

# ОТЧЕТ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

Математическое программирование  
Толмашова В. С.  
ПИ-74

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

---

Графоаналитический (графический) способ решения задач линейного программирования обычно используется для решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами, а также задач, которые могут быть сведены к таким задачам.

# ПОРЯДОК ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

---

- С учетом системы ограничений строится область допустимых решений.
- Строится вектор .
- Проводится произвольная линия, перпендикулярная к вектору .
- При решении задачи на максимум перемещается линия уровня в направлении вектора так, чтобы она касалась области допустимых решений в ее крайнем положении.

В случае задачи на минимум линия уровня перемещается в антиградиентном направлении.

- Определяется оптимальный план и экстремальное значение целевой функции

# ПРИМЕР

ЗАДАНИЕ. Решить графическим методом задачу с  $n$  переменными

$$Z(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Так как число переменных в задаче равно 4, в исходной постановке задача графическим методом не решается.

Сведем эту задачу к задаче с двумя переменными.

Рассмотрим систему ограничений задачи:

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \end{cases}$$

# ПРИМЕР

Выразим какие-либо две переменные задачи через остальные две переменные.

$$\begin{cases} x_3 = 6 - 3x_1 + 2x_2, \\ x_4 = 2 + x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Нашли искомые выражения. Подставляем их в целевую функцию:

$$Z(x) = x_1 + x_2 + 3(6 - 3x_1 + 2x_2) + 4(2 + x_1 - 2x_2) = -4x_1 - x_2 + 26$$

Так как по условию задачи  $x_3, x_4 \geq 0$ , получаем ограничения:

$$\begin{cases} x_3 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_4 = 2 + x_1 - 2x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приходим к задаче линейного программирования с двумя переменными:

$$Z = -4x_1 - x_2 + 26 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

# ПРИМЕР

Решаем данную задачу графическим методом. Строим область допустимых решений в плоскости  $x_1Ox_2$ , ограниченную неравенствами:

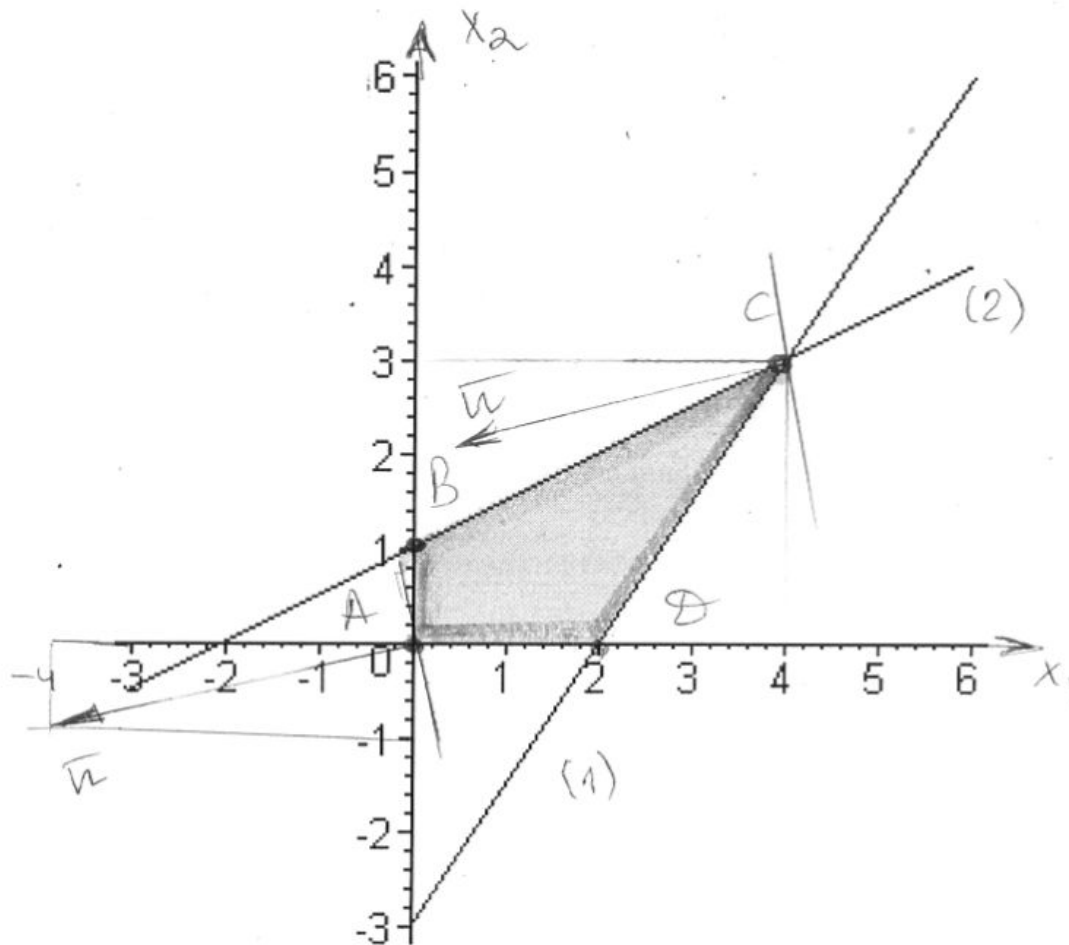
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для этого строим линии:

