ОТЧЕТ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

Математическое программирование
Толмашова В. С.
ПИ-74

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

Графоаналитический (графический) способ решения задач линейного программирования обычно используется для решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами, а также задач, которые могут быть сведены к таким задачам.

ПОРЯДОК ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

- С учетом системы ограничений строится область допустимых решений.
- Строится вектор .
- Проводится произвольная линия, перпендикулярная к вектору .
- При решении задачи на максимум перемещается линия уровня в направлении вектора так, чтобы она касалась области допустимых решений в ее крайнем положении.

  В случае задачи на минимум линия уровня перемещается в антиградиентном направлении.
- Определяется оптимальный план и экстремальное значение целевой функции

ПРИМЕР

Задание. *Решить графическим методом задачу с n переменными*

$$Z(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение.

Так как число переменных в задаче равно 4, в исходной постановке задача графическим методом не решается.

Сведем эту задачу к задаче с двумя переменными.

Рассмотрим систему ограничений задачи:

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \end{cases}$$

ПРИМЕР

Выразим какие-либо две переменные задачи через остальные две переменные.

$$\begin{cases} x_3 = 6 - 3x_1 + 2x_2, \\ x_4 = 2 + x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Нашли искомые выражения. Подставляем их в целевую функцию:

$$Z(x) = x_1 + x_2 + 3(6 - 3x_1 + 2x_2) + 4(2 + x_1 - 2x_2) = -4x_1 - x_2 + 26$$

Так как по условию задачи $x_3, x_4 \geq 0$, получаем ограничения:

$$\begin{cases} x_3 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_4 = 2 + x_1 - 2x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приходим к задаче линейного программирования с двумя переменными:

$$Z = -4x_1 - x_2 + 26 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

ПРИМЕР

Решаем данную задачу графическим методом. Строим область допустимых решений в плоскости x_1Ox_2, ограниченную неравенствами:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

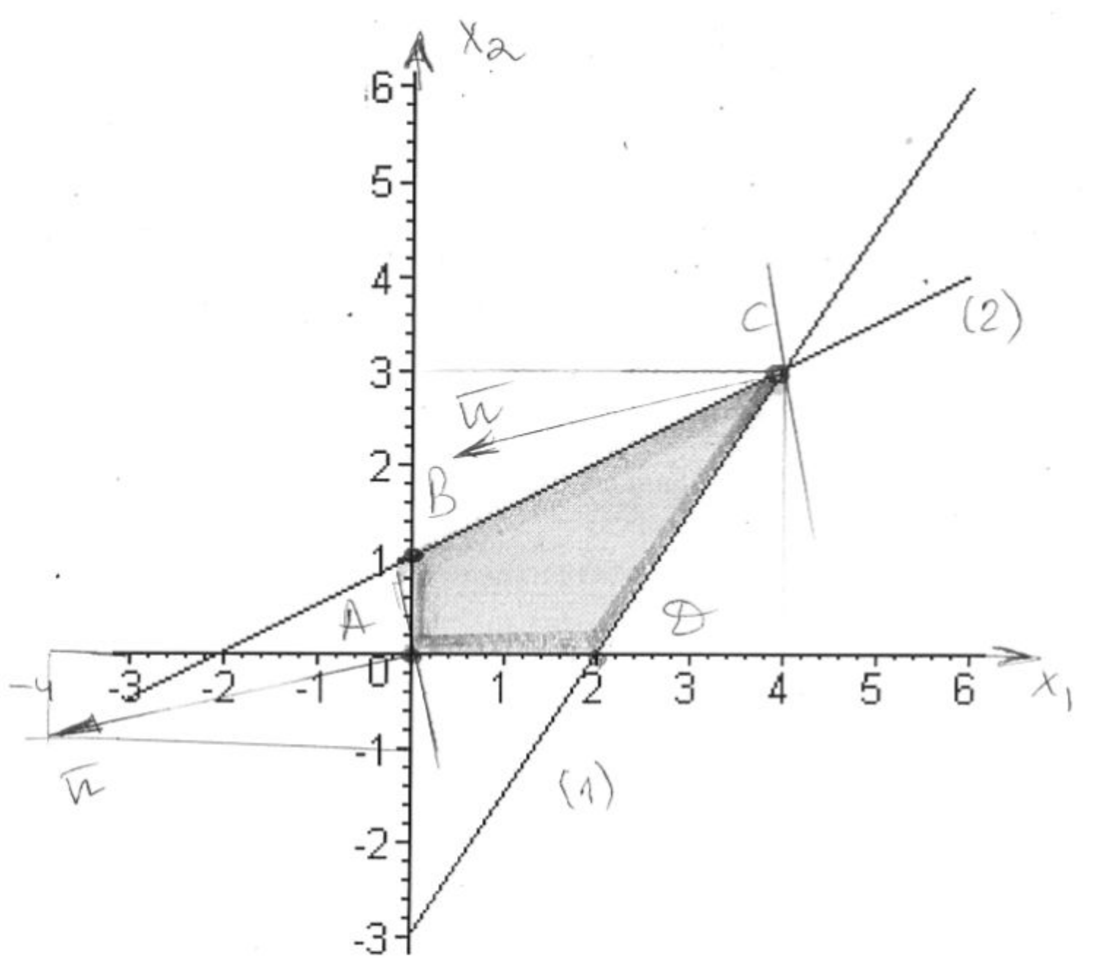
Для этого строим линии:

