Разбор заданий очного тура Олимпиады ПРОФИ - 2016

1	Все решения уравнения $\sin 3x + 1 = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ определяются формулой, $(n \in Z)$
	$\boxed{1}$ $\frac{\pi}{3}n$ $\boxed{2}$ $\frac{\pi}{2}n$ $\boxed{3}$ $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$ $\boxed{4}$ $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$ $\boxed{5}$ $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$

Решение.

Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x = \frac{\pi}{3}n \\ x \neq \frac{\pi}{2}k \end{cases}$, где $n, k \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$

2 Чему равно значение $f\left(\frac{1}{\log_6 10}\right)$, если $f(x) = 36 \cdot 10^{-2x} + 0,5 \cdot 10^{x}$

$\boxed{1}$ 2 $\boxed{2}$ 5 $\boxed{3}$ 4 $\boxed{4}$ 7 $\boxed{5}$ 39

Решение.

$$f\left(\frac{1}{\log_6 10}\right) = f(\lg 6) = 36 \cdot 10^{-2\lg 6} + \frac{1}{2} \cdot 10^{\lg 6} = \frac{36}{36} + \frac{1}{2} \cdot 6 = 4$$

Ответ: 4.

3 Вычислить $-\cos 105^\circ\sqrt{\dfrac{\cos 195^\circ}{\cos 105^\circ}} - \cos 195^\circ\sqrt{\dfrac{\cos 105^\circ}{\cos 195^\circ}}$

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ -1 $\boxed{3}$ -2 $\boxed{4}$ 0 $\boxed{5}$ 2

Решение.

$$-\cos105^0\sqrt{\frac{\cos195^0}{\cos105^0}} - \cos195^0\sqrt{\frac{\cos105^0}{\cos195^0}} =$$

$$= \sqrt{\cos105^0 \cdot \cos195^0} + \sqrt{\cos105^0 \cdot \cos195^0} =$$

$$= 2\sqrt{\sin15^0 \cdot \cos15^0} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sin30^0} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ответ: 1

4 Вычислить $\dfrac{10\sqrt{5}}{\sqrt{38-12\sqrt{10}}+\sqrt{18}}$

$\boxed{1}$ 3 $\boxed{2}$ $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{26}$ $\boxed{3}$ 5 $\boxed{4}$ $\dfrac{4\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{62}$ $\boxed{5}$ -5

Решение.

$$\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2\left(19-6\sqrt{10}\right)}+\sqrt{18}}=\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2\left(\sqrt{10}-3\right)^2}+3\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{10}-3\right)+3\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=5$$

Ответ: 5

5	Произведение $\lg 5 \cdot \log_5 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_9 100$ равно
	1 $0,5$ **2** 4 **3** 1 **4** 2 **5** $0,25$

Решение. $$lg5 \cdot \frac{lg2}{lg5} \cdot \frac{lg3}{lg4} \cdot \frac{lg100}{lg9} = lg5 \cdot \frac{lg2}{lg5} \cdot \frac{lg3}{2lg2} \cdot \frac{2lg10}{2lg3} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5.

6 Имеются два сплава золота и серебра; в одном из них количество этих металлов находится в отношении 2 : 3, в другом - в отношении 3 : 7. Возможно ли из этих сплавов составить новый сплав так, чтобы золото и серебро содержались бы в весовом отношении 5 : 11? Если это возможно, то в каком отношении надо взять эти сплавы?

$\boxed{1}$ невозможно $\boxed{2}$ 1 : 2 $\boxed{3}$ 1 : 1 $\boxed{4}$ 1 : 3 $\boxed{5}$ 1 : 7

Решение.

Пусть масса первого сплава – a, второго –b, тогда количества золота в первом и втором сплавах равно соответственно $\frac{2}{5}a$, $\frac{3}{10}b$. Составим уравнение.

$$\frac{2}{5}a + \frac{3}{10}b = \frac{5}{16}(a+b),$$

$$7a = 1b,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{7}$$

Ответ: 1:7.

7	Если в арифметической прогрессии $\frac{a_{2015}}{a_{35}} = 61$, то выражение $\frac{a_{126}}{a_{33}}$ равно

$\boxed{1}$ 5 $\quad$ $\boxed{2}$ 6 $\quad$ $\boxed{3}$ 4 $\quad$ $\boxed{4}$ 11 $\quad$ $\boxed{5}$ 3

Решение.

$$a_1 + 2014d = 61 \cdot (a_1 + 34d),$$

$$a_1 = -d,$$

$$\frac{a_{126}}{a_{33}} = \frac{a_1 + 125d}{a_1 + 32d} = \frac{124d}{31d} = 4$$

Ответ: 4.

8	Количество целых решений неравенства $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \geqslant -0,5$ на промежутке $[0; 2\pi]$ равно
	1 5 **2** 3 **3** 6 **4** 4 **5** 7

Решение.

$$cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \geq -0{,}5,$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n \leq 2x+\frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}+2\pi n,$$

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6}+\pi n$$

С учетом условия задания, что $x \in [0; 2\pi]$, решение неравенства имеет вид:

$$\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$$

Целые числа, удовлетворяющие неравенству:0; 2; 3; 5; 6

Ответ: 5

9	Все значения параметра a, при которых уравнение $(2x-a)\lg(x+2)=0$ имеет только один корень, образуют множество $\boxed{1}$ $[-4;-2]$ $\boxed{2}$ $(-\infty;-2]$ $\boxed{3}$ $(-\infty;-4]\bigcup\{-2\}$ $\boxed{4}$ $\{-2\}$ $\boxed{5}$ $(-\infty;-4]$

Решение.

