

Наибольшее и наименьшее значение функции.

Выполнил ученик 11а класса:
Журавлев Станислав

Производная:

$$1. (C)' = 0.$$

$$2. (kx + b)' = k.$$

$$3. (x^r)' = rx^{r-1}.$$

$$4. (e^x)' = e^x.$$

$$5. (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$8. (\sin x)' = \cos x.$$

$$9. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$11. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$15. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Проверим таблицу

Задание	Формулы для решения тригонометрических уравнений	Частные случаи решения тригонометрических уравнений	Ответы
Sin x = A	$X = (-1)^k \arcsin A + \pi * k, k \in \mathbb{Z}$	Sin x = -1 Sin x = 0 Sin x = 1	$X = -\frac{\pi}{2} + 2\pi * k, k \in \mathbb{Z}$ $X = \pi * k, k \in \mathbb{Z}$ $X = \frac{\pi}{2} + 2\pi * k, k \in \mathbb{Z}$
Cos x = A	$X = \pm \arccos A + 2\pi * k, k \in \mathbb{Z}$	cos x = -1 cos x = 0 cos x = 1	$X = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $X = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $X = +2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Tg x = A	$X = \operatorname{arctg} A + \pi * k, k \in \mathbb{Z}$	Tg x = 0 Tg x = 1 Tg x = -1	$X = \pi m, m \in \mathbb{Z}$ $X = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$ $X = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$
Ctg x = A	$X = \operatorname{arctg} A + \pi * k, k \in \mathbb{Z}$	ctg x = 0 ctg x = 1 ctg x = -1	Не существует $X = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$ $X = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$

Исследование степенных и иррациональных функций.

Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17.$$

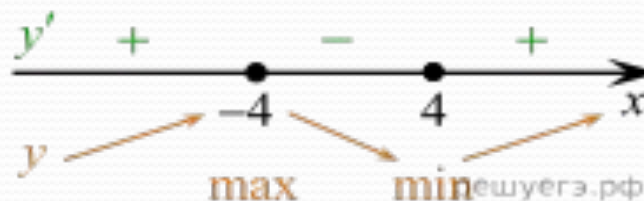
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x - 4)(x + 4)$$

Найдем нули производной:

$$3(x - 4)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 4. \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума -4

Ответ: -4.

Найдите наименьшее значение

функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$.

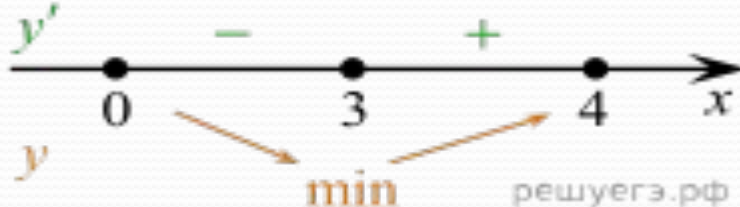
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x + 3)(x - 3).$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3(x + 3)(x - 3) = 0, \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = 3, \end{cases} \Leftrightarrow x = 3. \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{matrix}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(3) = 27 - 27 \cdot 3 = -54.$$

Ответ: -54.

Найдите наименьшее

значение функции

на

отрезке $y = \frac{x^2 + 25}{x}$

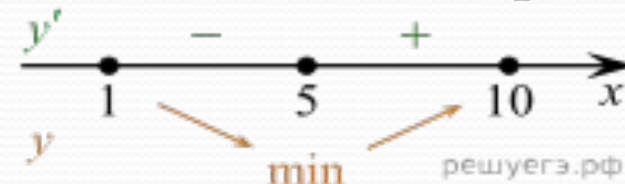
$[1; 10]$.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 25}{x} \right)' = \left(x + \frac{25}{x} \right)' = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 5 и -5.

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет ее значение в точке 5. Найдем его:

$$y(5) = \frac{25 + 25}{5} = 10.$$

Исследование частных

Найдите наименьшее значение функции

на отрезке $y = (x - 8)e^{x-7}$ $[6; 8]$.

Найдем производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= (x - 8)'e^{x-7} + (x - 8)(e^{x-7})' = \\ &= e^{x-7} + (x - 8)e^{x-7} = (x - 7)e^{x-7}. \end{aligned}$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} y' = 0, \\ 6 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 7)e^{x-7} = 0, \\ 6 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 = 0, \\ 6 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Наименьшим значением заданной функции на отрезке $[6; 8]$

$$[6; 8] \quad y(7) = -1.$$

Найдите точку минимума функции $y = (x + 16)e^{x-16}$.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x + 16)'e^{x-16} + (x + 16) \left(e^{x-16} \right)' = e^{x-16} + (x + 16)e^{x-16} = (x + 17)e^{x-16}.$$

Найдем нули производной:

$$(x + 17)e^{x-16} = 0 \Leftrightarrow x = -17.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:

Искомая точка минимума $x = -17$.



Исследование произведений

Найдите наименьшее значение

функции

на отрезке $[-2,5;$

$0]$. $y = 3x - \ln(x + 3)^3$

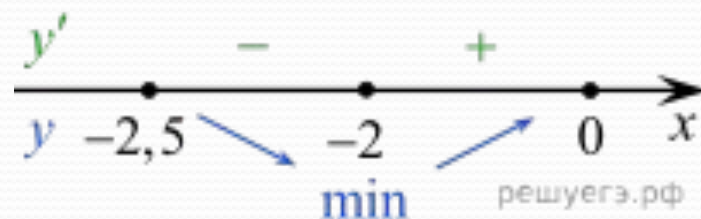
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3 - \frac{3}{x+3} = 0, \\ -2,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+3} = 1, \\ -2,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ -2,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



Найдите наименьшее значение функции на отрезке $[-2,5; 0]$.

$$y = 3x - \ln(x + 3)^3$$

В точке заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2) = -2 \cdot 3 - \ln 1 = -6.$$

Исследование показательных и логарифмических функций

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1; 2]$.

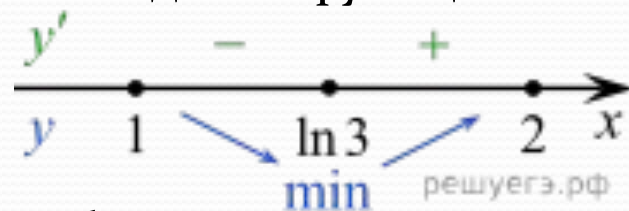
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2e^{2x} - 6e^x = 2e^x(e^x - 3).$$

Найдем нули производной:

$$2e^x(e^x - 3) = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3.$$

Отметим на рисунке нули производной и поведение функции на заданном отрезке:



Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является ее значение в точке минимума. Найдем его:

$$y(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 6e^{\ln 3} + 3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -6.$$

Найдите наибольшее значение функции

$$y = 12 \cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = -12 \sin x + 6\sqrt{3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} -12 \sin x + 6\sqrt{3} = 0, \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

В точке $x = \frac{\pi}{3}$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12 \cos \frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12.$$

Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3 + \frac{5\pi}{4} - 5x - 5\sqrt{2}\cos x$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 5\sqrt{2}\sin x - 5$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 5\sqrt{2}\sin x - 5 = 0, \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

В точке $x = \frac{\pi}{4}$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 + \frac{5\pi}{4} - 5\frac{\pi}{4} - 5\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = -2.$$

Исследование функций без помощи производной

Найдите точку максимума функции

$$y = \sqrt{4 - 4x - x^2}.$$

Найдите точку минимума функции

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}.$$