(1) $3x_1 - 2x_2 = 6$, прямая проходит через точки (2,0) и (4, 3)

(2) $-x_1 + 2x_2 = 2,$, прямая проходит через точки (0, 1), (2, 2).

ПРИМЕР

Получаем замкнутую область *ABCD* (см. рисунок ниже).



ПРИМЕР

Строим линию уровня целевой функции $-4x_1 - x_2 = 0$ и вектор градиента $\bar{n} = (-4; -1)$.

Направление градиента – направление наибольшего роста функции. Двигаем линию уровня в противоположном направлении, пока не достигнем крайней точки области. Ясно, что минимальное значение функция примет в точке $C(4,3)$. Тогда получаем для исходной задачи:

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 6 - 12 + 6 = 0, \\ x_4 = 2 + 4 - 6 = 0. \end{cases}$$

Решение: $X = (4,3,0,0)$, минимум целевой функции равен $Z_{\min} = 7$.

СИМПЛЕКС МЕТОД

Симплекс метод - это метод последовательного перехода от одного базисного решения (вершины многогранника решений) системы ограничений задачи линейного программирования к другому базисному решению до тех пор, пока функция цели не примет оптимального значения (максимума или минимума).

Алгоритм симплекс метода

- Шаг 1. Привести задачу линейного программирования к канонической форме. Для этого перенести свободные члены в правые части (если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножить на - 1) и в каждое ограничение ввести дополнительные переменные (со знаком "плюс", если в исходном неравенстве знак "меньше или равно", и со знаком "минус", если "больше или равно").
- Шаг 2. Если в полученной системе m уравнений, то m переменных принять за основные, выразить основные переменные через неосновные и найти соответствующее базисное решение. Если найденное базисное решение окажется допустимым, перейти к допустимому базисному решению.
- Шаг 3. Выразить функцию цели через неосновные переменные допустимого базисного решения. Если отыскивается максимум (минимум) линейной формы и в её выражении нет неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, то критерий оптимальности выполнен и полученное базисное решение является оптимальным - решение окончено. Если при нахождении максимума (минимума) линейной формы в её выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, перейти к новому базисному решению.
- Шаг 4. Из неосновных переменных, входящих в линейную форму с отрицательными (положительными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший (по модулю) коэффициент, и переводят её в основные. Переход к шагу 2.

ПРИМЕР

Пример 8. Найти максимум функции $Z = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \le 40, \\ x_2 \le 30, \\ x_1 + x_2 \le 60, \\ x_1 + 2x_2 \le 80, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Для сведения системы ограничений-неравенств к системе уравнений прибавим к левой части каждого неравенства добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, x_6:

Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 60, \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 80, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

ПРИМЕР

I шаг. Основные переменные: x_3, x_4, x_5, x_6; неосновные переменные: x_1, x_2. В системе (4) основные переменные выразим через неосновные. Через них выразим и линейную форму (в данном случае она уже выражена через x_1 и x_2).