Уравнение эквивалентно системе : $\begin{cases} x+2>0 \\ \left[\begin{aligned} 2x-a=0 \\ \lg(x+2)=0 \end{aligned}\right. \end{cases}$,

$$\begin{cases} x>-2 \\ \left[\begin{aligned} x=\frac{a}{2} \\ x=-1 \end{aligned}\right. \end{cases},$$

Решение будет единственным когда : $\left[\begin{aligned} \frac{a}{2}=-1 \\ \frac{a}{2}\le -2 \end{aligned}\right.$,

$$a\in(-\infty;\,-4]\cup\{-2\}$$

Ответ: $(-\infty;\,-4]\cup\{-2\}$.

10 Если $\dfrac{3\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-3\sin\frac{\alpha}{2}}=4$, то угол α оканчивается в четверти

1 1 **2** 2 **3** 4 **4** однозначно определить невозможно **5** 3

Решение.

$\frac{2tg\frac{\alpha}{2}+3}{1-3tg\frac{\alpha}{2}}=4,\ \ tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{14}>0,\ \ \frac{\alpha}{2}\in\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ \ \alpha\in(2\pi n;\pi+2\pi n),\ n\in Z$ т.е. I или II четверть.

$$tg\alpha=\frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1-\ tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2/14}{1-1/196}>0$$

Ответ: 1 четверть.

2-й способ.

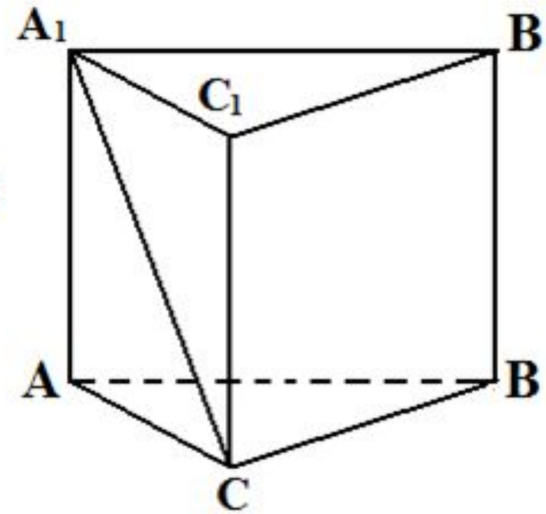
$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{14},\ 0<\frac{1}{14}<1,\ \frac{\alpha}{2}\in\left(\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right),\ \alpha\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z$ т.е. I четверть.

Ответ: 1 четверть.

11 Если боковое ребро правильной треугольной призмы в $\sqrt{3}$ раз больше стороны основания, то угол между стороной основания и не пересекающей ее диагональю боковой грани равен

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\arccos 0,25$ 3) $\frac{\pi}{6}$ 4) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$ 5) $\frac{\pi}{3}$

Решение.



Пусть $AB = a,\ AA_1 = a\sqrt{3}$, тогда $A_1C = 2a$.

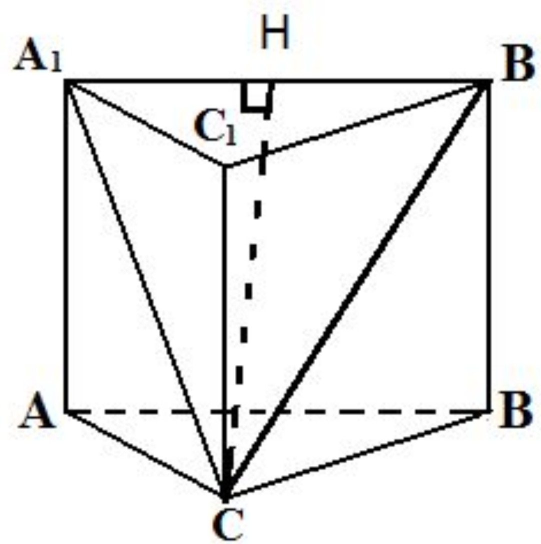
Найдем угол между диагональю боковой грани A_1C

и стороной основания AB.

Т.к. эти прямые скрещивающиеся, то искомый угол

равен углу CA_1B_1.

Пусть H– середина A_1B_1.



Рассмотрим треугольник A_1CH– прямоугольный.

$$\cos\,(CA_1H) = \frac{a/2}{2a} = \frac{1}{4}$$

Ответ: arccos (0,25).

12 Все решения уравнения $\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ определяются формулой $(n \in Z)$

$\boxed{1}$ $-1+10n$ $\boxed{2}$ $6+10n$ $\boxed{3}$ $(-1)^{n+1}+10n$ $\boxed{4}$ $(-1)^{n+1}+5n$ $\boxed{5}$ $\pm 1+10n$

Решение.

Т.к. $y = sinx$ – функция нечетная, то уравнение примет вид:

$sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) = sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$, и $-\frac{\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то решение запишем в виде

$\frac{\pi x}{5} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{5} + \pi n,\;\; x = (-1)^{n+1} + 5n, n \in Z.$

Ответ: $(-1)^{n+1} + 5n$.

13	Предприниматель получил кредит в организации под определенный процент. Через год в счет погашения кредита он внес в организацию 75 % от всего долга организации к этому времени. Еще через год для полного погашения долга он внес сумму в размере 31,36 % от величины полученного кредита. Чему равен годовой процент по кредиту в этой организации? **1** 12 **2** 36 **3** 25 **4** 15 **5** 18

Решение.

