

Инвариантность формы интеграла

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ и $u(x)$ – дифференцируемая функция, то по правилу дифференцирования сложной функции

$$(F(u(x)))' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x),$$

что означает, что функция $F(u(x))$ – первообразная функции $f(u(x)) \cdot u'(x)$ или

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

Так как $f(u(x)) \cdot u'(x) dx = f(u(x)) du(x)$, то можно записать равенство

$$\int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C$$

или, опуская независимую переменную x ,

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

С учетом инвариантности формы неопределенного интеграла для дифференцируемой функции $u(x)$ верны равенства:

$$1. \int 0 du = C$$

$$2. \int 1 du = u + C$$

$$3. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$4. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$5. \int e^u du = e^u + C$$

$$6. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$7. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$8. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$9. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

$$10. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$$

$$11. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$12. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C$$

$$13. \int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C$$

$$14. \int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C$$

$$15. \int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$$

$$16. \int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$$

$$17. \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$$

$$18. \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$$

$$19. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin \frac{u}{a} + C$$

$$20. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

$$21. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$22. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$$

Интегрирование методом внесения под знак дифференциала

По свойству инвариантности формы неопределенного интеграла, если верно равенство

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то для всякой дифференцируемой функции $u(x)$ верно равенство

$$\int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C$$

или

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

Так, с помощью формулы $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$ можно легко найти интегралы

$$\int \cos x d(\cos x) = \frac{\cos^2 x}{2} + C,$$

$$\int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C,$$

$$\int e^x d(e^x) = \frac{e^{2x}}{2} + C,$$

$$\int \arcsin x d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C \text{ и т.д.}$$

Интегрирование путем приведения подынтегрального выражения $f(u(x))u'(x)dx$ к виду $f(u(x))du(x)$ и последующего применения формул таблицы первообразных называется *интегрированием с помощью внесения под знак дифференциала*.

Внесение функции под знак дифференциала

Чтобы овладеть методом внесения под знак дифференциала нужно научиться распознавать в подынтегральной функции выражение вида $f(u(x))u'(x)$ и совершать переход от $u'(x)dx$ к $du(x)$, что, по сути, подразумевает нахождение первообразной функции $u'(x)$.

Например: так как первообразной функции x является функция $\frac{x^2}{2}$, то

$$x dx = d \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} dx^2,$$

аналогично, так как $-\frac{1}{x}$ - первообразная функции $\frac{1}{x^2}$, то

$$\frac{dx}{x^2} = d \left(-\frac{1}{x} \right) = -d \left(\frac{1}{x} \right);$$

и так далее:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = d(2\sqrt{x}) = 2d\sqrt{x};$$

$$x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} d x^{\alpha+1};$$

$$e^x dx = de^x;$$

$$\frac{dx}{x} = d \ln x;$$

$$\sin x dx = -d \cos x;$$

$$\cos x dx = d \sin x;$$

зная таблицу первообразных, можно продолжить предложенную последовательность равенств.

Внесение числа, как слагаемого, под знак дифференциала

Так как производная числа C равна нулю, то

$$d(u(x) + C) = (u(x) + C)' dx = u'(x) dx = du(x)$$

или кратко

$$du(x) = d(u(x) + C).$$

В частности

$$dx = d(x + C).$$

К переменной (функции) под знаком дифференциала можно прибавить любое число.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x+2)^5}$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция – степенная, но в основании степени $(x + 2)$, а под знаком дифференциала x . Так как

$$dx = d(x + 2),$$

то интеграл перепишем в виде

$$\int \frac{dx}{(x+2)^5} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^5} =$$

а затем применим формулу $\int \frac{du}{u^5} = -\frac{1}{4u^4} + C$:

$$= -\frac{1}{4(x+2)^4} + C.$$

Внесение числа, как множителя, под знак дифференциала

По свойству производной

$$(kf(x))' = k f'(x),$$

следовательно,

$$d(kf(x)) = (kf(x))' dx = k \cdot f'(x) dx = kdf(x).$$

отсюда получим равенство:

$$df(x) = \frac{1}{k} d(k \cdot f(x)).$$

т.е., при умножении переменной (функции) под знаком дифференциала на число, нужно разделить дифференциал на это число.