Получим

$$\begin{cases} x_3 = 40 - x_1, \\ \underline{x_4 = 30 - x_2}, \\ x_5 = 60 - x_1 - x_2, \\ x_6 = 80 - x_1 - 2x_2, \end{cases} \tag{5}$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2.$$

ПРИМЕР

II шаг. Основные переменные: x_2, x_3, x_5, x_6, неосновные переменные: x_1, x_4. Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. В системе (2) берем то уравнение, из которого получено минимальное значение отношения свободного числа к коэффициенту при x_2 (уравнение подчеркнуто). Выразим из этого уравнения x_2: $x_2 = 30 - x_4$. Подставим это выражение x_2 во все остальные уравнения системы (5) и в линейную форму Z, получим

$$\begin{cases} x_2 = 30 - x_4, \\ x_3 = 40 - x_1, \\ x_5 = 30 - x_1 + x_4, \\ \underline{x_6 = 20 - x_1 + 2x_4}, \end{cases} \qquad (6)$$

$$Z = 90 + 2x_1 - 3x_4.$$

ПРИМЕР

III шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_3, x_5; неосновные переменные: x_4, x_6. Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. Из последнего уравнения системы (оно подчеркнуто) имеем $x_1 = 20 + 2x_4 - x_6$. Подставляя это выражение в остальные уравнения и в линейную форму, получим

$$\begin{cases} x_1 = 20 + 2x_4 - x_6, \\ x_2 = 30 - x_4, \\ x_3 = 20 - 2x_4 + x_6, \\ \underline{x_5 = 10 - x_4 + x_6,} \end{cases} \tag{7}$$

$$Z = 130 + x_4 - 2x_6.$$

ПРИМЕР

IV шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_3, x_4; неосновные переменные: x_5, x_6. Выразим основные переменные и линейную форму Z через неосновные. В итоге получим

$$\begin{cases} x_1 = 40 - 2x_5 + x_6, \\ x_2 = 20 + x_5 - x_6, \\ x_3 = 2x_5 - x_6, \\ x_4 = 10 - x_5 + x_6, \end{cases}$$

$$Z = 140 - x_5 - x_6.$$

ПРИМЕР

Отсутствие на каком-то шаге симплексного метода в выражении линейной формы Z, максимум которой ищется, неосновных переменных с положительными коэффициентами является критерием оптимальности.

Следовательно, на IV шаге критерий оптимальности достигнут и задача решена. Оптимальным служит решение $(40;20;0;10;0;0)$ при котором $Z_{\max}=140$.

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Задача Монжа - Канторовича - математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов из аккумулятора к приемникам с минимизацией затрат на перемещение. Для простоты понимания рассматривается как задача об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления (например, складов) в пункты потребления (например, магазины), с минимальными общими затратами на перевозки.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

- Построение транспортной таблицы.
- Проверка задачи на закрытость.
- Составление опорного плана.
- Проверка опорного плана на вырожденность.
- Вычисление потенциалов для плана перевозки.
- Проверка опорного плана на оптимальность.
- Перераспределение поставок.
- Если оптимальноерешение найдено, переходим к п. 9, если нет – к п. 5.
- Вычисление общих затрат на перевозку груза.
- Построение графа перевозок.

ПРИМЕР

Условие задачи

Поставщики товара - оптовые коммерческие предприятия $A_1, A_2 \dots A_m$ имеют запасы товаров соответственно в количестве $a_1, a_2 \dots . a_m$ ед. и розничные торговые предприятия $B_1, B_2 \dots B_n$ -подали заявки на закупку товаров в объемах соответственно: $b_1, b_2 \dots b_n$. Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов поставки в соответствующие пункты потребления заданы в виде матрицы $C = (c_{ij})\ (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$. Найти такой план перевозки груза от поставщиков к потребителям, чтобы совокупные затраты на перевозку были минимальными.

