Наибольшее и наименьшее значение функции.

Выполнил ученик 11а класса:
Журавлев Станислав

Производная:

1. $(C)' = 0.$
2. $(kx + b)' = k.$
3. $(x^r)' = rx^{r-1}.$
4. $(e^x)' = e^x.$
5. $(a^x)' = a^x \ln a.$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$
8. $(\sin x)' = \cos x.$
9. $(\cos x)' = -\sin x.$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Проверим таблицу

Задание	Формулы для решения тригонометрических уравнений	Частные случаи решения тригонометрических уравнений	Ответы
Sin x = A	X = (-1^{k})arcsin A + π*k, k∈Z	Sin x = -1 Sin x = 0 Sin x = 1	X = -$\frac{\pi}{2}$ + 2π*k, k∈Z X = π*k, k∈Z X = $\frac{\pi}{2}$ + 2π*k, k∈Z
Cos x = A	X=$\pm$arccos A + 2π*k, k∈Z	cos x = -1 cos x = 0 cos x = 1	X = π+2πn, n∈Z X = $\frac{\pi}{2}$ + πn, n∈Z X= +2πn, n∈Z
Tg x = A	X = arctg A + π*k, k∈Z	Tg x = 0 Tg x = 1 Tg x = -1	X = πm, m∈Z X= $\frac{\pi}{4}$+πm, m∈Z X=- $\frac{\pi}{4}$+πm, m∈Z
Ctg x = A	X = arctg A + π*k, k∈Z	ctg x = 0 ctg x = 1 ctg x = -1	Не существует X= $\frac{\pi}{4}$+πm, m∈Z X=- $\frac{\pi}{4}$+πm, m∈Z

Исследование степенных и иррациональных функций.

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 48x + 17.$

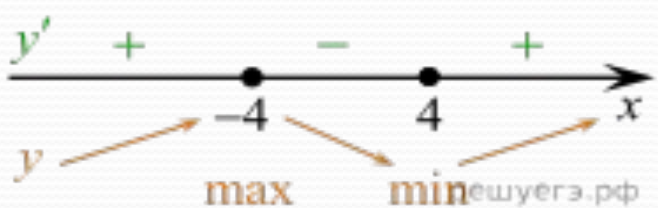
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x-4)(x+4)$$

Найдем нули производной:

$$3(x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума -4

Ответ: –4.

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0;4]$.

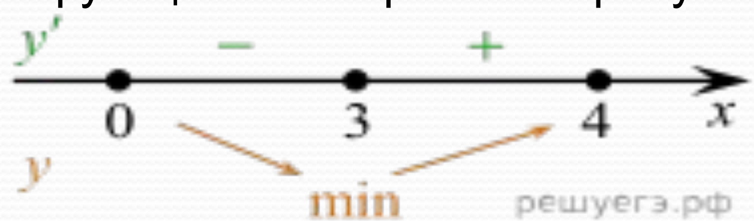
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x+3)(x-3).$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3(x+3)(x-3) = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 3, \end{array}\right. \\ 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(3) = 27 - 27 \cdot 3 = -54.$$

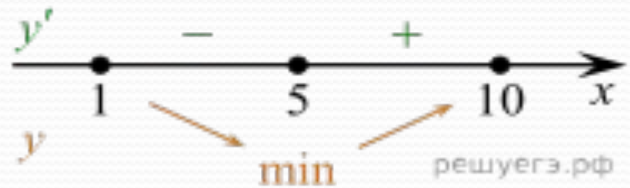
Ответ: −54.

Найдите наименьшее значение функции на отрезке $y = \dfrac{x^2+25}{x}$ $[1;10]$.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2+25}{x}\right)' = \left(x + \frac{25}{x}\right)' = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2-25}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 5 и –5. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет ее значение в точке 5. Найдем его:

$$y(5) = \frac{25+25}{5} = 10.$$

Исследование частных

Найдите наименьшее значение функции на отрезке $y = (x-8)e^{x-7}$ $[6;8]$.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x-8)'e^{x-7} + (x-8)(e^{x-7})' =$$
$$= e^{x-7} + (x-8)e^{x-7} = (x-7)e^{x-7}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} y' = 0, \\ 6 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)e^{x-7} = 0, \\ 6 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 0, \\ 6 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:

Наименьшим значением заданной функции на отрезке б

$[6;8]$ $y(7) = -1.$

Найдите точку минимума функции $y = (x+16)e^{x-16}$.

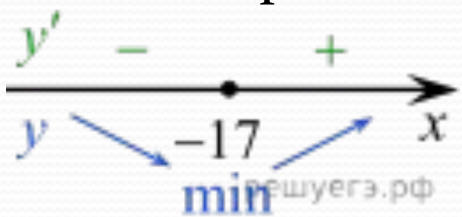
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x+16)'e^{x-16} + (x+16)\left(e^{x-16}\right)' =$$
$$= e^{x-16} + (x+16)e^{x-16} = (x+17)e^{x-16}.$$

Найдем нули производной:

$$(x+17)e^{x-16} = 0 \Leftrightarrow x = -17.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -17.$

Исследование произведений

Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ на отрезке [−2,5; 0].

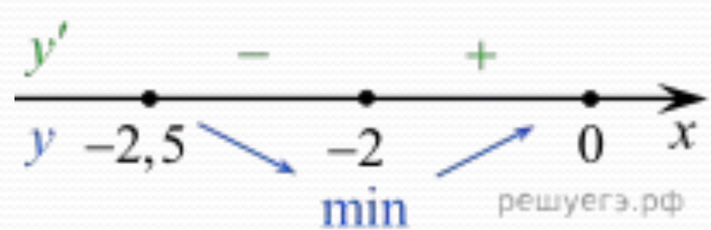
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3 - \dfrac{3}{x+3} = 0, \\ -2,5 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} = 1, \\ -2,5 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ -2,5 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ на отрезке [−2,5; 0].

В точке заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2) = -2 \cdot 3 - \ln 1 = -6.$$

Исследование показательных и логарифмических функций

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1;2]$.

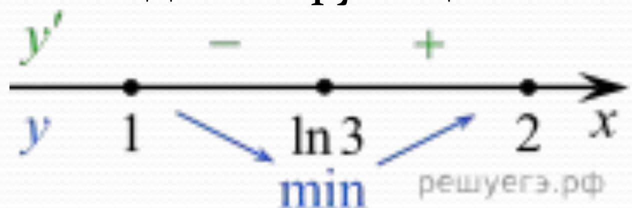
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2e^{2x} - 6e^x = 2e^x(e^x - 3).$$

Найдем нули производной:

$$2e^x(e^x - 3) = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3.$$

Отметим на рисунке нули производной и поведение функции на заданном отрезке:



Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является ее значение в точке минимума. Найдем его:

$$y(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 6e^{\ln 3} + 3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -6.$$

Найдите наибольшее значение функции

$$y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} -12\sin x + 6\sqrt{3} = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

В точке $x = \frac{\pi}{3}$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12.$$

Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3 + \frac{5\pi}{4} - 5x - 5\sqrt{2}\cos x$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 5\sqrt{2}\sin x - 5$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 5\sqrt{2}\sin x - 5 = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

В точке $x = \frac{\pi}{4}$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 + \frac{5\pi}{4} - 5\frac{\pi}{4} - 5\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = -2.$$

Исследование функций без помощи производной

Найдите точку максимума функции

$$y = \sqrt{4 - 4x - x^2}.$$

Найдите точку минимума функции

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}.$$