В частности

$$dx = \frac{1}{k} d(kx).$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \sin 7x dx$.

Решение. Подынтегральная функция \sin , но в аргументе функции $7x$, а под знаком дифференциала x .

Так как $dx = \frac{1}{7} d7x$ (умножили под знаком дифференциала на 7, и разделили дифференциал на 7), то интеграл примет вид:

$$\int \sin 7x dx = \frac{1}{7} \int \sin 7x d(7x) =$$

а затем применим формулу $\int \sin u du = -\cos u + C$:

$$= -\frac{1}{7} \cos 7x + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{5x-1}$

Решение. Подынтегральная функция степенная с показателем -1 , но в основании степени $(5x - 1)$, а по знаку дифференциала x .

Так как $dx = \frac{1}{5}d(5x - 1)$ (умножили x под знаком дифференциала на 5 и разделили дифференциал на 5, а затем к $5x$ под знаком дифференциала добавили -1), то интеграл перепишем в виде (при этом постоянную $\frac{1}{5}$ вынесем за знак интеграла):

$$\int \frac{dx}{5x-1} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x-1)}{(5x-1)} =$$

а затем применим формулу $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$:

$$= \frac{1}{5} \ln|5x - 1| + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int (3x - 4)^{17} dx$.

Решение. Подынтегральная функция степенная, но в основании степени $(3x - 4)$, а под знаком дифференциала x .

Так как $dx = \frac{1}{3}d(3x - 4)$, то интеграл перепишем в виде


$$\int (3x - 4)^{17} \frac{1}{3} d(3x - 4).$$

Постоянную $\frac{1}{3}$ вынесем за знак интеграла:

$$\int (3x - 4)^{17} dx = \frac{1}{3} \int (3x - 4)^{17} d(3x - 4) =$$

а затем применим формулу первообразной степенной функции $\int u^{17} du = \frac{1}{18} u^{18} + C$:

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} (3x - 4)^{18} + C.$$



Пример 5. Найти интегралы $\int \cos(1 - 6x)dx$, $\int e^{-x}dx$.

Р е ш е н и я. Запишем кратко:

$$\int \cos(1 - 6x)dx = -\frac{1}{6} \int \cos(1 - 6x)d(1 - 6x) = -\frac{1}{6}\sin(1 - 6x) + C,$$

т.к. $\int \cos u du = \sin u + C$, а $dx = -\frac{1}{6}d(1 - 6x)$.

$$\int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d(-x) = -e^{-x} + C,$$

т.к. $\int e^u du = e^u + C$, а $dx = -d(-x)$.

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-15}}$.

Решение. Подынтегральная функция степенная, но в основании степени $x^2 - 15$, а под знаком дифференциала x .
 x в числителе подынтегральной функции внесем под знак дифференциала, используя формулу

$$f(x)dx = d(F(x) + C),$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, а C - произвольная константа:

$$x dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2 - 15).$$

Интеграл примет вид:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-15}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-15)}{\sqrt{x^2-15}} =$$

затем по формуле $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$:

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2-15)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-15} + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{(x^3-2)^{11}}$.

Решение. Внесем x^2 под знак дифференциала:

$$x^2 dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}d(x^3 - 2),$$

и найдем интеграл, применяя формулу $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ при $n = -11$:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^3-2)^{11}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3-2)}{(x^3-2)^{11}} = -\frac{1}{3 \cdot 10} \cdot (x^3 - 2)^{-10} + C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{2x+5}{x^2+5x-2} dx$.

Решение. Внесем $2x + 5$ под знак дифференциала:

$$(2x + 5)dx = d\left(2\frac{x^2}{2} + 5x\right)$$

Чтобы получить под знаком дифференциала выражение, стоящее в знаменателе подынтегральной дроби, к многочлену $x^2 + 5x$ прибавим -2 :

$$d(x^2 + 5x - 2).$$

Далее, применяя формулу $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$, найдем интеграл:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x-2} dx = \int \frac{d(x^2+5x-2)}{x^2+5x-2} = \ln|x^2 + 5x - 2| + C.$$

