Инвариантность формы интеграла

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ и $u(x)$ - дифференцируемая функция, то по правилу дифференцирования сложной функции

$$(F(u(x)))' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x),$$

что означает, что функция $F(u(x))$ - первообразная функции $f(u(x)) \cdot u'(x)$ или

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = F(u(x)) + C.$$

Так как $f(u(x)) \cdot u'(x)dx = f(u(x))du(x)$, то можно записать равенство

$$\int f\left(u\left(x\right)\right) du(x) = F\left(u\left(x\right)\right) + C$$

или, опуская независимую переменную x,

$$\int f\left(u\right) du = F\left(u\right) + C.$$

С учетом инвариантности формы неопределенного интеграла для дифференцируемой функции $u(x)$ верны равенства:

1. $\int 0du = C$
2. $\int 1du = u + C$
3. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
5. $\int e^{u}du = e^{u} + C$
6. $\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$
7. $\int \cos udu = \sin u + C$
8. $\int \sin udu = -\cos u + C$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}u + C$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}u + C$
11. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
12. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| + C$
13. $\int \mathrm{tg}\, u\, du = -\ln|\cos u| + C$
14. $\int \mathrm{ctg}\, u\, du = \ln|\sin u| + C$
15. $\int \mathrm{ch}\, u\, du = \mathrm{sh}\, u + C$
16. $\int \mathrm{sh}\, u\, du = \mathrm{ch}\, u + C$
17. $\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th}\, u + C$
18. $\int \frac{du}{\mathrm{sh}^2 u} = -\mathrm{cth}\, u + C$
19. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}du = \arcsin\frac{u}{a} + C$
20. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$
21. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

Интегрирование методом внесения под знак дифференциала

По свойству инвариантности формы неопределенного интеграла, если верно равенство

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то для всякой дифференцируемой функции $u(x)$ верно равенство

$$\int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C$$

или

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

Так, с помощью формулы $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$ можно легко найти интегралы

$$\int \cos xd\left(\cos x\right) = \frac{\cos^2 x}{2} + C,$$

$$\int \ln xd\left(\ln x\right) = \frac{\ln^2 x}{2} + C,$$

$$\int e^x d\left(e^x\right) = \frac{e^{2x}}{2} + C,$$

$$\int \arcsin xd\left(\arcsin x\right) = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C \text{ и т.д.}$$

Интегрирование путем приведения подынтегрального выражения $f(u(x))u'(x)dx$ к виду $f\left(u(x)\right)du(x)$ и последующего применения формул таблицы первообразных называется *интегрированием с помощью внесения под знак дифференциала*.

Внесение функции под знак дифференциала

Чтобы овладеть методом внесения под знак дифференциала нужно научится распознавать в подынтегральной функции выражение вида $f(u(x))u'(x)$ и совершать переход от $u'(x)dx$ к $du(x)$, что, по сути, подразумевает нахождение первообразной функции $u'(x)$.

Например: так как первообразной функции x является функция $\frac{x^2}{2}$, то

$$xdx = d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}dx^2,$$

аналогично, так как $-\frac{1}{x}$ - первообразная функции $\frac{1}{x^2}$, то

$$\frac{dx}{x^2} = d\left(-\frac{1}{x}\right) = -d\left(\frac{1}{x}\right);$$

и так далее:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = d\left(2\sqrt{x}\right) = 2d\sqrt{x};$$

$$x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}d\,x^{\alpha+1};$$

$$e^{x}dx = de^{x};$$

$$\frac{dx}{x} = d\ln x;$$

$$\sin xdx = -d\cos x;$$

$$\cos xdx = d\sin x;$$

зная таблицу первообразных, можно продолжить предложенную последовательность равенств.

Внесение числа, как слагаемого, под знак дифференциала

Так как производная числа C равна нулю, то

$$d\left(u\left(x\right)+C\right)=\left(u\left(x\right)+C\right)'dx=u'\left(x\right)dx=du\left(x\right)$$

или кратко

$$du\left(x\right)=d\left(u\left(x\right)+C\right).$$

В частности

$$dx=d\left(x+C\right).$$

К переменной (функции) под знаком дифференциала можно прибавить любое число.