$a_1 = 225;\ a_2 = 250; a_3 = 125; a_4 = 100$

$b_1 = 120; b_2 = 150; b_3 = 110; b_4 = 235$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 3 & 15 \\ 3 & 14 & 10 & 20 \\ 15 & 25 & 11 & 19 \\ 11 & 12 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

Поставщики \Потребители	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы товаров, a_j
A_1	7	20	3	15	225
A_2	3	14	10	20	250
A_3	15	25	11	19	125
A_4	11	12	18	6	100
Заявки на закупку товаров, b_i	120	150	110	235	

ПРИМЕР

Решение задачи

Экономико-математическая модель задачи

Обозначим через x_{ij} ($i = \overline{1,4}$; $j = \overline{1,4}$) количество груза, перевозимого от $i -$ го поставщика $j -$ му потребителю. Тогда общая стоимость перевозок равна:

$$f = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 7x_{11} + 20x_{12} + 3x_{13} + 15x_{14} + 3x_{21} + 14x_{22} + 10x_{23} + 20x_{24} +$$

$$+15x_{31} + 25x_{32} + 11x_{33} + 19x_{34} + 11x_{41} + 12x_{42} + 18x_{43} + 6x_{44}$$

Ограничения для поставщиков:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 225 - \text{для } 1 - \text{го поставщика} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 250 - \text{для } 2 - \text{го поставщика} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 125 - \text{для } 3 - \text{го поставщика} \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \le 100 - \text{для } 4 - \text{го поставщика} \end{cases}$$

Ограничения для потребителей:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 120 - \text{для } 1 - \text{го потребителя} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 150 - \text{для } 2 - \text{го потребителя} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 110 - \text{для } 3 - \text{го потребителя} \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 235 - \text{для } 4 - \text{го потребителя} \end{cases}$$

ПРИМЕР

Объем суммарных поставок любого поставщика к потребителю не может быть отрицательным числом, поэтому справедливы ограничения: $x_{ij} \geq 0$

Проверка транспортной задачи на закрытость

Стандартная транспортная задача разрешима только в том случае, когда выполняется условие баланса:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$$

В нашем случае:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 700; \sum_{j=1}^{4} b_j = 615$$

Модель транспортной задачи открытая. Вводим фиктивного потребителя, которому требуется 85 единиц груза.

ПРИМЕР

Правило минимального элемента

Заполняем таблицу по правилу минимального элемента.

Просматривая таблицу замечаем, что наименьшие затраты соответствуют маршруту $A_1 - B_5$, поэтому в клетку помещаем $x_{15} = \min(85{,}225) = 85$. В этом случае 5-й столбец в расчет не принимается. Просматриваем оставшиеся таблицы клетки. Наименьшие тарифы имеют клетки (3,3) и (2,1)

$x_{33} = \min(110{,}140) = 140$

$x_{21} = \min(120{,}250) = 120$

Далее действуя по аналогичной схеме:

$x_{44} = \min(235{,}100) = 100$

$x_{22} = \min(150{,}130) = 130$

$x_{14} = \min(135{,}30) = 30$

$x_{34} = \min(105{,}125) = 105$

$x_{32} = \min(20{,}20) = 20$

Число занятых клеток должно быть $m + n - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$.

ПРИМЕР

Решение транспортной задачи методом потенциалов

Решать задачу будем методом потенциалов. Потенциал 1-й строки принимаем равным нулю. После этого мы можем вычислить остальные потенциалы (если известны потенциал и тариф занятой клетки, то из соотношения $v + u = c$ легко определить неизвестный потенциал).

	$v_1 = 10$	$v_2 = 21$	$v_3 = 3$	$v_4 = 15$	$v_5 = 0$		
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	7	20	3 110	+ 15 30	− 0 85	$u_1 = 0$	225
A_2	3 120	14 130	10	20	0	$u_2 = -7$	250
A_3	15	25 20	11	− 19 105	+ 0	$u_3 = 4$	125
A_4	11	12	18	6 100	0	$u_4 = -9$	100
	120	150	110	235	85		

Найдем оценки свободных клеток:

S (1, 1)= 7-(0+ 10)= -3
S (1, 2)= 20-(0+ 21)= -1
S (2, 3)= 10-(-7+ 3)= 14
S (2, 4)= 20-(-7+ 15)= 12
S (2, 5)= 0-(-7+ 0)= 7
S (3, 1)= 15-(4+ 10)= 1
S (3, 3)= 11-(4+ 3)= 4
S (3, 5)= 0-(4+ 0)= -4
S (4, 1)= 11-(-9+ 10)= 10
S (4, 2)= 12-(-9+ 21)= 0
S (4, 3)= 18-(-9+ 3)= 24
S (4, 5)= 0-(-9+ 0)= 9

Для клетки (3, 5) строим цикл.