- (1)  $3x_1 - 2x_2 = 6$ , прямая проходит через точки (2,0) и (4, 3)
- (2)  $-x_1 + 2x_2 = 2$ , , прямая проходит через точки (0, 1), (2, 2).

# ПРИМЕР

Получаем замкнутую область  $ABCD$  (см. рисунок ниже).





# ПРИМЕР

---

Строим линию уровня целевой функции  $-4x_1 - x_2 = 0$  и вектор градиента  $\bar{n} = (-4; -1)$ .

Направление градиента – направление наибольшего роста функции. Двигаем линию уровня в противоположном направлении, пока не достигнем крайней точки области. Ясно, что минимальное значение функция примет в точке  $C(4, 3)$ . Тогда получаем для исходной задачи:

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 6 - 12 + 6 = 0, \\ x_4 = 2 + 4 - 6 = 0. \end{cases}$$

Решение:  $X = (4, 3, 0, 0)$ , минимум целевой функции равен  $Z_{\min} = 7$ .



# СИМПЛЕКС МЕТОД

---

Симплекс метод - это метод последовательного перехода от одного базисного решения (вершины многогранника решений) системы ограничений задачи линейного программирования к другому базисному решению до тех пор, пока функция цели не примет оптимального значения (максимума или минимума).

# Алгоритм симплекс метода

- Шаг 1. Привести задачу линейного программирования к канонической форме. Для этого перенести свободные члены в правые части (если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножить на  $-1$ ) и в каждое ограничение ввести дополнительные переменные (со знаком "плюс", если в исходном неравенстве знак "меньше или равно", и со знаком "минус", если "больше или равно").
- Шаг 2. Если в полученной системе  $m$  уравнений, то  $m$  переменных принять за основные, выразить основные переменные через неосновные и найти соответствующее базисное решение. Если найденное базисное решение окажется допустимым, перейти к допустимому базисному решению.
- Шаг 3. Выразить функцию цели через неосновные переменные допустимого базисного решения. Если отыскивается максимум (минимум) линейной формы и в её выражении нет неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, то критерий оптимальности выполнен и полученное базисное решение является оптимальным - решение окончено. Если при нахождении максимума (минимума) линейной формы в её выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, перейти к новому базисному решению.
- Шаг 4. Из неосновных переменных, входящих в линейную форму с отрицательными (положительными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший (по модулю) коэффициент, и переводят её в основные. Переход к шагу 2.

# ПРИМЕР

**Пример 8.** Найти максимум функции  $Z = 2x_1 + 3x_2$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \leq 40, \\ x_2 \leq 30, \\ x_1 + x_2 \leq 60, \\ x_1 + 2x_2 \leq 80, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для сведения системы ограничений-неравенств к системе уравнений прибавим к левой части каждого неравенства добавочные неотрицательные переменные  $x_3, x_4, x_5, x_6$ :

Система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 60, \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 80, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 6). \end{cases}$$

# ПРИМЕР

---

**I шаг.** Основные переменные:  $x_3, x_4, x_5, x_6$ ; неосновные переменные:  $x_1, x_2$ . В системе (4) основные переменные выразим через неосновные. Через них выразим и линейную форму (в данном случае она уже выражена через  $x_1$  и  $x_2$ ).