Пример 1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\left(x+2\right)^5}$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция – степенная, но в основании степени $(x+2)$, а под знаком дифференциала x. Так как

$$dx=d\left(x+2\right),$$

то интеграл перепишем в виде

$$\int\frac{dx}{\left(x+2\right)^5}=\int\frac{d(x+2)}{\left(x+2\right)^5}=,$$

а затем применим формулу $\int\frac{du}{u^5}=-\frac{1}{4u^4}+C$:

$$=-\frac{1}{4\left(x+2\right)^4}+C.$$

Внесение числа, как множителя, под знак дифференциала

По свойству производной

$$(kf(x))' = k\,f'(x),$$

следовательно,

$$d(kf(x)) = (kf(x))'dx = k \cdot f'(x)\,dx = kdf(x).$$

отсюда получим равенство:

$$df(x) = \frac{1}{k}d(k \cdot f(x)).$$

т.е., при умножении переменной (функции) под знаком дифференциала на число, нужно разделить дифференциал на это число.

В частности

$$dx = \frac{1}{k}d(kx).$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \sin 7xdx$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция $\sin$, но в аргументе функции $7x$, а под знаком дифференциала x.
Так как $dx = \frac{1}{7}d7x$ (умножили под знаком дифференциала на 7, и разделили дифференциал на 7), то интеграл примет вид:

$$\int \sin 7xdx = \frac{1}{7}\int \sin 7xd(7x) =$$

а затем применим формулу $\int \sin udu = -\cos u + C$:

$$= -\frac{1}{7}\cos 7x + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{5x-1}$

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция степенная с показателем -1, но в основании степени $(5x-1)$, а по знаком дифференциала x.

Так как $dx = \frac{1}{5}d(5x-1)$ (умножили x под знаком дифференциала на 5 и разделили дифференциал на 5, а затем к $5x$ под знаком дифференциала добавили -1), то интеграл перепишем в виде (при этом постоянную $\frac{1}{5}$ вынесем за знак интеграла):

$$\int \frac{dx}{5x-1} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x-1)}{(5x-1)} =$$

а затем применим формулу $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$:

$$= \frac{1}{5}\ln|5x-1| + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int (3x-4)^{17} dx$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция степенная, но в основании степени $(3x-4)$, а под знаком дифференциала x.

Так как $dx = \frac{1}{3} d(3x-4)$, то интеграл перепишем в виде

$$\int (3x-4)^{17} \frac{1}{3} d\,(3x-4).$$

Постоянную $\frac{1}{3}$ вынесем за знак интеграла:

$$\int (3x-4)^{17} dx = \frac{1}{3} \int (3x-4)^{17} d\,(3x-4) =$$

а затем применим формулу первообразной степенной функции $\int u^{17} du = \frac{1}{18} u^{18} + C$:

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} (3x-4)^{18} + C.$$

Пример 5. Найти интегралы $\int \cos(1-6x)dx$, $\int e^{-x}dx$.

Р е ш е н и я. Запишем кратко:

$$\int \cos(1-6x)dx = -\frac{1}{6}\int \cos(1-6x)d\left(1-6x\right) = -\frac{1}{6}\sin(1-6x) + C,$$

т.к. $\int \cos u du = \sin u + C$, а $dx = -\frac{1}{6}d\left(1-6x\right)$.

$$\int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d\left(-x\right) = -e^{-x} + C,$$

т.к. $\int e^{u}du = e^{u} + C$, а $dx = -d\left(-x\right)$.

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-15}}$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция степенная, но в основании степени x^2-15, а под знаком дифференциала x. x в числителе подынтегральной функции внесем под знак дифференциала, используя формулу

$$f(x)dx = d(F(x)+C),$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, а C - произвольная константа:

$$xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2-15).$$

Интеграл примет вид:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-15}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-15)}{\sqrt{x^2-15}} =$$

затем по формуле $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$:

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2-15)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-15} + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{(x^3-2)^{11}}$.

Р е ш е н и е. Внесем x^2 под знак дифференциала:

$$x^2 dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3} d(x^3-2),$$

и найдем интеграл, применяя формулу $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ при $n = -11$:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^3-2)^{11}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3-2)}{(x^3-2)^{11}} = -\frac{1}{3 \cdot 10} \cdot \left(x^3-2\right)^{-10} + C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{2x+5}{x^2+5x-2} dx$.

Р е ш е н и е. Внесем $2x+5$ под знак дифференциала:

$$(2x+5)dx = d\left(2\frac{x^2}{2}+5x\right)$$

Чтобы получить под знаком дифференциала выражение, стоящее в знаменателе подынтегральной дроби, к многочлену x^2+5x прибавим -2:

$$d\left(x^2+5x-2\right).$$

Далее, применяя формулу $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$, найдем интеграл:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x-2} dx = \int \frac{d(x^2+5x-2)}{x^2+5x-2} = \ln|x^2+5x-2| + C.$$