ПРИМЕР

	$v_1=10$	$v_2=21$	$v_3=3$	$v_4=15$	$v_5=-4$	
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	+ 7	20	3 110	− 15 115	0	$u_1=0$ 225
A_2	− 3 120	+ 14 130	10	20	0	$u_2=-7$ 250
A_3	15	− 25 20	11	+ 19 20	0 85	$u_3=4$ 125
A_4	11	12	18	6 100	0	$u_4=-9$ 100
	120	150	110	235	85	

Найдем оценки свободных клеток:

S (1, 1)= 7-(0+ 10)= -3
S (1, 5)= 0-(0-4)= 4
S (2, 4)= 20-(-7+ 15)= 12
S (3, 1)= 15-(4+ 10)= 1
S (4, 1)= 11-(-9+ 10)= 10
S (4, 3)= 18-(-9+ 3)= 24

S (1, 2)= 20-(0+ 21)= -1
S (2, 3)= 10-(-7+ 3)= 14
S (2, 5)= 0-(-7-4)= 11
S (3, 3)= 11-(4+ 3)= 4
S (4, 2)= 12-(-9+ 21)= 0
S (4, 5)= 0-(-9-4)= 13

Для клетки (1, 1) строим цикл.

ПРИМЕР

	$v_1 = 7$ B_1	$v_2 = 18$ B_2	$v_3 = 3$ B_3	$v_4 = 15$ B_4	$v_5 = -4$ B_5	
A_1	7 20	20	3 110	15 95	0	$u_1 = 0$ 225
A_2	3 100	14 150	10	20	0	$u_2 = -4$ 250
A_3	15	25	11	19 40	0 85	$u_3 = 4$ 125
A_4	11	12	18	6 100	0	$u_4 = -9$ 100
	120	150	110	235	85	

Найдем оценки свободных клеток:

S (1, 2)= 20-(0+ 18)= 2
S (2, 3)= 10-(-4+ 3)= 11
S (2, 5)= 0-(-4-4)= 8
S (3, 2)= 25-(4+ 18)= 3
S (4, 1)= 11-(-9+ 7)= 13
S (4, 3)= 18-(-9+ 3)= 24

S (1, 5)= 0-(0-4)= 4
S (2, 4)= 20-(-4+ 15)= 9
S (3, 1)= 15-(4+ 7)= 4
S (3, 3)= 11-(4+ 3)= 4
S (4, 2)= 12-(-9+ 18)= 3
S (4, 5)= 0-(-9-4)= 13

ПРИМЕР

Оценки свободных клеток не отрицательны, следовательно, полученный план является оптимальным:

$$X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 110 & 95 \\ 100 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Минимальные транспортные издержки оптимального плана:

$$\min f = 7 \cdot 20 + 3 \cdot 110 + 15 \cdot 95 + 3 \cdot 100 + 14 \cdot 150 + 19 \cdot 40 + 6 \cdot 100 = 5655$$

При реализации оптимального плана у поставщика A_3 останется нереализованный товар в размере 85 ед.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Динамическое программирование – подход, позволяющий решать задачи оптимизации, которые могут быть сформулированы как задачи многошагового оптимального управления некоторой системой.

Элементы модели динамического программирования

- Этап i представляется порядковым номером недели i, i= 1, 2,..., n.
- Вариантами решения на i-м этапе являются значения - количество работающих на протяжении i-й недели.
- Состоянием на i-м этапе является *м - количество работающих на протяжении (i - 1)-й недели (этапа).

$$f_i(x_{i-1}) = \min\{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\},\ i = \overline{1,n},$$

ПРИМЕР

Пример 6.4. Строительный подрядчик оценивает минимальные потребности в рабочей силе на каждую из последующих пяти недель следующим образом: 5, 7, 8,4 и 6 рабочих соответственно. Содержание избытка рабочей силы обходится подрядчику в 300 долл, за одного рабочего в неделю, а наем рабочей силы на протяжении одной недели обходится в 400 долл, плюс 200 долл, за одного рабочего в неделю.