Получим

$$\begin{cases} x_3 = 40 - x_1, \\ x_4 = 30 - x_2, \\ x_5 = 60 - x_1 - x_2, \\ x_6 = 80 - x_1 - 2x_2, \\ Z = 2x_1 + 3x_2. \end{cases} \quad (5)$$

# ПРИМЕР

**II шаг.** Основные переменные:  $x_2, x_3, x_5, x_6$ , неосновные переменные:  $x_1, x_4$ . Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. В системе (2) берем то уравнение, из которого получено минимальное значение отношения свободного числа к коэффициенту при  $x_2$  (уравнение подчеркнуто). Выразим из этого уравнения  $x_2$ :  $x_2 = 30 - x_4$ . Подставим это выражение  $x_2$  во все остальные уравнения системы (5) и в линейную форму  $Z$ , получим

$$\begin{cases} x_2 = 30 - x_4, \\ x_3 = 40 - x_1, \\ x_5 = 30 - x_1 + x_4, \\ \underline{x_6 = 20 - x_1 + 2x_4}, \end{cases} \quad (6)$$
$$Z = 90 + 2x_1 - 3x_4.$$



# ПРИМЕР

**III шаг.** Основные переменные:  $x_1, x_2, x_3, x_5$ ; неосновные переменные:  $x_4, x_6$ . Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. Из последнего уравнения системы (оно подчеркнуто) имеем  $x_1 = 20 + 2x_4 - x_6$ . Подставляя это выражение в остальные уравнения и в линейную форму, получим

$$\begin{cases} x_1 = 20 + 2x_4 - x_6, \\ x_2 = 30 - x_4, \\ x_3 = 20 - 2x_4 + x_6, \\ \underline{x_5 = 10 - x_4 + x_6}, \end{cases} \quad (7)$$
$$Z = 130 + x_4 - 2x_6.$$

# ПРИМЕР

---

**IV шаг.** Основные переменные:  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ; неосновные переменные:  $x_5, x_6$ . Выразим основные переменные и линейную форму  $Z$  через неосновные. В итоге получим

$$\begin{cases} x_1 = 40 - 2x_5 + x_6, \\ x_2 = 20 + x_5 - x_6, \\ x_3 = 2x_5 - x_6, \\ x_4 = 10 - x_5 + x_6, \\ Z = 140 - x_5 - x_6. \end{cases}$$



# ПРИМЕР

---

*Отсутствие на каком-то шаге симплексного метода в выражении линейной формы  $Z$ , максимум которой ищется, неосновных переменных с положительными коэффициентами является критерием оптимальности.*

Следовательно, на IV шаге критерий оптимальности достигнут и задача решена. Оптимальным служит решение  $(40; 20; 0; 10; 0; 0)$  при котором  $Z_{\max} = 140$ .

# ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

---

Задача Монжа - Канторовича - математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов из аккумулятора к приемникам с минимизацией затрат на перемещение. Для простоты понимания рассматривается как задача об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления (например, складов) в пункты потребления (например, магазины), с минимальными общими затратами на перевозки.

# АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

---

- Построение транспортной таблицы.
- Проверка задачи на закрытость.
- Составление опорного плана.
- Проверка опорного плана на вырожденность.
- Вычисление потенциалов для плана перевозки.
- Проверка опорного плана на оптимальность.
- Перераспределение поставок.
- Если оптимально решение найдено, переходим к п. 9, если нет – к п. 5.
- Вычисление общих затрат на перевозку груза.
- Построение графа перевозок.

