

# Применение производных к исследованию функций и построение графиков

# План исследования функции

1. Область определения функции
2. Исследование функций на четность, нечетность
3. Точки пересечения с осями координат
4. Промежутки возрастания и убывания функции; экстремумы функции
5. Промежутки выпуклости и вогнутости функции; точки перегиба
6. Дополнительные точки, построение графика
7. Уравнение касательной в точке перегиба

# Пример:

1. Исследовать функцию и построить график.

$$y = 2 - 3x + x^3$$

- 1) Область определения:  $x \in (-\infty; +\infty)$
- 2) Исследование на четность или нечетность:

$$\begin{aligned}y(-x) &= 2 - (-x) + x(-x)^3 = 2 + 3x - x^3 \\ &= -(-2 - 3x + x^3)\end{aligned}$$

Функция общего вида, не является ни четной, ни нечетной.

3) Точка пересечения с осью ОХ: А(1;0)

$$y = 0; 2 - 3x + x^3 = 0; \underline{x = 1}$$

Точка пересечения с осью ОУ: В(0;2)

$$x = 0; 2 - 3 \cdot 0 + 0^3 = 2; y = 2$$

4) Промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы функции:

Функция называется *возрастающей*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется *убывающей*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Возрастание и убывание функции характеризуется знаком её первой производной.

$$y' = (2 - 3x + x^3)' = -3 + 3x^2$$

$$-3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

- если на некотором интервале  $y' > 0$ , то функция на этом интервале **возрастает**;
- если на некотором интервале  $y' < 0$ , то функция на этом интервале **убывает**.

Точки, в которых первая производная равна 0 или не существует, называются *критическими точками 1 рода*.

Если при переходе через критическую точку  $x_0$  слева направо производная поменяла знак с  $+$  на  $-$ , то  $x_0$  называется точкой *максимума* функции.

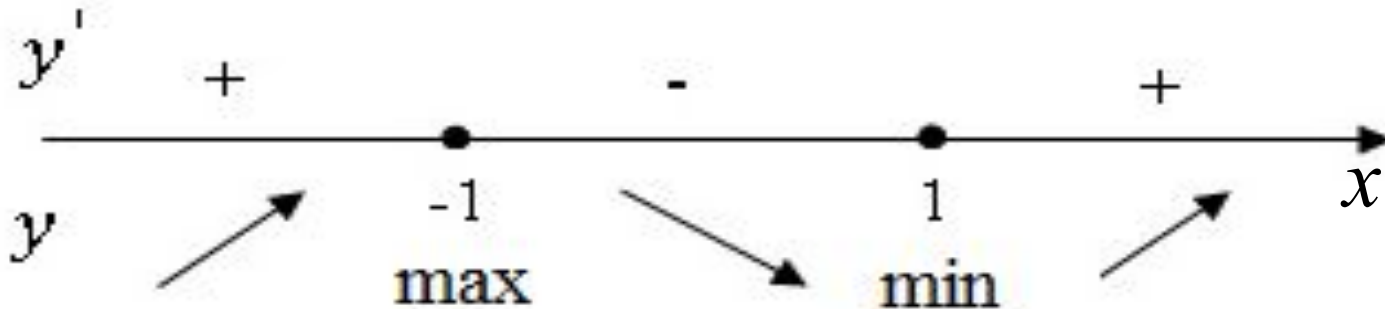
Если при переходе через критическую точку  $x_0$  слева направо производная поменяла знак с  $-$  на  $+$ , то  $x_0$  называется точкой *минимума* функции.

Максимум и минимум функции называются её *экстремумами*.

$$y'(-2) = -3 + 12 = 9 > 0$$

$$y'(0) = -3 < 0$$

$$y'(2) = -3 + 12 = 9 > 0$$



Находим экстремумы функции.

$$y'_{\max} = y(-1) = 2 + 3 - 1 = 4 \quad \text{Точка максимума } (-1; 4)$$

$$y'_{\min} = y(1) = 2 - 3 + 1 = 0 \quad \text{Точка минимума } (1; 0)$$

5) Промежутки выпуклости и вогнутости функции; точки перегиба:

Функция называется *выпуклой*, если она лежит ниже своей касательной.