Пусть V– сумма кредита, x– процентная ставка организации, тогда условие задачи запишется так

$$V\cdot\left(\frac{100+x}{100}\right)\left(\frac{100-75}{100}\right)\left(\frac{100+x}{100}\right)-V\cdot\frac{31{,}36}{100}=0$$

$$\left(\frac{100+x}{100}\right)^2=\frac{31{,}36}{25},$$

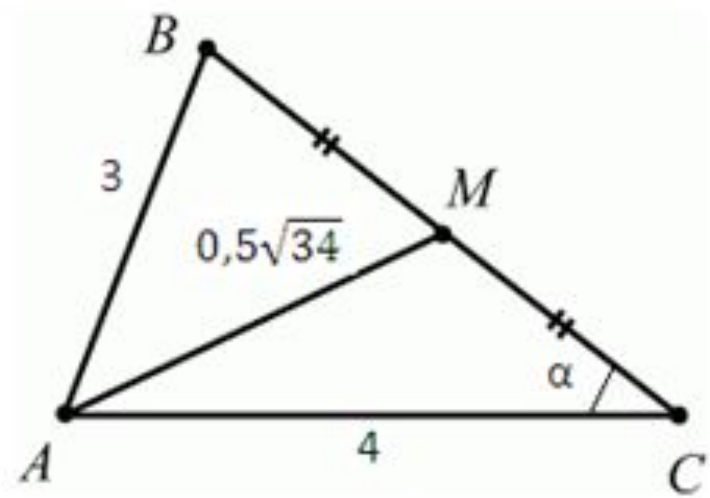
$$\frac{100+x}{100}=\frac{5{,}6}{5},$$

$$x=12$$

Ответ: 12

14	Если боковые стороны треугольника равны 3 см и 4 см, а медиана, проведенная к основанию, равна $0,5\sqrt{34}$ см, то это основание составляет **1** 4 см **2** 3,5 см **3** 5 см **4** 3 см **5** 6 см

Решение.



В треугольнике ABC, применим теорему

косинусов для стороны AB и медианы AM.

Пусть $BC = 2x$

$$\begin{cases} 3^2 = 4x^2 + 16 - 16x\cos\alpha \\ \frac{34}{4} = x^2 + 16 - 8x\cos\alpha \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что $x = 2$.

Ответ: 4.

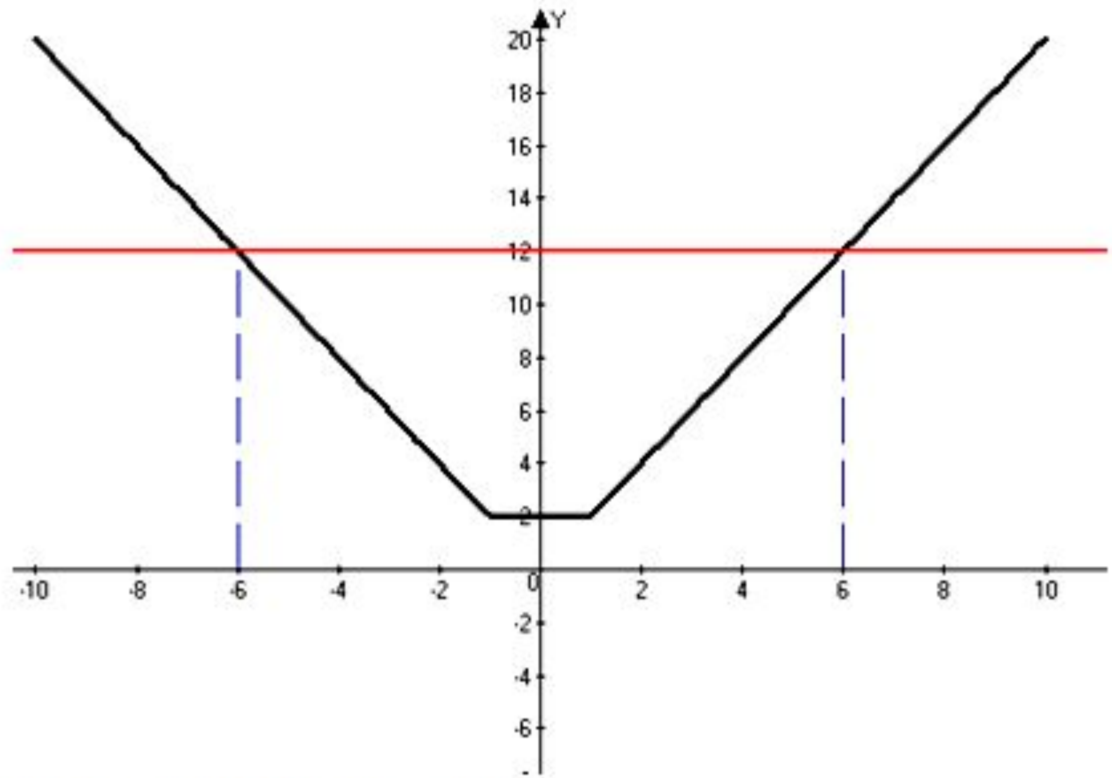
15 Сумма целых решений неравенства $|\sqrt{7x-2}-5|+|\sqrt{7x-2}-7| \leqslant 12$ равна

1 27 **2** 28 **3** 21 **4** 33 **5** 210

Решение.

Сделаем замену $\sqrt{7x-2}-6=t$, тогда неравенство примет вид

$|t+1|+|t-1| \leq 12$.



Решим неравенство графически.

$$-6 \leq t \leq 6$$

$$-6 \leq \sqrt{7x-2}-6 \leq 6$$

$$0 \leq \sqrt{7x-2} \leq 12$$

$$0 \leq 7x-2 \leq 144$$

$$\frac{2}{7} \leq x \leq 20\frac{6}{7}$$

Сумма целых решений неравенства равна $\frac{1+20}{2} \cdot 20 = 210$

Ответ: 210

16	Если для любого x выполняется соотношение $f(2x+1) = 4x^2+1$, то разность между наибольшим и наименьшим значениями $f(x)$ при $x \in [0;2]$ равна

1 5 **2** 0 **3** 4 **4** 1 **5** 3

Решение.

Пусть $2x+1=t$, $x=\frac{t-1}{2}$, $f(t)=4\cdot\frac{(t-1)^2}{4}+1, f(t)=(t-1)^2+1$.

Найдем наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)=(x-1)^2+1$ при $x\in[0;2]$.

Нетрудно заметить, что наименьшее значение равно $f(1)=1$,

Наибольшее значении на указанном промежутке $f(0)=f(2)=2$

$$2-1=1$$

Ответ: 1.

17 Сумма $\arcsin\left(\cos\frac{9}{8}\pi\right)+\arccos\left(\sin\frac{9}{8}\pi\right)$ равна

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{5\pi}{4}$ 3. $\frac{3\pi}{4}$ 4. $-\frac{\pi}{4}$ 5. 0

Решение.

Воспользуемся формулами приведения и свойствами обратных тригонометрических функций.

$$arcsin\left(cos\frac{9}{8}\pi\right)+arccos\left(sin\frac{9}{8}\pi\right)=arcsin\left(-cos\frac{\pi}{8}\right)+arccos\left(-sin\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=-arcsin\left(sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right)+\pi-arccos\left(cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}+\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

18	Сумма корней уравнения $16^x - (\lg^2 5 + \lg^2 2) \cdot 4^x = 4^{x+3} - 16$ равна
	$\boxed{1}$ 3 $\boxed{2}$ корней нет $\boxed{3}$ 2 $\boxed{4}$ $65 - \lg 2 \cdot \lg 5$ $\boxed{5}$ 4

Решение.

Перенесем все в левую часть и приведем подобные.

$$4^{2x} - (lg^2 5 + lg^2 2 + 64)4^x + 16 = 0$$

Сделаем замену $4^x = t, t > 0$, тогда уравнение примет вид

$$t^2 - (lg^2 5 + lg^2 2 + 64)t + 16 = 0$$

Т.к. $D > 0$,то по теореме Виета $\begin{cases} t_1 + t_2 = lg^2 5 + lg^2 2 + 64 \\ t_1 \cdot t_2 = 16, \end{cases}$

Сделаем обратную замену. $4^{x_1} \cdot 4^{x_2} = 16$, $x_1 + x_2 = 2$

Ответ: 2.

19 Два проходческих комбайна начали рыть навстречу друг другу тоннель длиной 30 м. Стоимость проходки первого метра первым комбайном равна 15 тыс. р., а стоимость каждого последующего метра его проходки на 9 тыс. р. больше предыдущего. Стоимость проходки каждого метра вторым комбайном равна 127,5 тыс. р. Минимальная стоимость (в тыс. р.) проходки всего тоннеля равна

1) 1715 2) 2399 3) 1515 4) 2301 5) $3064,5$

Решение.

Пусть n метров пройдет 1-й комбайн, тогда $(30-n)$ метров 2-й комбайн.

Стоимость работы первого комбайна представляет арифметическую прогрессию, тогда можно посчитать её сумму $S_1 = \frac{2\cdot 15+9\cdot(n-1)}{2}\cdot n$

Стоимость работ второго комбайна $S_2 = (30-n)\cdot 127{,}5$

Значит, стоимость всего тоннеля равна$S = \frac{2\cdot 15+9\cdot(n-1)}{2}\cdot n + (30-n)\cdot 127{,}5$

$S = 4{,}5n^2 - 117n + 3825$. Наименьшее значение функция принимает при $n = \frac{117}{2\cdot 4{,}5} = 13$

Минимальная стоимость проходки тоннеля равна

$s = 4{,}5\cdot 13^2 - 117\cdot 13 + 3825$=3064,5

Ответ: 3064,5.

20 Сумма корней уравнения $\log_{\sin \pi x}\left(1+\frac{1}{2}\cos 2\pi x\right) = 2$ из промежутка $(-2;3)$ равна

1 2,5 **2** на данном промежутке корней нет **3** 1 **4** 0,5 **5** 3

Решение.

Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin(\pi x) > 0 \\ \sin(\pi x) \neq 1 \\ 1+\frac{1}{2}\cos(2\pi x) = (\sin(\pi x))^2 \end{cases}$,

$$\begin{cases} \sin(\pi x) > 0 \\ \sin(\pi x) \neq 1 \\ \cos^2(\pi x) = \frac{1}{4}, \end{cases} \begin{cases} \sin(\pi x) > 0 \\ \sin(\pi x) \neq 1 \\ \cos(\pi x) = \pm\frac{1}{2}, \end{cases} \left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ \pi x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad n,k \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} + 2n \\ x = \frac{2}{3} + 2k, \quad n,k \in Z \end{array}\right.$$

Найдем корни, принадлежащие интервалу $(-2;3)$:

$$\left(\frac{1}{3}-2\right),\ \frac{1}{3},\ \left(\frac{1}{3}+2\right),\ \left(\frac{2}{3}-2\right),\ \frac{2}{3},\ \left(\frac{2}{3}+2\right)$$

Сумма корней уравнения равна 3.

