рис. 1 и 2).

Тогда $v = \dot{z} = \dot{\rho} e_\rho + \rho \cdot \dot{e}_\rho + \dot{z} e_z =$

$$= \dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\varphi} \cdot e_\varphi + \dot{z} e_z;$$

$$r \times v = (\rho \cdot e_\rho + z \cdot e_z) \times (\dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\varphi} \cdot e_\varphi + \dot{z} \cdot e_z) =$$

$$= \rho^2 \dot{\varphi} \cdot e_z - \rho \dot{z} \cdot e_\varphi + \dot{\rho} z \cdot e_\varphi - z \dot{\rho} \dot{\varphi} \cdot e_\rho$$

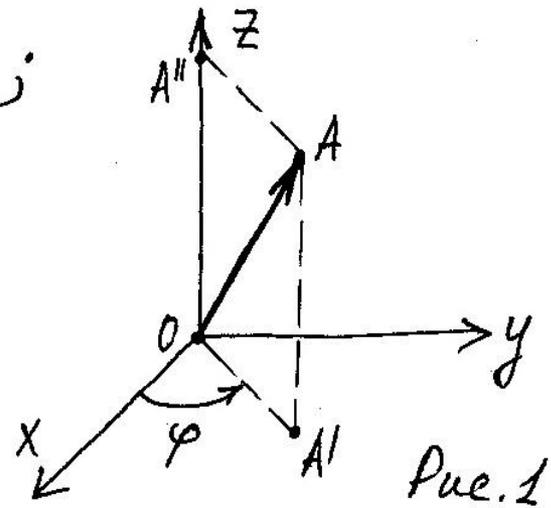


Рис. 1

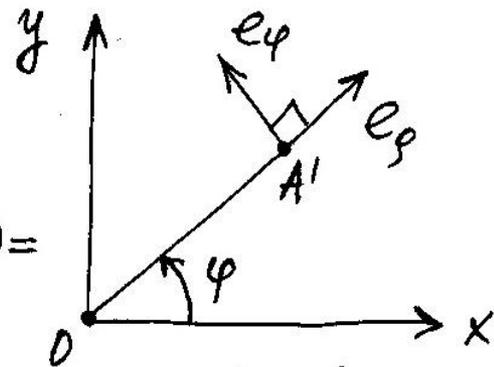
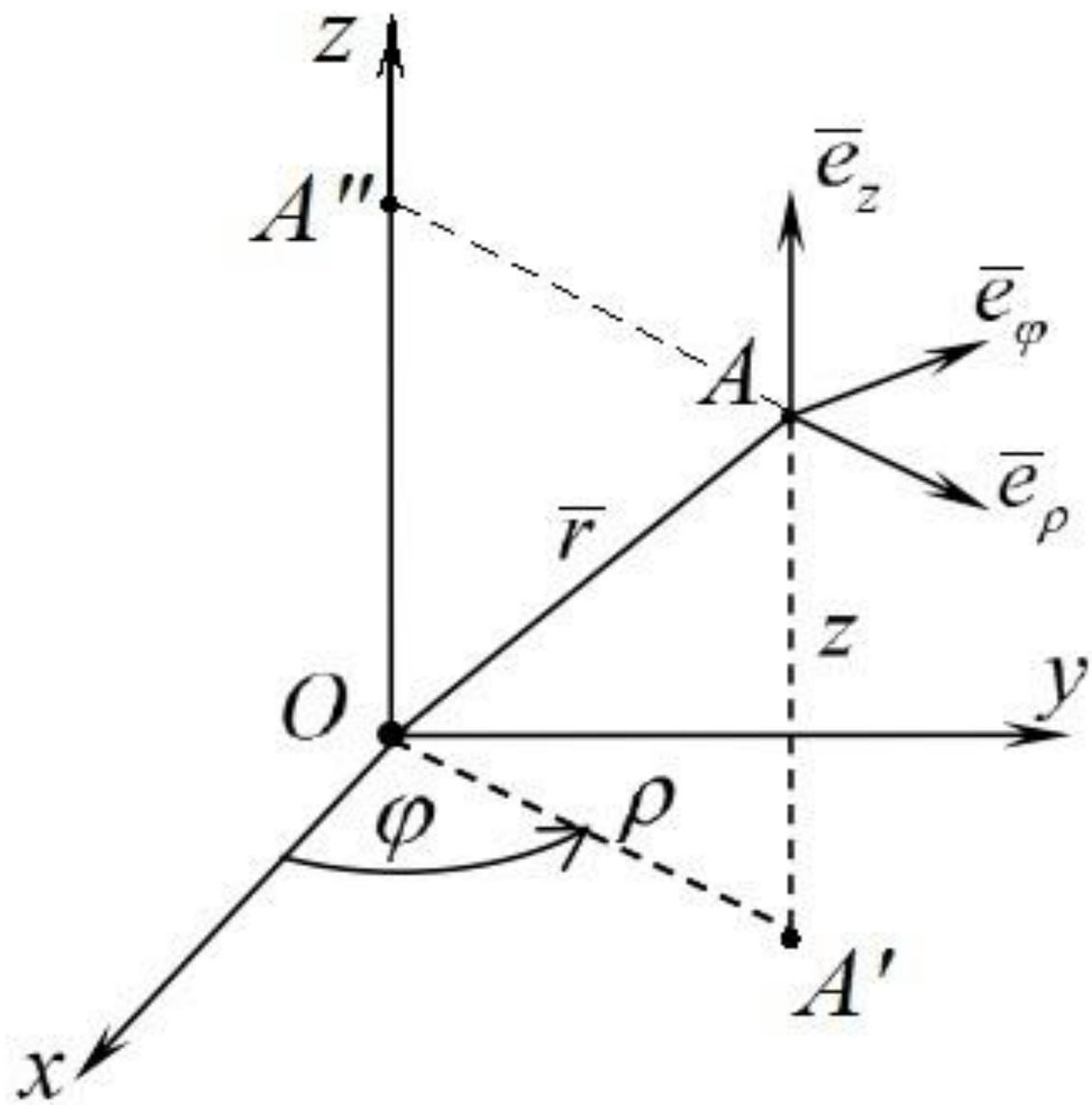
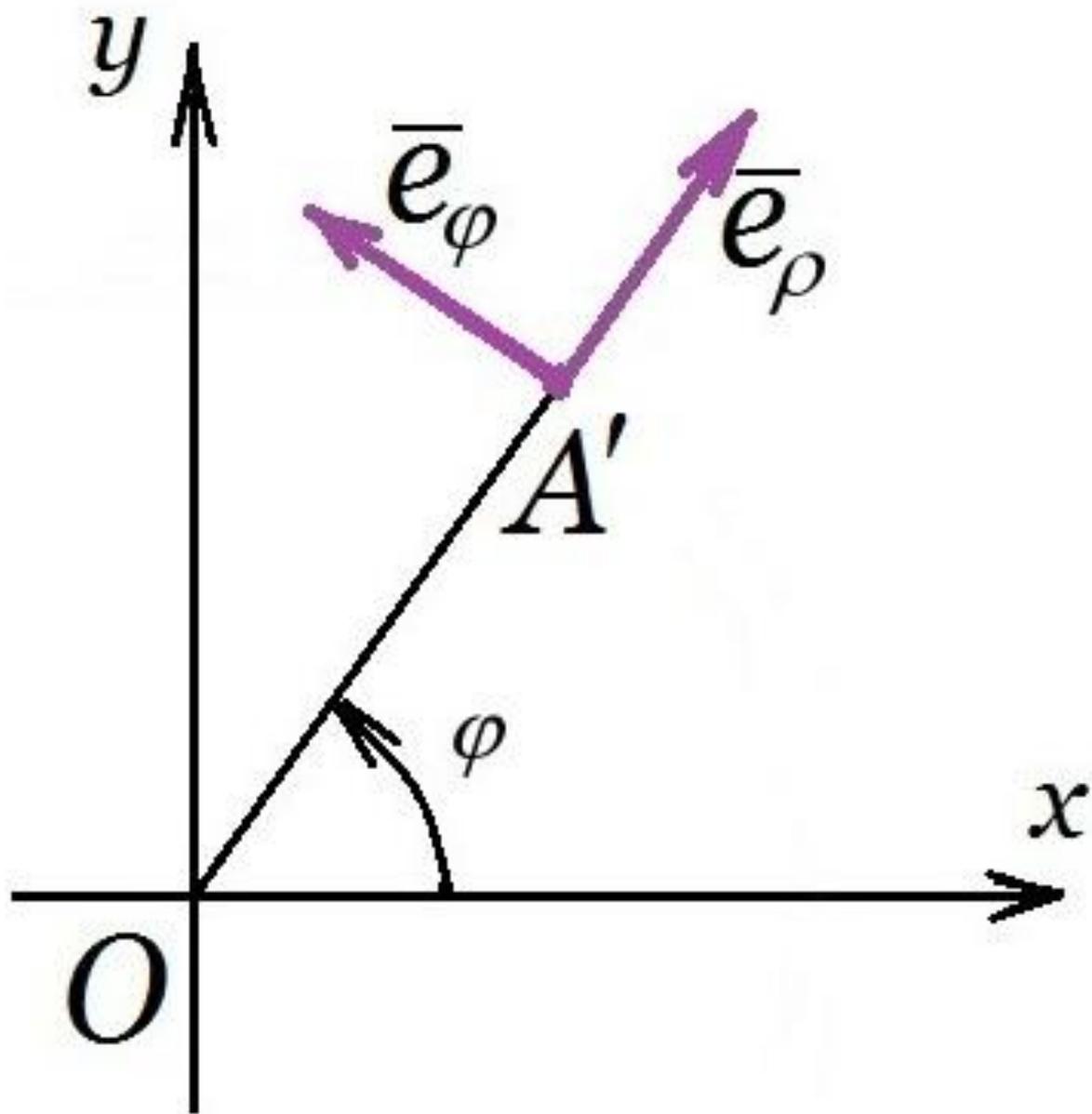