Функция называется *вогнутой*, если она лежит выше своей касательной.

Точки, в которых выпуклость меняется на вогнутость или наоборот называются *точками перегиба*.

*Критическими точками 2 рода* называются точки, в которых 2-я производная функции равна 0 или не существует.

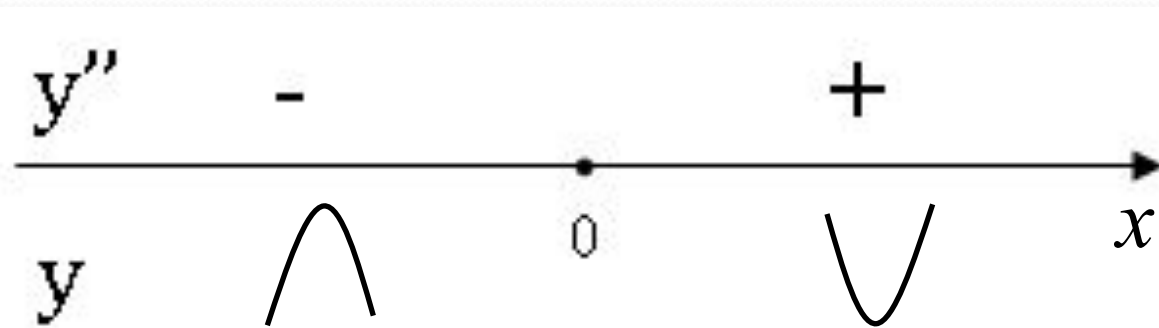
$$y'' = (-3 + 3x^2)' = 6x$$

$$6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

- если на некотором интервале  $y'' > 0$ , то на этом интервале график функции вогнутый; 
- если на некотором интервале  $y'' < 0$ , то на этом интервале график функции выпуклый; 

$$y''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$$

$$y''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$$





Находим точку перегиба:

$$y_{\text{перег.}} = y(0) = 2 - 3 \cdot 0 + 0^3 = 2$$

*Точка перегиба (0;2)*

6) Дополнительные точки, построение графика:

$$y(-2) = 2 - 3 \cdot (-2) + (-2)^3 = 2 + 6 - 8 = 0$$

$$y(2) = 2 - 3 \cdot 2 + 2^3 = 2 - 6 + 8 = 4$$

7) уравнение касательной в точке перегиба:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \quad (0; 2)$$