Ответ: 3

21 Решением уравнения $(-4x - x^2 - 3) \cdot \log_2(\sin^2(\frac{5\pi}{4}x) + 1) = 1$ является число из промежутка

1 $[-3,5; -3)$ **2** $[-1,5; 1)$ **3** $[-4; -3,5)$ **4** $[1; 2]$ **5** $[-3; -1,5)$

Решение.

Запишем уравнение в виде: $log_2\left(sin^2\left(\frac{5\pi}{4}x\right) + 1\right) = -\frac{1}{(x+2)^2-1}$

Несложно оценить значения правой и левой частей уравнения.

$y = log_2\left(sin^2\left(\frac{5\pi}{4}x\right) + 1\right), y \in [0; 1]$

$y = -\frac{1}{(x+2)^2-1}$, $y \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$, тогда получим систему

$$\begin{cases} log_2\left(sin^2\left(\frac{5\pi}{4}x\right) + 1\right) = 1 \\ -\frac{1}{(x+2)^2-1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sin^2\left(\frac{5\pi}{4}x\right) = 1 \\ x = -2 \end{cases}, \quad x = -2$$

Ответ: $[-3; -1,5)$.

22	Наибольшее значение величины $x + y$ при условии $x^2 + y^2 \leqslant 2x + 2y$ равно $\boxed{1}$ 2 $\boxed{2}$ 5 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 1

Решение.

$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$

Пусть $a = x + y, \quad y = -x + a$

Воспользуемся известной формулой

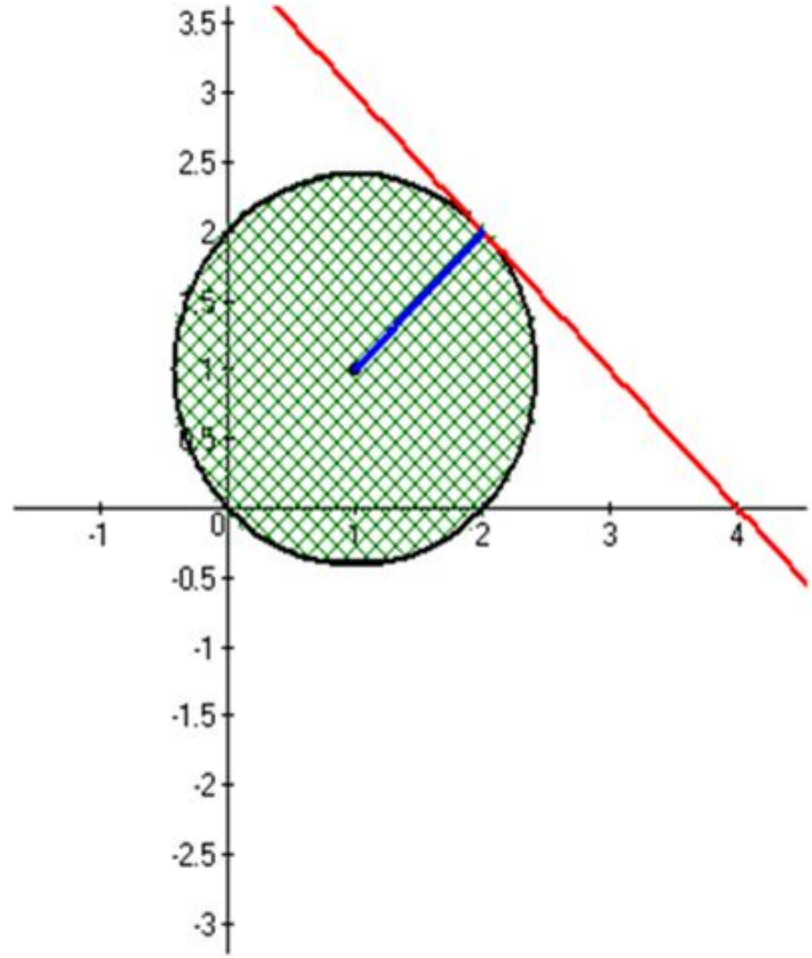
расстояния от точки до прямой.

$(x_0;\, y_0) \quad Ax + By + C = 0,$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$x + y - a = 0, \quad (1;1), \quad d = R = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = \dfrac{|1 + 1 - a|}{\sqrt{2}}, \quad a = 0, \qquad a = 4$



Ответ: 4

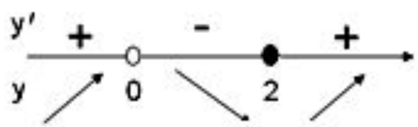
23	Уравнение $e^x = ax^2$ имеет три решения при всех $a > 0$ из промежутка $\boxed{1}$ $(0,25e^2;+\infty)$ $\boxed{2}$ $(0;3]$ $\boxed{3}$ $(0;2,25)$ $\boxed{4}$ $(0;0,25e^2)$ $\boxed{5}$ $(4e^{-2};+\infty)$

Решение.

