

Определители квадратных матриц

Необходимость введения определителя — числа, характеризующего квадратную матрицу A , — тесно связана с решением систем линейных уравнений (см. гл. 2). Определитель матрицы A обозначается $|A|$ или Δ .

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или определителем первого порядка, называется элемент a_{11} :

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}. \text{ Например, пусть } A = (3), \text{ тогда } \Delta_1 = |A| = 3.$$

Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$, или определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.3)$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются *членами определителя* второго порядка. Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$$

Пусть дана квадратная матрица A n -го порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется определитель матрицы $(n - 1)$ -го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n -го порядка имеет n^2 миноров $(n - 1)$ -го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (1.8)$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ — четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i + j)$ — нечетное число.

Важное значение для вычисления определителей имеет следующая теорема.

Теорема Лапласа¹. *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is} \quad (1.9)$$

(разложение по элементам i -й строки; $i = 1, 2, \dots, n$);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{sj}A_{sj} \quad (1.10)$$

(разложение по элементам j -го столбца; $j = 1, 2, \dots, n$).

□ Убедимся в справедливости теоремы Лапласа на примере определителя матрицы третьего порядка. Разложим его вначале по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

¹ Точнее данная теорема является частным случаем теоремы Лапласа.

Свойства определителей

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен 0.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ , то ее определитель умножится на это число λ .

□ Пусть определитель исходной матрицы равен Δ . Для определенности первую строку матрицы умножим на λ , получим новый определитель Δ' , который разложим по элементам первой строки:

¹ Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} A_{11} + \lambda a_{12} A_{12} + \dots + \lambda a_{1n} A_{1n} =$$

$$= \lambda (a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}) = \lambda \Delta. \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. За знак определителя можно выносить общий множитель элементов любой строки или столбца в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех ее элементов.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \text{ но}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется: $|A'| = |A|$.

4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

□ Предположим вначале, что переставлены две соседние строки матрицы: i и $i+1$. Разложим определитель исходной матрицы Δ по элементам i -й строки, а определитель новой матрицы (с переставленными строками) Δ' — по элементам $(i+1)$ -й строки. Разложения будут отличаться только знаком, так как в формуле (1.9) для Δ' каждое алгебраическое дополнение будет иметь противоположный знак (множители $(-1)^{i+j}$ сменяются на множители $(-1)^{i+1+j}$, поэтому $\Delta' = -\Delta$.

Если переставить не соседние строки, а, скажем, i -ю и $(i+k)$ -ю, то такую перестановку можно представить как последовательное смещение i -й строки на k строк вниз (при этом каждый раз знак определителя меняется), а $(i+k)$ -й строки на $(k-1)$ вверх, что тоже сопровождается $(k-1)$ изменением знака, т.е. знак поменяется нечетное число $(2k-1)$ раз: $\Delta' = -\Delta$.

Доказательство для столбцов аналогично. ■

5. Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен 0.

□ Действительно, переставим эти строки (столбцы). С одной стороны, определитель не изменится, но, с другой стороны, по свойству 4 поменяет знак, т.е. $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$. ■

6. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен 0.

□ Пусть для определенности пропорциональны первая и вторая строки. Тогда, вынося коэффициент пропорциональности λ , получаем по свойству 2: $\Delta' = \lambda \cdot \Delta$, где Δ имеет две одинаковые строки и по свойству 5 равен 0. ■

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна 0, т.е.

$$\sum_{s=1}^n a_{is} A_{js} = 0, \text{ при } i \neq j \quad (1.11)$$

8. *Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой*

строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

□ Пусть для определенности к элементам i -й строки матрицы прибавим элементы j -й строки, умноженные на λ ($i \neq j$). Тогда первая строка матрицы имеет вид: $[(a_{i1} + \lambda a_{j1})(a_{i2} + \lambda a_{j2}) \dots (a_{in} + \lambda a_{jn})]$. Определитель полученной матрицы вычислим разложением по элементам i -й строки:

$$\Delta' = (a_{i1} + \lambda a_{j1})A_{i1} + (a_{i2} + \lambda a_{j2})A_{i2} + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})A_{in},$$

где A_{is} — алгебраические дополнения элементов i -й строки исходной матрицы ($s = 1, 2, \dots, n; i \neq j$). Раскроем скобки и получим после преобразования:

$$\Delta' = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is} + \lambda \sum_{s=1}^n a_{js}A_{is}. \quad (i \neq j).$$

Используя формулу (1.12), получаем, что первая сумма равна определителю исходной матрицы, а вторая — 0, т.е. $\Delta' = \Delta$. ■

9. *Сумма произведений произвольных чисел b_1, b_2, \dots, b_n на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа b_1, b_2, \dots, b_n .*

Свойство вытекает непосредственно из теоремы Лапласа.

10. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$; A и B —*

З а м е ч а н и е. Из свойства 10 следует, что даже если $AB \neq BA$, то $|AB| = |BA|$.

Перечисленные свойства определителей позволяют существенно упростить их вычисление, особенно для определителей высоких порядков. При вычислении определителей целесообразно так преобразовать исходную матрицу с помощью свойств 1—9, чтобы преобразованная матрица имела строку (или столбец), содержащую как можно больше нулей, а потом найти определитель разложением по этой строке (столбцу).

▷ **Пример 1.9.** Вычислить определитель четвертого порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в 0. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью теоремы Лапласа, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элементы 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1)(-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144. \quad \blacktriangleright$$

Обратная матрица

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1} такое, что произведение $a \cdot a^{-1} = 1$. Для квадратных матриц тоже вводится аналогичное понятие.

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A , если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \quad (1.13)$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если $a \neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования числа a^{-1} , то для существования матрицы A^{-1} таким условием является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то такая квадратная матрица называется *невырожденной*, или *неособенной*; в противном случае (при $|A| = 0$) — *вырожденной*, или *особенной*.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Алгоритм вычисления обратной матрицы: 1⁰. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2⁰ Находим матрицу A' , транспонированную к A .

3⁰ Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij} = A_{ji} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$ и составляем из них присоединенную матрицу \tilde{A} : $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$.

4⁰ Вычисляем обратную матрицу по формуле (1.14).

5⁰. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} , исходя из ее определения $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ (п. 5⁰ не обязателен).

▷ **Пример 1.10.** Найти матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1⁰. Определитель матрицы $|A| = 5 \neq 0$ (см. пример 1.6), т.е. матрица A – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2⁰. Находим матрицу A' , транспонированную к A :