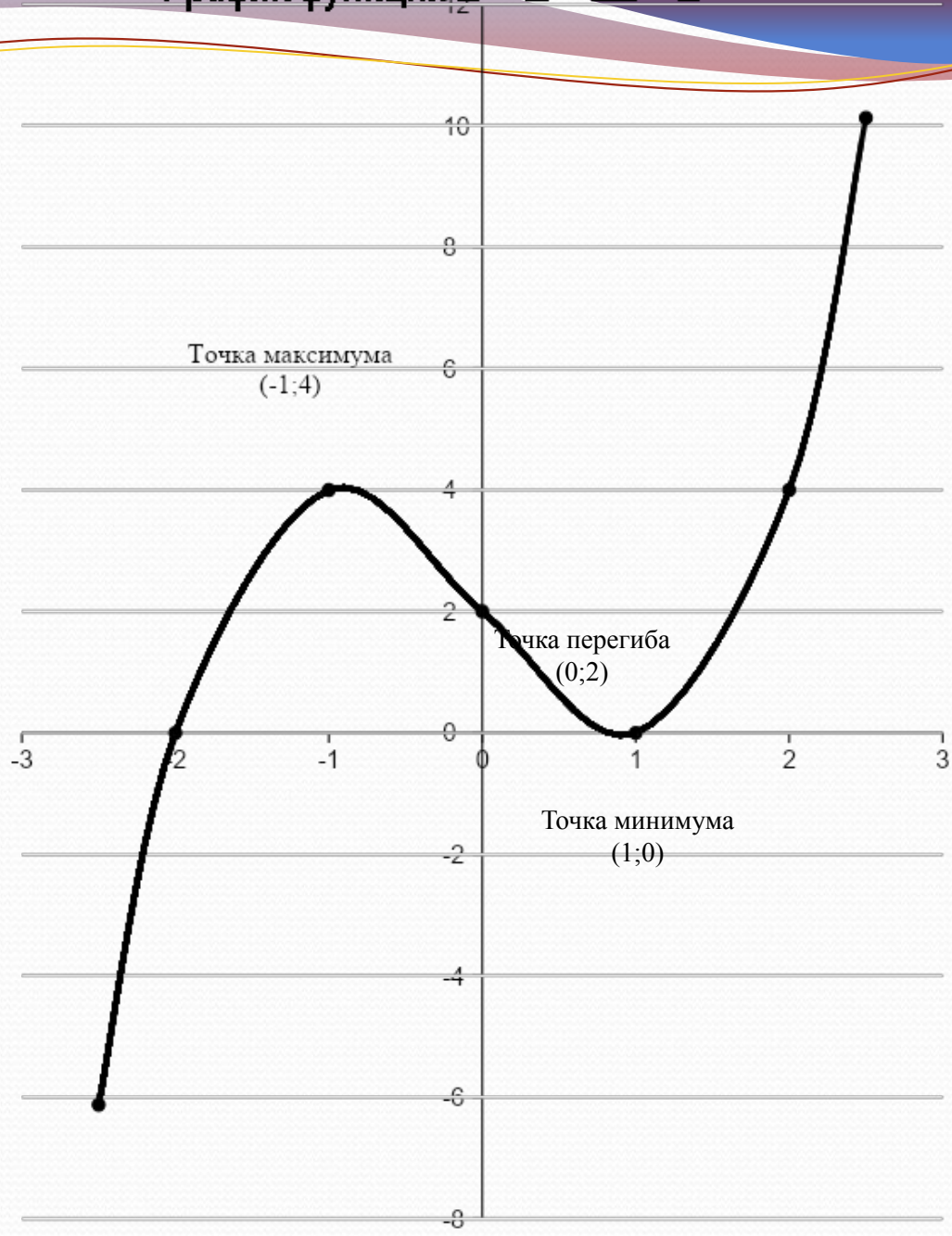
$$y'(x_0) = y'(0) = -3 + 3 \cdot 0^2 = -3$$

$$y - 2 = -3 \cdot (x - 0)$$

$$y - 2 = -3x$$

$3x + y - 2 = 0$  - *уравнение касательной в точке перегиба*

# График функции $y = x^3 - 3x^2 + 2x$



# ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

*Частной производной* функции  $f(x,y)$  по переменной  $x$  в точке  $(x_0, y_0)$  называют предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

*Частной производной* функции  $f(x,y)$  по переменной  $y$  в точке  $(x_0, y_0)$  называют предел:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Частная производная – это производная функции одной переменной, когда значение другой переменной фиксировано. Поэтому частные производные вычисляются по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной.

**Пример.** Найти частные производные функции

$$z = e^{x^2 y}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^{x^2 y} (x^2 y)'_x = 2xy e^{x^2 y} \quad y - \text{const}$$

$$\frac{dz}{dy} = e^{x^2 y} (x^2 y)'_y = x^2 e^{x^2 y} \quad x - \text{const}$$

**Частными производными второго порядка** функции  $f(x,y)$  по  $x$  и по  $y$  соответственно называют выражения:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right), \quad \frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{df}{dy} \right)$$

**Смешанными частными производными второго порядка** функции  $f(x,y)$  называют выражения:

$$\frac{d^2 f}{dxdy} = \frac{d}{dy} \left( \frac{df}{dx} \right), \quad \frac{d^2 f}{dydx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dy} \right)$$