# ПРИМЕР

## Условие задачи

Поставщики товара - оптовые коммерческие предприятия  $A_1, A_2 \dots A_m$  имеют запасы товаров соответственно в количестве  $a_1, a_2 \dots a_m$  ед. и розничные торговые предприятия  $B_1, B_2 \dots B_n$  подали заявки на закупку товаров в объемах соответственно:  $b_1, b_2 \dots b_n$ . Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов поставки в соответствующие пункты потребления заданы в виде матрицы  $C = (c_{ij})$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ). Найти такой план перевозки груза от поставщиков к потребителям, чтобы совокупные затраты на перевозку были минимальными.

$$a_1 = 225; a_2 = 250; a_3 = 125; a_4 = 100$$

$$b_1 = 120; b_2 = 150; b_3 = 110; b_4 = 235$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 3 & 15 \\ 3 & 14 & 10 & 20 \\ 15 & 25 & 11 & 19 \\ 11 & 12 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

| Поставщики<br>\ Потребители         | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | Запасы товаров,<br>$a_j$ |
|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|--------------------------|
| $A_1$                               | 7     | 20    | 3     | 15    | 225                      |
| $A_2$                               | 3     | 14    | 10    | 20    | 250                      |
| $A_3$                               | 15    | 25    | 11    | 19    | 125                      |
| $A_4$                               | 11    | 12    | 18    | 6     | 100                      |
| Заявки на закупку<br>товаров, $b_i$ | 120   | 150   | 110   | 235   |                          |

# ПРИМЕР

## Решение задачи

### Экономико-математическая модель задачи

Обозначим через  $x_{ij}$  ( $i = \overline{1,4}$ ;  $j = \overline{1,4}$ ) количество груза, перевозимого от  $i$ -го поставщика  $j$ -му потребителю. Тогда общая стоимость перевозок равна:

$$f = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} = 7x_{11} + 20x_{12} + 3x_{13} + 15x_{14} + 3x_{21} + 14x_{22} + 10x_{23} + 20x_{24} + \\ + 15x_{31} + 25x_{32} + 11x_{33} + 19x_{34} + 11x_{41} + 12x_{42} + 18x_{43} + 6x_{44}$$

Ограничения для поставщиков:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 225 - \text{для 1-го поставщика} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 250 - \text{для 2-го поставщика} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 125 - \text{для 3-го поставщика} \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 100 - \text{для 4-го поставщика} \end{cases}$$

Ограничения для потребителей:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 120 - \text{для 1-го потребителя} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 150 - \text{для 2-го потребителя} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 110 - \text{для 3-го потребителя} \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 235 - \text{для 4-го потребителя} \end{cases}$$

# ПРИМЕР

---

Объем суммарных поставок любого поставщика к потребителю не может быть отрицательным числом, поэтому справедливы ограничения:  $x_{ij} \geq 0$

## Проверка транспортной задачи на закрытость

Стандартная транспортная задача разрешима только в том случае, когда выполняется условие баланса:

$$\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$$

В нашем случае:

$$\sum_{i=1}^4 a_i = 700; \quad \sum_{j=1}^4 b_j = 615$$

Модель транспортной задачи открытая. Вводим фиктивного потребителя, которому требуется 85 единиц груза.



# ПРИМЕР

## Правило минимального элемента

Заполняем таблицу по правилу минимального элемента.

Просматривая таблицу замечаем, что наименьшие затраты соответствуют маршруту  $A_1 - B_5$ , поэтому в клетку помещаем  $x_{15} = \min(85, 225) = 85$ . В этом случае 5-й столбец в расчет не принимается. Просматриваем оставшиеся таблицы клетки. Наименьшие тарифы имеют клетки (3,3) и (2,1)

$$x_{33} = \min(110, 140) = 140$$

$$x_{21} = \min(120, 250) = 120$$

Далее действуя по аналогичной схеме:

$$x_{44} = \min(235, 100) = 100$$

$$x_{22} = \min(150, 130) = 130$$

$$x_{14} = \min(135, 30) = 30$$

$$x_{34} = \min(105, 125) = 105$$

$$x_{32} = \min(20, 20) = 20$$

Число занятых клеток должно быть  $m + n - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$ .