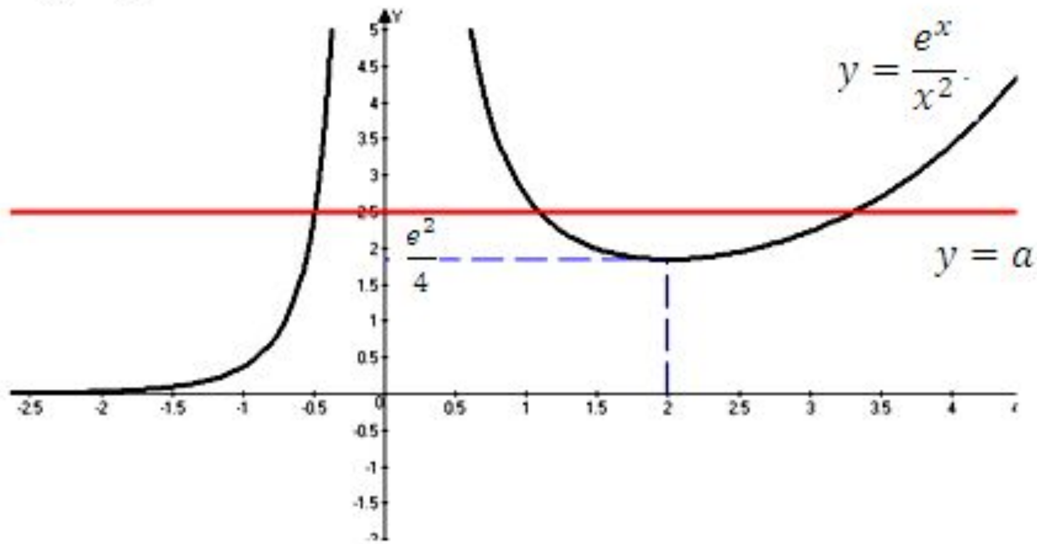
$$a = \frac{e^x}{x^2} \qquad \begin{cases} y = a \\ y = \dfrac{e^x}{x^2}, \end{cases}$$

Исследуем функцию с помощью производной и построим её график $y = \frac{e^x}{x^2}$.

$$y' = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$



$$y(2) = \frac{e^2}{4}$$



$$a \in \left(\frac{e^2}{4};\ +\infty\right).$$

Ответ: $\left(\frac{e^2}{4};\ +\infty\right)$.

24 Магазин закупил партию свежего инжира на 125 тыс. р. В конце каждой недели из четырех, что партия хранилась на складе, приходилось выбрасывать испорченные фрукты в количестве, составляющем один и тот же процент от объема, имеющегося на этот момент. Каков этот процент, если после указанного срока фруктов осталось на 51,2 тыс. р.?

1) 20 2) 62,5 3) 40 4) 25 5) 45

Решение.

Пусть x – процент испорченных продуктов, $0 < x < 100$, тогда условие задачи запишем в виде уравнения:

$$125 \cdot \left(\frac{100-x}{100}\right)^4 = 51{,}2$$

$$\left(\frac{100-x}{100}\right)^4 = \frac{512}{1250}$$

$$\left(\frac{100-x}{100}\right)^4 = \frac{256}{625}$$

Т.к $0 < x < 100$, то $\frac{100-x}{100} = \frac{4}{5}$

$$x = 20$$

Ответ: 20.

25	Указать сумму всех целых $a \in (-2;5)$, при которых неравенство $4^x + 2(1-2a)\cdot 2^x + 4a^2 - 3 > 0$ выполняется для любых x. $\boxed{1}$ 10 $\boxed{2}$ 9 $\boxed{3}$ 8 $\boxed{4}$ -1 $\boxed{5}$ 3

Решение.

Сделаем замену $2^x = t, t > 0$, тогда задание сформулируем так: неравенство $t^2 + 2(1-2a)t + 4a^2 - 3 > 0$ выполняется при всех положительных t.

1) Если$D < 0$ (т.к. ветви параболы направлены вверх), $\frac{D}{4} = -4a + 4$, $a > 1$.
2) Проверим случай, когда $D = 0$, $a = 1$. $(t-1)^2 > 0$ выполняется не при все положительных t ($t = 1$ не является решением)
3) Если $D > 0$, т.е. $a < 1$, то $\begin{cases} \frac{-2(1-2a)}{2} < 0 \\ 4a^2 - 3 \geq 0, \end{cases}$ $a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup (1; +\infty)$.

Т.к. по условию $a \in (-2;5)$, то целые значения параметра: -1, 2, 3, 4

Ответ: 8.

26	При каком из приведенных значений параметра a, сумма целочисленных решений неравенства $\frac{|x-7|}{x-7} + \sqrt{a^2-(x-1)^2} \geqslant 0$ равна 17? $\boxed{1}$ 9 $\boxed{2}$ 5 $\boxed{3}$ 7 $\boxed{4}$ 6 $\boxed{5}$ 8

Решение. $\sqrt{a^2-(x-1)^2} \geq -\frac{|x-7|}{x-7}$

Рассмотрим функции $y = \sqrt{a^2-(x-1)^2}$ и $y = -\frac{|x-7|}{x-7}$.