Т Выражая Cj и C_2 в сотнях долларов, имеем следующее:

$$b_1 = 5,\ b_2 = 7,\ b_3 = 8,\ b_4 = 4,\ b_5 = 6,$$

$$C_1(x_i - b_i) = 3(x_i - b_i),\ x_i > b_i,\ i = 1, 2, \ldots, 5,$$

$$C_2(x_i - x_{i-1}) = 4 + 2(x_i - x_{i-1}),\ x_i > x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, 5.$$

ПРИМЕР

Этап 5 (табл. 6.16). *Ь*$_5$ = 6.

Таблица 6.16

Расчеты этапа 5 для примера 6.4

*4	С, (ДГ$_5$-6) + С$_2$(*$_5$-*$_4$)	Оптимальное решение	
	*5 = 6	/sfa)	*5*
4	3(0) + 4 + 2(2) = 8	8	6
5	3(0)+ 4+ 2(1) = 6	6	6
6	3(0) + 0 = 0	0	6

ПРИМЕР

Этап 4 (табл. 6.17). $6_4 = 4$.

Расчеты этапа 4 для примера 6.4

*3	$C_1(x_4 - 4) + C_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4)$			Оптимальное решение	
	$x_4 = 4$	$x_4 = 5$	$x_4 = 6$	*Ш*:$_3$)	*4*
8	3(0) + 0 + 8 = 8	3(1) + 0 + 6 = 9	3(2) + 0 + 0 = 6	6	6

ПРИМЕР

Этап 3 (табл. 6.18). *Ь*$_3$ = 8.

Таблица 6.18

Расчеты этапа 3 для примера 6.4

*2	$C_1(x_3 - 8) + C_2(x_3 - x_2) + f_4(x_3)$	Оптимальное решение	
	$x_3 = 8$	*Mx*$_2$*)*	*3*
7	3(0) + 4 + 2(1) + 6=12	12	8
8	3(0) + 0 + 6 = 6	6	8

ПРИМЕР

Этап 2 (табл. 6.19). *Ь*$_2$ = 7.

Таблица 6.19

Расчеты этапа 2 для примера 6.4

	$C_1(x_2 - 7) + C_2(x_2 - x_1) + f_3(x_2)$		Оптимальное решение	
	*2 = 7	ос II *Н*	*/гШ*	*2*
5	3(0) + 4 + 2(2) + 12 = 20	3(1)+ 4+ 2(3)+ 6= 19	19	8
6	3(0) + 4 + 2(1) + 12= 18	3(1) + 4 + 2(2) + 6= 17	17	8
7	3(0) +0+ 12 = 12	3(1)+ 4+ 2(1)+ 6= 15	12	7
8	3(0) +0+ 12 = 12	3(1) + 0 + 6 = 9	9	8

ПРИМЕР

Этап 1 (табл. 6.20). *Ь* = 5.

Таблица 6.20

Расчеты этапа 1 для примера 6.4

*0	$C_1(x_1 - 5) + C_2(x_1 - x_0) + f_2(x_1)$				Оптимальное решение	
	*1 = 5	*X* = 6	*1 = 7	X] — 8	/i(*o)	V *
0	3(0) + 4 + + 2(5)+ 19 = = 33	3(1)+ 4 + + 2(6)+ 17 = = 36	3(2) + 4 + + 2(7)+12 = = 36	3(3) + 4 + + 2(8) + 9 = = 38	33	5

ПРИМЕР

Оптимальное решение определяется последовательно таким образом:

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1^* = 5 \rightarrow x_2^* = 8 \rightarrow x_3^* = 8 \rightarrow x_4^* = 6 \rightarrow x_5^* = 6.$$

Полученному решению соответствует план, представленный в табл. 6.21.

Таблица 6.21

Планирование рабочей силы для примера 6.4

Номер недели (*Г*)	Минимум рабочей силы (*Ь,*)	Количество фактически работающих (x,)	Решение
1	5	5	Нанять 5 рабочих
2	7	8	Нанять 3 рабочих
3	8	8	Ничего не менять
4	4	6	Уволить 2 рабочих
5	6	6	Ничего не менять

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!