# ПРИМЕР

## Решение транспортной задачи методом потенциалов

Решать задачу будем методом потенциалов. Потенциал 1-й строки принимаем равным нулю. После этого мы можем вычислить остальные потенциалы (если известны потенциал и тариф занятой клетки, то из соотношения  $v + u = c$  легко определить неизвестный потенциал).

|                | $v_1 = 10$<br>B <sub>1</sub> | $v_2 = 21$<br>B <sub>2</sub> | $v_3 = 3$<br>B <sub>3</sub> | $v_4 = 15$<br>B <sub>4</sub> | $v_5 = 0$<br>B <sub>5</sub> |              |
|----------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|--------------|
| A <sub>1</sub> | 7                            | 20                           | 3                           | + 15                         | -                           | 0 $u_1 = 0$  |
| A <sub>2</sub> | 3                            | 14                           | 10                          | 20                           |                             | 0 $u_2 = -7$ |
| A <sub>3</sub> | 15                           | 25                           | 11                          | - 19                         | + 0                         | 0 $u_3 = 4$  |
| A <sub>4</sub> | 11                           | 12                           | 18                          | 6                            |                             | 0 $u_4 = -9$ |
|                | 120                          | 150                          | 110                         | 235                          | 85                          |              |

Найдем оценки свободных клеток:

$$S(1, 1) = 7 - (0 + 10) = -3$$

$$S(2, 3) = 10 - (-7 + 3) = 14$$

$$S(2, 5) = 0 - (-7 + 0) = 7$$

$$S(3, 3) = 11 - (4 + 3) = 4$$

$$S(4, 1) = 11 - (-9 + 10) = 10$$

$$S(4, 3) = 18 - (-9 + 3) = 24$$

$$S(1, 2) = 20 - (0 + 21) = -1$$

$$S(2, 4) = 20 - (-7 + 15) = 12$$

$$S(3, 1) = 15 - (4 + 10) = 1$$

$$S(3, 5) = 0 - (4 + 0) = -4$$

$$S(4, 2) = 12 - (-9 + 21) = 0$$

$$S(4, 5) = 0 - (-9 + 0) = 9$$

Для клетки (3, 5) строим цикл.

# ПРИМЕР

|                | $v_1=10$<br>B <sub>1</sub> | $v_2=21$<br>B <sub>2</sub> | $v_3=3$<br>B <sub>3</sub> | $v_4=15$<br>B <sub>4</sub> | $v_5=4$<br>B <sub>5</sub> |                 |
|----------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|-----------------|
| A <sub>1</sub> | + 7<br>120                 | 20<br>130                  | 3<br>110                  | - 15<br>115                | 0                         | $u_1=0$<br>225  |
| A <sub>2</sub> | - 3<br>120                 | + 14<br>130                | 10                        | 20                         | 0                         | $u_2=-7$<br>250 |
| A <sub>3</sub> | 15                         | - 25<br>20                 | 11                        | + 19<br>20                 | 85                        | $u_3=4$<br>125  |
| A <sub>4</sub> | 11                         | 12                         | 18                        | 6<br>100                   | 0                         | $u_4=-9$<br>100 |
|                | 120                        | 150                        | 110                       | 235                        | 85                        |                 |

Найдем оценки свободных клеток:

$$S(1, 1) = 7 - (0 + 10) = -3$$

$$S(1, 5) = 0 - (0 - 4) = 4$$

$$S(2, 4) = 20 - (-7 + 15) = 12$$

$$S(3, 1) = 15 - (4 + 10) = 1$$

$$S(4, 1) = 11 - (-9 + 10) = 10$$

$$S(4, 3) = 18 - (-9 + 3) = 24$$

$$S(1, 2) = 20 - (0 + 21) = -1$$

$$S(2, 3) = 10 - (-7 + 3) = 14$$

$$S(2, 5) = 0 - (-7 - 4) = 11$$

$$S(3, 3) = 11 - (4 + 3) = 4$$

$$S(4, 2) = 12 - (-9 + 21) = 0$$

$$S(4, 5) = 0 - (-9 - 4) = 13$$

Для клетки (1, 1) строим цикл.