Рис. 2

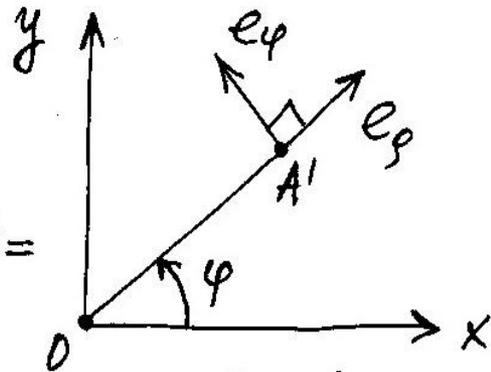




Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{z}} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z = \\ &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z ; \end{aligned}$$

(см. рис. 1 и 2).



$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{v} &= (\rho \cdot \mathbf{e}_\rho + z \cdot \mathbf{e}_z) \times (\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \cdot \mathbf{e}_z) = \\ &= \rho^2 \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_z - \rho \dot{z} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \rho \dot{z} \cdot \mathbf{e}_\varphi - z \rho \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\rho \end{aligned}$$

Рис. 2

(с учетом того, что $\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\rho = 0$, $\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho$). След-но, $M_z = \langle M, \mathbf{e}_z \rangle = m \langle \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \mathbf{e}_z \rangle =$

$$= m \rho^2 \dot{\varphi} \langle \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z \rangle = m \rho^2 \dot{\varphi} \quad (\text{т.к. } \mathbf{e}_\rho \perp \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varphi \perp \mathbf{e}_z).$$

Итак, получим:
$$\boxed{M_z = m \rho^2 \dot{\varphi}} \quad (1)$$

2) Рассмотрим M_z для системы точек Σ_A :

$$M_z = \sum_{k=1}^n (M_k)_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 \dot{\varphi}_k \quad (2)$$

$$r_k = |OA'_k|$$

A'_k - проекция A_k на Oxy

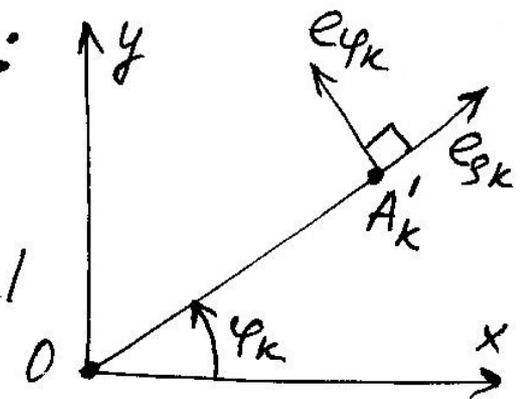


Рис. 3

3) Рассмотрим скорость изменения момента M_z :

$$\dot{M}_z(t) = \frac{d}{dt} \langle M(t), \underset{\text{const}}{e_z} \rangle = \langle \dot{M}(t), e_z \rangle =$$

$$= \left\langle \underbrace{\sum_{k=1}^n r_k \times F_k^e}_{\text{сумма моментов всех внешних сил системы } \Sigma_A(t)}, e_z \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle \underbrace{r_k}_a \times \underbrace{F_k^e}_b, \underbrace{e_z}_c \rangle \equiv$$

сумма моментов всех внешних сил системы $\Sigma_A(t)$

(не путается при циклической перестановке)

Стандартное правило: $\langle a \times b, c \rangle = (a, b, c) \stackrel{\downarrow}{=} (c, a, b) = \langle c \times a, b \rangle.$

3) Рассмотрим скорость изменения момента M_z :

$$\dot{M}_z(t) = \frac{d}{dt} \langle M(t), \underset{\text{const}}{e_z} \rangle = \langle \dot{M}(t), e_z \rangle =$$

$$= \left\langle \underbrace{\sum_{k=1}^n r_k \times F_k^e}_{\text{сумма моментов всех внешних сил системы } \Sigma_A(t)} , e_z \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle \underbrace{r_k}_a \times \underbrace{F_k^e}_b , \underbrace{e_z}_c \rangle \equiv$$

(не уменьшается при циклической перестановке)

Смешанное произвед-е: $\langle a \times b, c \rangle = (a, b, c) \stackrel{\downarrow}{=} (c, a, b) =$
 $= \langle c \times a, b \rangle.$

$$\equiv \sum_{k=1}^n \langle \underbrace{e_z}_c \times \underbrace{r_k}_a , \underbrace{F_k^e}_b \rangle = \sum_{k=1}^n \rho_k \langle e_{\varphi_k}, F_k^e \rangle$$

$$(e_z \times r_k = e_z \times (\rho_k e_{\rho_k} + z_k e_z) = \rho_k (e_z \times e_{\rho_k}) = \rho_k \cdot e_{\varphi_k})$$

Итак, мы получили след-ю формулу:

$$\dot{M}_z = \sum_{k=1}^n \rho_k \langle e_{\varphi_k}, F_k^e \rangle \quad (3)$$

Итак, мы получили след-ю формулу:

$$\dot{M}_z = \sum_{k=1}^n \rho_k \langle e_{\varphi_k}, F_k^e \rangle \quad (3)$$

Заметим, что вектор $\mu_k = \rho_k \times F_k^e$ — момент силы F_k^e относительно центра O (начала координат);

$$\mu_k = \begin{pmatrix} (\mu_k)_x \\ (\mu_k)_y \\ (\mu_k)_z \end{pmatrix}, \quad (\mu_k)_z = \langle \mu_k, e_z \rangle = \langle \rho_k \times F_k^e, e_z \rangle -$$

момент силы F_k^e относительно оси Oz .

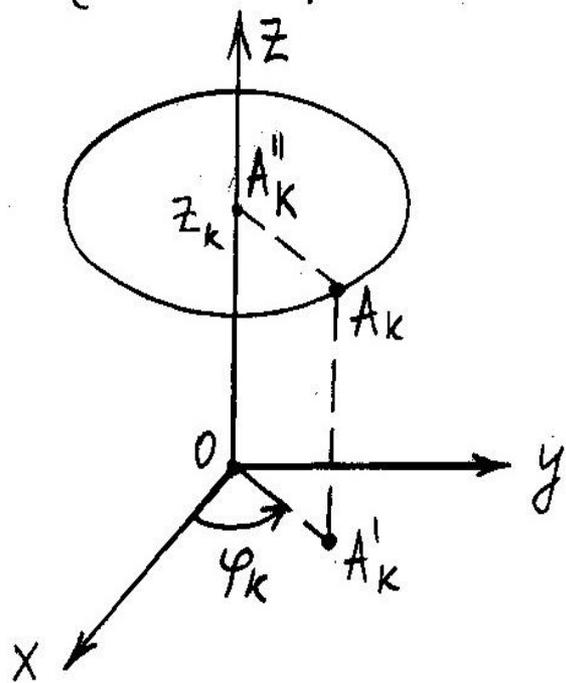
M_k доказали след-ю теорему.

Теорема. Скорость изменения осевого моментного момента M_z равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно оси Oz .

§ 12. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

Рассмотрим твердое тело T — неизменяемую систему матер. точек $\{A_1, \dots, A_n\}$. Пусть тело T вращается вокруг оси Oz некоторой шеруальной системы отсчета, т.е. для $\forall t, A_k \in T$ $z_k(t) = \text{const}$ и $|OA'_k| = \text{const}$

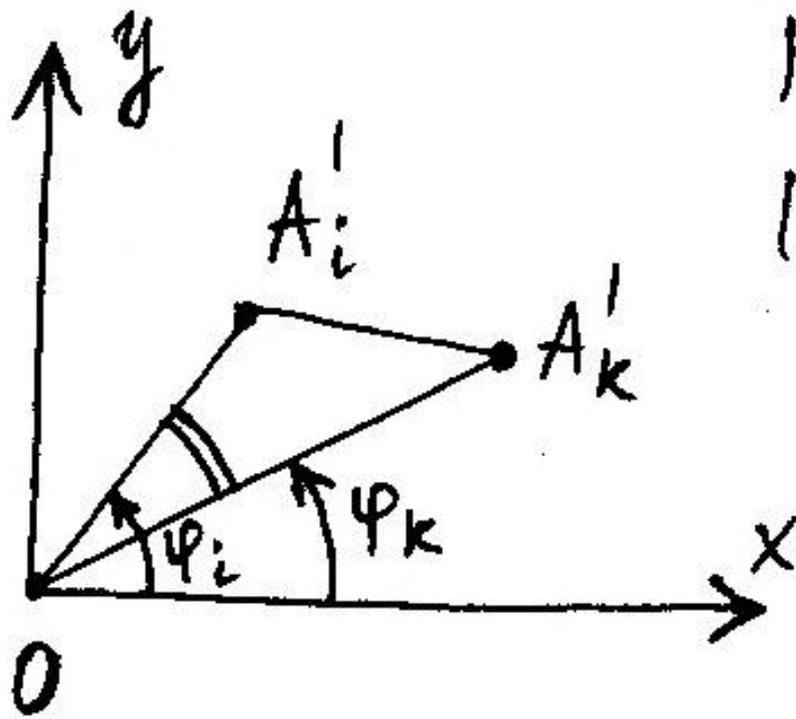
(A'_k — проекция A_k на Oxy). Точка A_k движется по окружности радиуса $z_k = |OA'_k|$ с центром в т. $A''_k(0, 0, z_k)$, лежащей в плоскости $z = z_k$ (\parallel к Oxy).



Угловая скорость тела T

$\omega(t) = \omega_k(t) = \dot{\varphi}_k(t)$ не зависит от выбора точки $A_k \in T$

(для \forall -х точек $A_i, A_k \in T$ $\varphi_i - \varphi_k = \text{const} \Rightarrow \dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}_k$)



$$|OA'_i| = \rho_i = \text{const},$$

$$|OA'_k| = \rho_k = \text{const},$$

$$|A'_i A'_k| = \text{const}$$

\Downarrow

$$|A'_i A'_k| = \text{const}$$

След-во, при $\varphi_i - \varphi_k = \text{const}$.

Рассмотрим осевой инерционный момент тв. тела T :

$$M_z = \sum_{k=1}^n \rho_k^2 m_k \dot{\varphi}_k = \sum_{k=1}^n \rho_k^2 m_k \omega =$$

$$= \omega \sum_{k=1}^n m_k \rho_k^2 \quad (1)$$

(криво́й $\rho_k = \text{const} \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \rho_k^2 = \text{const}$;

$\omega = \omega(t)$ — зависит от времени).

Постоянная величина $\sum_{k=1}^n m_k r_k^2 \stackrel{\text{обозн.}}{=} I_z$ называется (2)

моментом инерции твердого тела T относительно оси Oz .

$$\text{Из (1) и (2)} \Rightarrow M_z = \omega \cdot I_z \Rightarrow \dot{M}_z(t) = \dot{\omega}(t) \cdot I_z$$

Формула (3) из § 11: $\dot{M}_z = \sum_{k=1}^n \delta_k \langle e_{\varphi_k}, F_k^e \rangle$ const

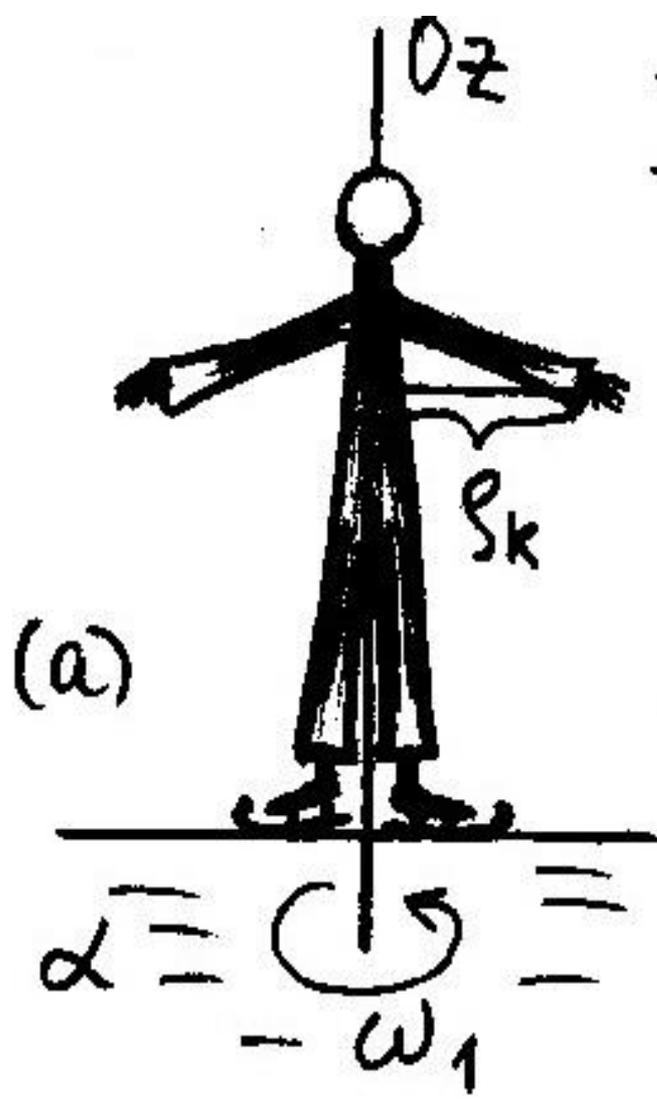
След-но, $\dot{\omega} I_z = \sum_{k=1}^n \delta_k \langle e_{\varphi_k}, F_k^e \rangle$ (3)

Итак, мы доказали след-ю теорему.

Теорема. При вращении твердого тела вокруг оси Oz произведение углового ускорения тела на момент инерции тела относительно Oz равно сумме моментов всех внешних сил тв. тела относительно Oz .

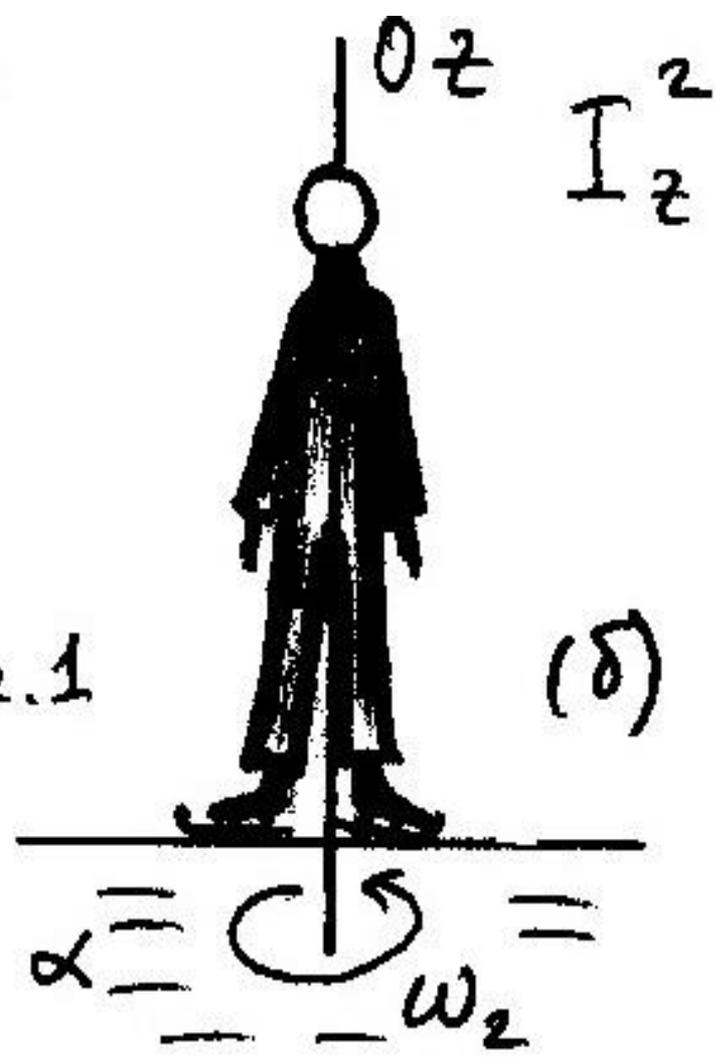
Пример

Фигурист совершает вращение сначала с поднятыми руками, затем с опущенными. Как при этом изменится его угловая скорость? Трением и сопротивлением воздуха пренебрегаем.



I_z^1

Prac. 1



I_z^2

(b)

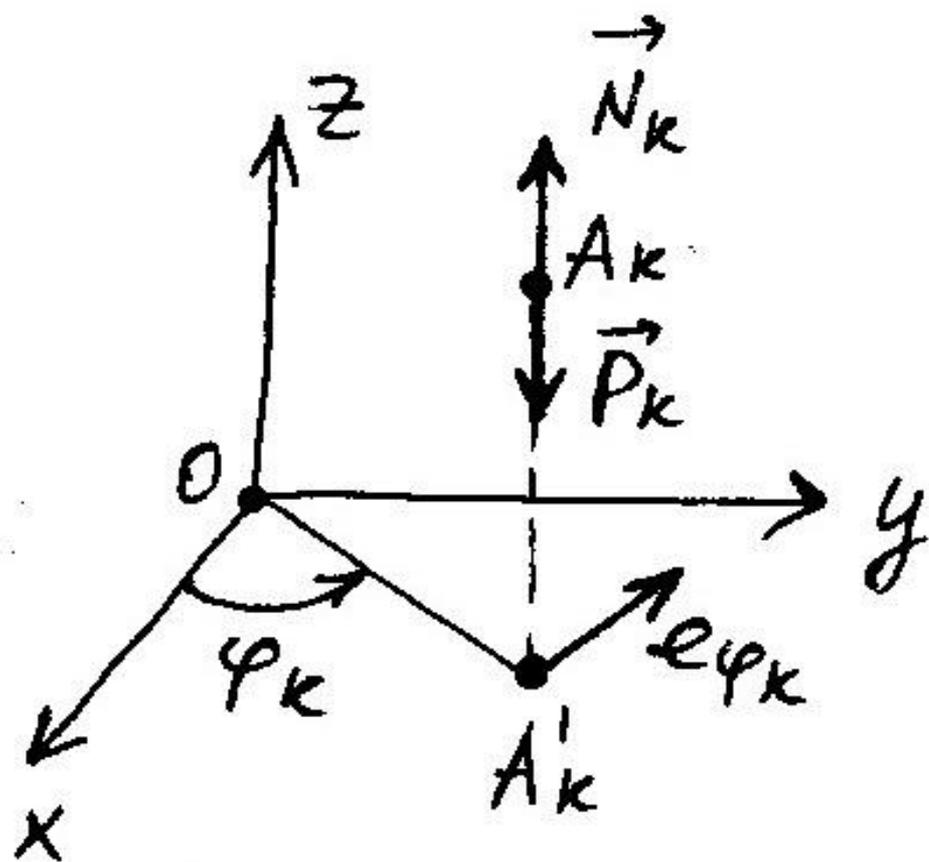
Как соотносятся ω_1 и ω_2 ?

Ось вращения $Oz \perp \alpha$ — плоскость льда.

Тело фишурнета — система матер. точек
(молекул).

Скорость изменения осевого момента
момента M_z данной системы:

$$\dot{M}_z = \sum_{k=1}^n \delta_k \langle e_{\varphi k}, F_k^e \rangle \quad (\text{см. § 11}).$$



$$Oxy = d$$

$$g_k = |\theta A'_k|$$

Рис. 2

Пусть $Oxy = \alpha$.

Каждую точку A_k тела \mathcal{G} -го
две внешние силы: сила тяжести \vec{P}_k
и реакция опоры \vec{N}_k , действующая
вертикально. След-но, $\forall k$
$$\vec{F}_k^e = \vec{P}_k + \vec{N}_k \perp Oxy.$$

Вектор $\vec{e}_{\varphi_k} \parallel Oxy \Rightarrow \vec{F}_k^e \perp \vec{e}_{\varphi_k}$ (см. рис. 2) $\Rightarrow \langle \vec{e}_{\varphi_k}, \vec{F}_k^e \rangle = 0$

След-но, $\dot{M}_z = 0 \Rightarrow M_z = \text{const}$ (в течение того промежутка времени, пока фигурист вращается) $\forall k$.

Случай 1 (руки опущены) Будем рассм-ть тело фигуриста как твердое тело. Имеем: $M_z = \omega_1 \cdot I_z^1$, $I_z^1 = \text{const}$ — момент инерции т. тела.

Случай 2 (руки опущены) Тело фигуриста — другое твердое тело, I_z^2 — его момент инерции, $I_z^2 \neq I_z^1$, $I_z^2 = \text{const}$.
В этом случае также $M_z = \omega_2 I_z^2$

Т.к. M_z не меняется (не зависит от положения рук), то $\omega_1 I_z^1 = \omega_2 I_z^2$ (*). Т.к. $I_z = \sum_{k=1}^n z_k^2 m_k$, то $I_z^1 > I_z^2$ (где рук z_k в первом случае больше).

Тогда $\omega_1 < \omega_2$

Моменты инерции твердого тела с точки зрения МСС.

Если тв. тело рассматривается как сплошная среда, то его моменты инерции вычисляются по след-м формулам:

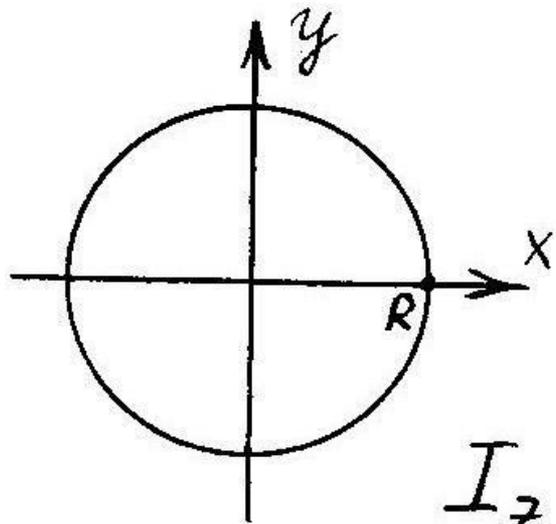
$$I_x = \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_y = \iiint_{(V)} (x^2 + z^2) \rho dV, \quad I_z = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \rho dV,$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность вещества.