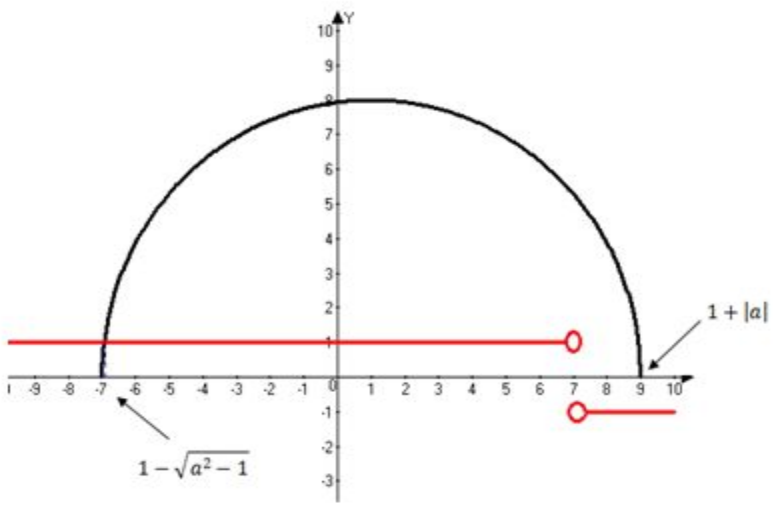
$y = \begin{cases} -1, x > 7 \\ 1, x < 7 \end{cases}$,

$\begin{cases} y \geq 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ – при $a \neq 0$ это верхняя полуокружность с центром (1; 0) и радиусом $|a|$.

Найдем точки пересечения полуокружности с прямой $y = 1$

$\sqrt{a^2-(x-1)^2} = 1,$

$x = 1 \pm \sqrt{a^2-1}.$



Очевидно, чтобы выполнялось условие задания радиус $|a| > 7$, тогда решение нашего неравенства имеет вид:

$x \in [1-\sqrt{a^2-1}; 7) \cup (7; 1+|a|].$

Осталось подставить два значения 8 и 9, и проверить выполнение условия задания.

Если $a = 9$, то $x \in [1-\sqrt{80}; 7) \cup (7; 10]$. Целыми решениями являются числа : $-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$. Сумма целых решений равна 20.

Если $a = 8$, то $x \in [1-\sqrt{63}; 7) \cup (7; 9]$. Целыми решениями являются числа : $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$. Сумма целых решений равна 17.

Ответ: 8.

27	Решением неравенства $2|x-1-a| \leqslant -x^2+2(a+1)x-2a-2$ является отрезок длины 6, если a равняется

1 ± 3 **2** ± 4 **3** ± 1 **4** ± 5 **5** ± 2

Решение.

Воспользуемся методом группировки и формулой сокращенного умножения.

$$x^2 - 2(a+1)x + 2|x-(a+1)| + 2a + 2 \leq 0$$

$$x^2 - 2(a+1)x + (a+1)^2 - (a+1)^2 + 2|x-(a+1)| + 2a + 2 \leq 0$$

$$\left(x-(a+1)\right)^2 + 2|x-(a+1)| + 1 - a^2 \leq 0$$

$$(|x-(a+1)| + 1)^2 \leq a^2$$

$$|x-(a+1)| + 1 \leq |a|$$

$$|x-(a+1)| \leq |a| - 1$$

Длина отрезка, который является решением неравенства, равна

$$2(|a|-1) = 6$$

$$|a| = 4$$

Ответ: ± 4.

28 Сумма всех целых значений параметра a, при которых уравнение $x^4 - 2x^3 + (2a - 16)x^2 + (8 - 2a)x + a^2 - 8a + 16 = 0$ имеет ровно два действительных различных корня, равна

1) 15 2) 13 3) 4 4) -13 5) -15

Решение.

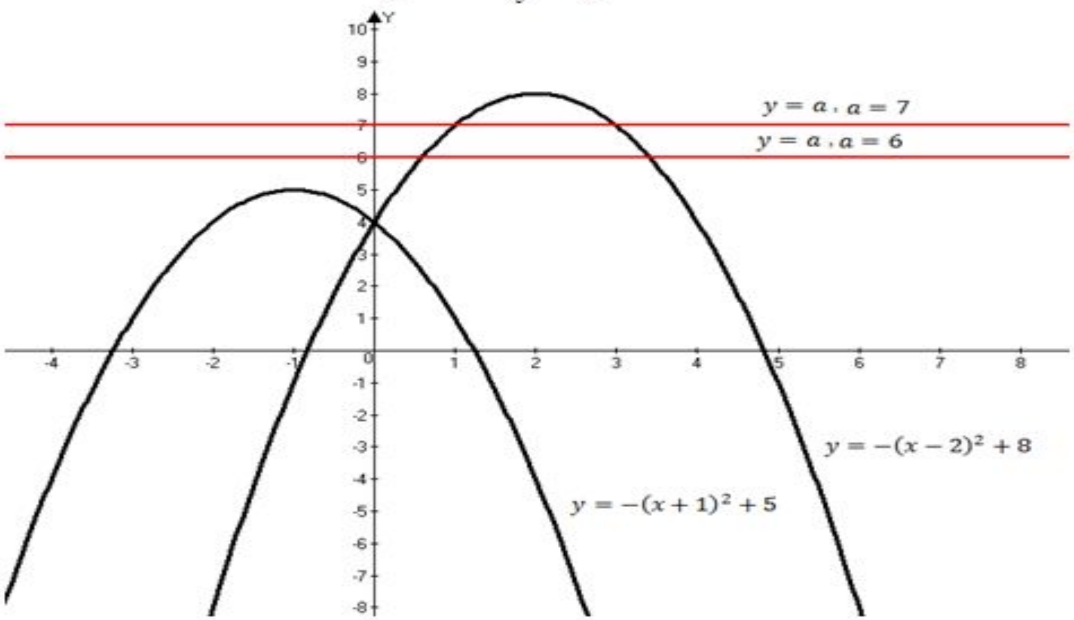
Решим уравнение относительно a.

$$a^2 + (2x^2 - 2x - 8)a + x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 8x + 16 = 0.$$

$$D = (2x^2 - 2x - 8)^2 - 4(x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 8x + 16) = 36x^2$$

$$\left[\begin{array}{l} a = -(x+1)^2 + 5 \\ a = -(x-2)^2 + 8 \end{array}\right.$$

Построим графики функций $y = -(x+1)^2 + 5$, $y = -(x-2)^2 + 8$, $y = a$ и ответим на вопрос , когда система $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y = -(x+1)^2 + 5, \\ y = -(x-2)^2 + 8, \end{array}\right. \\ \quad y = a \end{array}\right.$ имеет равно два различных решения.



$$a = 6, a = 7$$

Ответ: 13.