# ПРИМЕР

|                | $v_1=7$<br>B <sub>1</sub> | $v_2=18$<br>B <sub>2</sub> | $v_3=3$<br>B <sub>3</sub> | $v_4=15$<br>B <sub>4</sub> | $v_5=-4$<br>B <sub>5</sub> |    |                 |
|----------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|----|-----------------|
| A <sub>1</sub> | 20                        | 7                          | 20                        | 3                          | 15                         | 0  | $u_1=0$<br>225  |
| A <sub>2</sub> | 100                       | 3                          | 14                        | 10                         | 20                         | 0  | $u_2=-4$<br>250 |
| A <sub>3</sub> |                           | 15                         | 25                        | 11                         | 19                         | 0  | $u_3=4$<br>125  |
| A <sub>4</sub> |                           | 11                         | 12                        | 18                         | 6                          | 0  | $u_4=-9$<br>100 |
|                | 120                       |                            | 150                       | 110                        | 235                        | 85 |                 |

Найдем оценки свободных клеток:

$$S(1, 2) = 20 - (0 + 18) = 2$$

$$S(2, 3) = 10 - (-4 + 3) = 11$$

$$S(2, 5) = 0 - (-4 - 4) = 8$$

$$S(3, 2) = 25 - (4 + 18) = 3$$

$$S(4, 1) = 11 - (-9 + 7) = 13$$

$$S(4, 3) = 18 - (-9 + 3) = 24$$

$$S(1, 5) = 0 - (0 - 4) = 4$$

$$S(2, 4) = 20 - (-4 + 15) = 9$$

$$S(3, 1) = 15 - (4 + 7) = 4$$

$$S(3, 3) = 11 - (4 + 3) = 4$$

$$S(4, 2) = 12 - (-9 + 18) = 3$$

$$S(4, 5) = 0 - (-9 - 4) = 13$$

# ПРИМЕР

---

Оценки свободных клеток не отрицательны, следовательно, полученный план является оптимальным:

$$X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 110 & 95 \\ 100 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Минимальные транспортные издержки оптимального плана:

$$\min f = 7 \cdot 20 + 3 \cdot 110 + 15 \cdot 95 + 3 \cdot 100 + 14 \cdot 150 + 19 \cdot 40 + 6 \cdot 100 = 5655$$

При реализации оптимального плана у поставщика  $A_3$  останется нереализованный товар в размере 85 ед.

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

---

Динамическое программирование – подход, позволяющий решать задачи оптимизации, которые могут быть сформулированы как задачи многошагового оптимального управления некоторой системой.

# Элементы модели динамического программирования

---

- Этап  $i$  представляется порядковым номером недели  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Вариантами решения на  $i$ -м этапе являются значения - количество работающих на протяжении  $i$ -й недели.
- Состоянием на  $i$ -м этапе является  $x_{i-1}$  - количество работающих на протяжении  $(i - 1)$ -й недели (этапа).

$$f_i(x_{i-1}) = \min \{ C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i) \}, \quad i = \overline{1, n},$$



# ПРИМЕР

Пример 6.4. Строительный подрядчик оценивает минимальные потребности в рабочей силе на каждую из последующих пяти недель следующим образом: 5, 7, 8, 4 и 6 рабочих соответственно.

Содержание избытка рабочей силы обходится подрядчику в 300 долл, за одного рабочего в неделю, а наем рабочей силы на протяжении одной недели обходится в 400 долл, плюс 200 долл, за одного рабочего в неделю.

Т Выражая  $C_1$  и  $C_2$  в сотнях долларов, имеем следующее:

$$b_1 = 5, b_2 = 7, b_3 = 8, b_4 = 4, b_5 = 6,$$

$$C_1(x_i - b_i) = 3(x_i - b_i), x_i > b_i, i = 1, 2, \dots, 5,$$

$$C_2(x_i - x_{i-1}) = 4 + 2(x_i - x_{i-1}), x_i > x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, 5.$$



# ПРИМЕР

Этап 5 (табл. 6.16).  $b_5 = 6$ .

Таблица 6.16

Расчеты этапа 5 для примера 6.4

|    | $C_1 \cdot (ДГ_{5-6}) + C_2(*5-*4)$ | Оптимальное решение |     |
|----|-------------------------------------|---------------------|-----|
| *4 |                                     | /sfa)               | *5* |
|    | *5 = 6                              |                     |     |
| 4  | $3(0) + 4 + 2(2) = 8$               | 8                   | 6   |
| 5  | $3(0) + 4 + 2(1) = 6$               | 6                   | 6   |
| 6  | $3(0) + 0 = 0$                      | 0                   | 6   |

# ПРИМЕР

Этап 4 (табл. 6.17).  $b_4 = 4$ .

Расчеты этапа 4 для примера 6.4

|    |                                            |                    |                    |                     |     |
|----|--------------------------------------------|--------------------|--------------------|---------------------|-----|
| *3 | $C_1(x_4 - 4) + C_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4)$ |                    |                    | Оптимальное решение |     |
|    | $x_4 = 4$                                  | $x_4 = 5$          | $x_4 = 6$          | Ш:3)                | *4* |
| 8  | $3(0) + 0 + 8 = 8$                         | $3(1) + 0 + 6 = 9$ | $3(2) + 0 + 0 = 6$ | 6                   | 6   |

# ПРИМЕР

Этап 3 (табл. 6.18).  $b_3 = 8$ .

Таблица 6.18

Расчеты этапа 3 для примера 6.4

|    | $C_1(x_3 - 8) + C_2(x_3 - x_2) + f_4(x_3)$ | Оптимальное решение |     |
|----|--------------------------------------------|---------------------|-----|
| *2 | $x_3 = 8$                                  | $Mx_2)$             | *3* |
| 7  | $3(0) + 4 + 2(1) + 6 = 12$                 | 12                  | 8   |
| 8  | $3(0) + 0 + 6 = 6$                         | 6                   | 8   |

# ПРИМЕР

Этап 2 (табл. 6.19).  $b_2 = 7$ .

Таблица 6.19

Расчеты этапа 2 для примера 6.4

|        |                             | Оптимальное решение        |     |                                            |
|--------|-----------------------------|----------------------------|-----|--------------------------------------------|
|        |                             |                            |     | $C_1(x_2 - 7) + C_2(x_2 - x_1) + f_3(x_2)$ |
| *2 = 7 | ос                          | /гШ                        | *2* |                                            |
|        | И                           |                            |     |                                            |
|        | Н                           |                            |     |                                            |
| 5      | $3(0) + 4 + 2(2) + 12 = 20$ | $3(1) + 4 + 2(3) + 6 = 19$ | 19  | 8                                          |
| 6      | $3(0) + 4 + 2(1) + 12 = 18$ | $3(1) + 4 + 2(2) + 6 = 17$ | 17  | 8                                          |
| 7      | $3(0) + 0 + 12 = 12$        | $3(1) + 4 + 2(1) + 6 = 15$ | 12  | 7                                          |
| 8      | $3(0) + 0 + 12 = 12$        | $3(1) + 0 + 6 = 9$         | 9   | 8                                          |

# ПРИМЕР

Этап 1 (табл. 6.20).  $b = 5$ .

Таблица 6.20

Расчеты этапа 1 для примера 6.4

|    | $C_1(x_1 - 5) + C_2(x_1 - x_0) + f_2(x_1)$ |                                  |                               |                              | Оптимальное решение |     |
|----|--------------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|------------------------------|---------------------|-----|
| *0 | *1 = 5                                     | X = 6                            | *1 = 7                        | X] - 8                       | /i(*0)              | V * |
| 0  | 3(0) + 4 +<br>+ 2(5) + 19 = = 33           | 3(1) + 4 +<br>+ 2(6) + 17 = = 36 | 3(2) + 4 + + 2(7) + 12 = = 36 | 3(3) + 4 + + 2(8) + 9 = = 38 | 33                  | 5   |

# ПРИМЕР

Оптимальное решение определяется последовательно таким образом:

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1^* = 5 \rightarrow x_2^* = 8 \rightarrow x_3^* = 8 \rightarrow x_4^* = 6 \rightarrow x_5^* = 6.$$

Полученному решению соответствует план, представленный в табл. 6.21.

Таблица 6.21

Планирование рабочей силы для примера 6.4

| Номер недели ( $\Gamma$ ) | Минимум рабочей силы ( $b_i$ ) | Количество фактически работающих ( $x_i$ ) | Решение           |
|---------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------|-------------------|
| 1                         | 5                              | 5                                          | Нанять 5 рабочих  |
| 2                         | 7                              | 8                                          | Нанять 3 рабочих  |
| 3                         | 8                              | 8                                          | Ничего не менять  |
| 4                         | 4                              | 6                                          | Уволить 2 рабочих |
| 5                         | 6                              | 6                                          | Ничего не менять  |

---

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**