Задачи

N1. Найти момент инерции однородного тонкого круглого диска радиуса R .



Масса равномерно распределена по площади диска; $\tilde{\rho}(x, y) = \text{const}$.

$$\underline{I_z} = \iint_{(P)} (x^2 + y^2) \tilde{\rho} dP \quad \text{①}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha, \\ y = \rho \sin \alpha; \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\alpha \\ y'_\rho & y'_\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\rho \sin \alpha \\ \sin \alpha & \rho \cos \alpha \end{vmatrix} = \rho;$$

$$\text{①} \quad \tilde{\rho} \iint_{(P)} \rho^3 dP = \tilde{\rho} \int_0^R d\alpha \int_0^R \rho^3 d\rho = \tilde{\rho} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} =$$

$$\textcircled{=} \tilde{\rho} \iiint_{(P)} \rho^3 dP = \tilde{\rho} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \rho^3 d\rho = \tilde{\rho} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} =$$

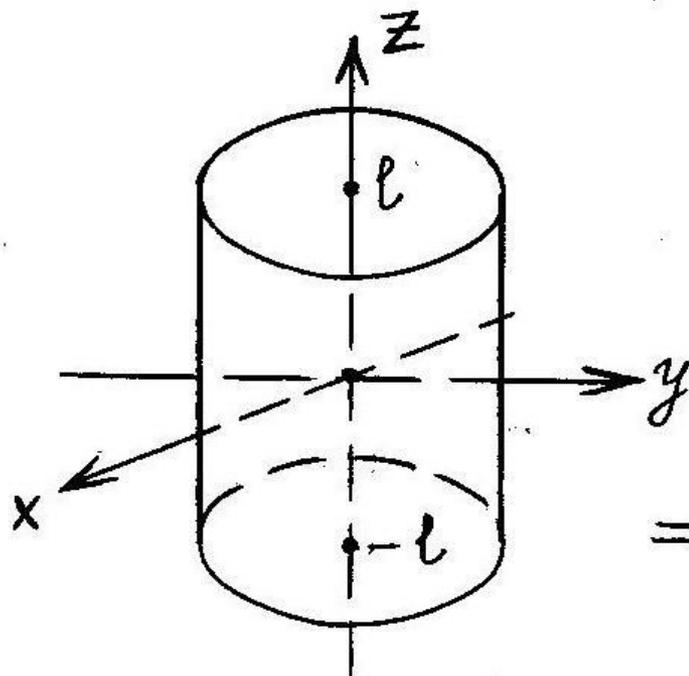
$$= \tilde{\rho} \frac{\pi R^4}{2} \textcircled{=} \tilde{\rho} = \frac{M}{\pi R^2} \textcircled{=} \frac{MR^2}{2}$$

$$\underline{I_x} = \tilde{\rho} \iiint_{(P)} (y^2 + z^2) dP = \tilde{\rho} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \rho^3 \sin^2 \alpha d\rho \textcircled{=}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \textcircled{=} \tilde{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho =$$

$$= \tilde{\rho} \cdot \frac{\pi R^4}{4} = \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi R^4}{4} = \frac{MR^2}{4}; \quad \underline{I_y} = \frac{MR^2}{4}$$

N2. Найти момент инерции однородного круглого цилиндра (см. рис.).



R - радиус основания;
 $2l$ - высота.

$$I_z = \tilde{\rho} \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dV =$$

$$= \tilde{\rho} \int_{-l}^l dz \iint_{(P)} (x^2 + y^2) dx dy =$$

(P) кр. N1

$$= \tilde{\rho} \cdot 2l \cdot \frac{\pi R^4}{2} \quad \text{⊖}$$

$$V = \pi R^2 \cdot 2l; \quad \tilde{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{M}{2\pi R^2 l}$$

$$\text{⊖} \frac{MR^2}{2}$$

$$\underline{I_x} = \tilde{\rho} \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) dx dy dz =$$

$$= \tilde{\rho} \int_{-l}^l dz \iint_{(P)} (y^2 + z^2) dx dy \quad \text{①} \quad y^2 = \rho^2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{②} \quad \tilde{\rho} \int_{-l}^l dz \iint_{(P)} (\rho^2 \sin^2 \alpha + z^2) \rho d\rho d\alpha =$$

(au. N1)

$$= \underline{M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)}; \quad \underline{I_y = I_x.}$$

Три способа сдачи зачета

1. Законспектировать вопросы

3, 5, 6, 7, 8, 9

2. Законспектировать вопросы 7, 8, 9

и решить задачу

3. Законспектировать вопросы 7, 8, 9 и

набрать одну страницу рукописи

(указанную преподавателем) в редакторе

Word

(в соответствии с образцом)