29 В каком из приведенных промежутков может располагаться величина $x+y$, если $\log_2\left(\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)}\right)=\frac{1}{x^2-2x+2}$?

1 $(9;10)$ 2 $(6;7)$ 3 $(12;14)$ 4 $(1;2)$ 5 $(8;9)$

Решение.

$$\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)}\geq 2,\ \log_2\left(\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)}\right)\geq 1$$

$$\frac{1}{x^2-2x+2}=\frac{1}{(x-1)^2+1}\leq 1$$

$$\begin{cases}\log_2\left(\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)}\right)=1\\ \frac{1}{(x-1)^2+1}=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1\\ \cos^2(xy)=1\end{cases},\quad x+y=1+\pi n, n\in Z$$

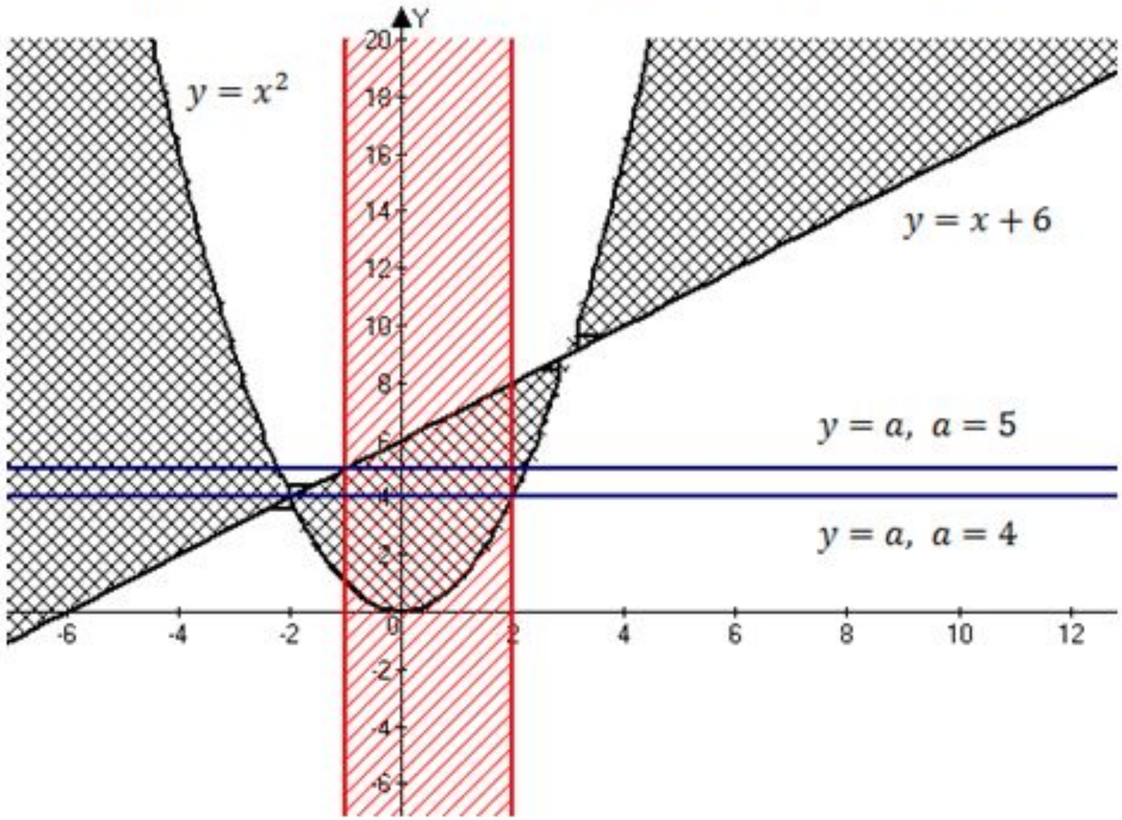
Ответ: (12; 14)

30 Найдите сумму всех целых значений a, для которых неравенство $(a-x^2)(a-x-6) \leqslant 0$ выполняется для любых $x \in [-1; 2]$

$\boxed{1}$ 11 $\boxed{2}$ ∞ $\boxed{3}$ 17 $\boxed{4}$ 9 $\boxed{5}$ 15

Решение.

Решим неравенство на координатной плоскости, для этого построим линии:
$y - x^2 = 0$ и $y - x - 6 = 0$ и определим области удовлетворяющие неравенству.



Сумма целых

значений параметра a

равна 4+5=9.

Ответ: 9

Иванов Анатолий Прокопьевич

Профессор, Заведующий кафедрой высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ

Ординарный профессор

Морозова Алена Витальевна

Старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ

Морозов Евгений Анатольевич

Старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ в ПЕРМИ

Новоселов Антон Вячеславович

Специалист по учебно-методической работе Факультета довузовской подготовки НИУ ВШЭ в ПЕРМИ

Спасибо за участие в олимпиаде ПРОФИ 2016