Определители квадратных матриц

Необходимость введения определителя — числа, характеризующего квадратную матрицу A, — тесно связана с решением систем линейных уравнений (см. гл. 2). Определитель матрицы A обозначается $|A|$ или Δ.

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$, или *определителем первого порядка*, называется элемент a_{11}:

$\Delta_1=|A|=a_{11}$. Например, пусть $A=(3)$, тогда $\Delta_1=|A|=3$.

Определителем матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$, или *определителем второго порядка*, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются *членами определителя* второго порядка. Например, пусть $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-3\cdot 1=7.$$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$, или ***определителем третьего порядка,*** называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \qquad \textbf{(1.4)}$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу (1.4), легко запомнить, пользуясь схемой (рис. 1.1), которая называется *правилом треугольников* или *правилом Сарруса.*

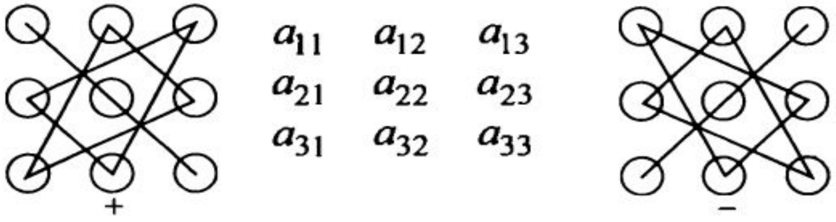

Рис. 1.1

димо ввести новые понятия.

Пусть дана квадратная матрица A n-го порядка.

Минором M_{ij} ***элемента*** a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} ***элемента*** a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad \textbf{(1.8)}$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ — четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i+j)$ — нечетное число.

Важное значение для вычисления определителей имеет следующая теорема.

Теорема Лапласа[1]. *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is} \tag{1.9}$$

(разложение по элементам i-й строки; $i = 1, 2, \quad n$);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj} \tag{1.10}$$

(разложение по элементам j-го столбца; $j = 1, 2, \quad , n$).

□ Убедимся в справедливости теоремы Лапласа на примере определителя матрицы третьего порядка. Разложим его вначале по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

[1] Точнее данная теорема является частным случаем теоремы Лапласа.

Свойства определителей

1. *Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен 0.*

2. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число λ.*

□ Пусть определитель исходной матрицы равен Δ. Для определенности первую строку матрицы умножим на λ, получим новый определитель Δ', который разложим по элементам первой строки:

---

[1] Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} A_{11} + \lambda a_{12} A_{12} + \ldots + \lambda a_{1n} A_{1n} =$$

$$= \lambda(a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n}) = \lambda\Delta. \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. За знак определителя можно выносить общий множитель элементов любой строки или столбца в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех ее элементов.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, но

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. *При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется:* $|A'| = |A|$.

4. *При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.*

□ Предположим вначале, что переставлены две соседние строки матрицы: i и $i+1$. Разложим определитель исходной матрицы Δ по элементам i-й строки, а определитель новой матрицы (с переставленными строками) Δ' — по элементам $(i+1)$-й строки. Разложения будут отличаться только знаком, так как в формуле (1.9) для Δ' каждое алгебраическое дополнение будет иметь противоположный знак (множители $(-1)^{i+j}$ сменятся на множители $(-1)^{i+1+j}$, поэтому $\Delta' = -\Delta$.

Если переставить не соседние строки, а, скажем, i-ю и $(i + k)$-ю, то такую перестановку можно представить как последовательное смещение i-й строки на k строк вниз (при этом каждый раз знак определителя меняется), а $(i + k)$-й строки на $(k - 1)$ вверх, что тоже сопровождается $(k - 1)$ изменением знака, т.е. знак поменяется нечетное число $(2k - 1)$ раз: $\Delta' = -\Delta$.

Доказательство для столбцов аналогично. ■

5. *Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен 0.*

□ Действительно, переставим эти строки (столбцы). С одной стороны, определитель не изменится, но, с другой стороны, по свойству 4 поменяет знак, т.е. $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$. ■

6. *Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен 0.*

□ Пусть для определенности пропорциональны первая и вторая строки. Тогда, вынося коэффициент пропорциональности λ, получаем по свойству 2: $\Delta' = \lambda \cdot \Delta$, где Δ имеет две одинаковые строки и по свойству 5 равен 0. ■

7. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна 0, т.е.*

$$\sum_{S=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0, \text{ при } i \neq j \qquad \textbf{(1.11)}$$

8. *Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.*

□ Пусть для определенности к элементам i-й строки матрицы прибавим элементы j-й строки, умноженные на λ ($i \neq j$). Тогда первая строка матрицы имеет вид: $[(a_{i1}+\lambda a_{j1})(a_{i2}+\lambda a_{j2})\ldots(a_{in}+ +\lambda a_{jn})]$. Определитель полученной матрицы вычислим разложением по элементам i-й строки:

$$\Delta' = (a_{i1}+\lambda a_{j1})A_{i1} + (a_{i2}+\lambda a_{j2})\,A_{i2} + \ldots + (a_{in}+\lambda a_{jn})A_{in},$$

где A_{is} — алгебраические дополнения элементов i-й строки исходной матрицы ($s = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$). Раскроем скобки и получим после преобразования:

$$\Delta' = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is} + \lambda\sum_{s=1}^{n} a_{js}A_{is}. \quad (i \neq j).$$

Используя формулу (1.12), получаем, что первая сумма равна определителю исходной матрицы, а вторая — 0, т.е. $\Delta' = \Delta$. ■

9. *Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа* $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Свойство вытекает непосредственно из теоремы Лапласа.

10. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:* $|C| = |A|\cdot|B|$, где $C = A\cdot B$; A и B —

З а м е ч а н и е. Из свойства 10 следует, что даже если $AB \neq BA$, то $|AB| = |BA|$.

Перечисленные свойства определителей позволяют существенно упростить их вычисление, особенно для определителей высоких порядков. При вычислении определителей целесообразно так преобразовать исходную матрицу с помощью свойств 1—**9**, чтобы преобразованная матрица имела строку (или столбец), содержащую как можно больше нулей, а потом найти определитель разложением по этой строке (столбцу).

▷ **Пример 1.9.** Вычислить определитель четвертого порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в 0. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (−4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью теоремы Лапласа, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элементы 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (−13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1)(-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144. \quad \blacktriangleright$$

Обратная матрица

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1} такое, что произведение $a \cdot a^{-1} = 1$. Для квадратных матриц тоже вводится аналогичное понятие.

Определение. ***Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:***

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \tag{1.13}$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если $a \neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования числа a^{-1}, то для существования матрицы A^{-1} таким условием является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то такая квадратная матрица называется *невырожденной,* или *неособенной;* в противном случае (при $|A| = 0$) — *вырожденной,* или *особенной.*

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). *Обратная матрица* A^{-1} *существует* (*и единственна*) *тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.*

Алгоритм вычисления обратной матрицы: 1^0. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A|=0$, то матрица A – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A|\neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2^0 Находим матрицу A', транспонированную к A.

3^0 Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij}=A_{ji}(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{a}_{ij}=A'_{ij}=A_{ji}$ $(i=$ $=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

4^0 Вычисляем обратную матрицу по формуле (1.14).

5^0. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения $A^{-1}A=A\cdot A^{-1}=E$ (п. 5^0 не обязателен).

▷ **Пример 1.10.** Найти матрицу, обратную к данной:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1^0. Определитель матрицы $|A|=5\neq 0$ (см. пример **1.6**), т.е. матрица A — невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2^0. Находим матрицу A', транспонированную к A: