Применение производных к исследованию функций и построение графиков

План исследования функции

1. Область определения функции
2. Исследование функций на четность, нечетность
3. Точки пересечения с осями координат
4. Промежутки возрастания и убывания функции; экстремумы функции
5. Промежутки выпуклости и вогнутости функции; точки перегиба
6. Дополнительные точки, построение графика
7. Уравнение касательной в точке перегиба

Пример:

1. Исследовать функцию и построить график.

$$y = 2 - 3x + x^3$$

1) Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Исследование на четность или нечетность:

$$y(-x) = 2 - (-x) + x(-x)^3 = 2 + 3x - x^3$$
$$= -(-2 - 3x + x^3)$$

Функция общего вида, не является ни четной, ни нечетной.

3) Точка пересечения с осью OX: A(1;0)

$$y = 0;\ 2 - 3x + x^3 = 0;\ x = 1$$

Точка пересечения с осью OY: B(0;2)

$$x = 0;\ 2 - 3 \cdot 0 + 0^3 = 2;\ y = 2$$

4) Промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы функции:

Функция называется ***возрастающей***, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется ***убывающей***, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Возрастание и убывание функции характеризуется знаком её первой производной.

$$y' = (2 - 3x + x^3)' = -3 + 3x^2$$
$$-3 + 3x^2 = 0 => x_{1,2} = \pm 1$$

– если на некотором интервале **y'>0**, то функция на этом интервале **возрастает**;
– если на некотором интервале **y'<0**, то функция на этом интервале **убывает**.

Точки, в которых первая производная равна 0 или не существует, называются ***критическими точками 1 рода***.

Если при переходе через критическую точку x_0 слева направо производная поменяла знак с + на - , то x_0 называется точкой ***максимума*** функции.

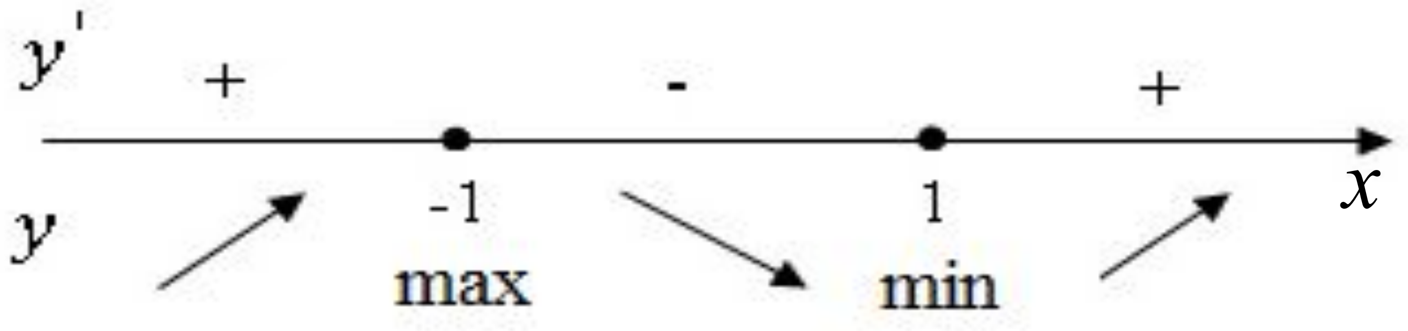
Если при переходе через критическую точку x_0 слева направо производная поменяла знак с - на +, то x_0 называется точкой ***минимума*** функции.

Максимум и минимум функции называются её ***экстремумами***.

$y'(-2) = -3 + 12 = 9 > 0$

$y'(0) = -3 < 0$

$y'(2) = -3 + 12 = 9 > 0$



Находим экстремумы функции:

$y'_{max} = y(-1) = 2 + 3 - 1 = 4$ *Точка максимума (-1;4)*

$y'_{min} = y(1) = 2 - 3 + 1 = 0$ *Точка минимума (1;0)*

5) Промежутки выпуклости и вогнутости функции; точки перегиба:

Функция называется ***выпуклой***, если она лежит ниже своей касательной.

Функция называется ***вогнутой***, если она лежит выше своей касательной.

Точки, в которых выпуклость меняется на вогнутость или наоборот называются ***точками перегиба***.

Критическими точками 2 рода называются точки, в которых 2-я производная функции равна 0 или не существует.

$$y'' = (-3 + 3x^2)' = 6x$$

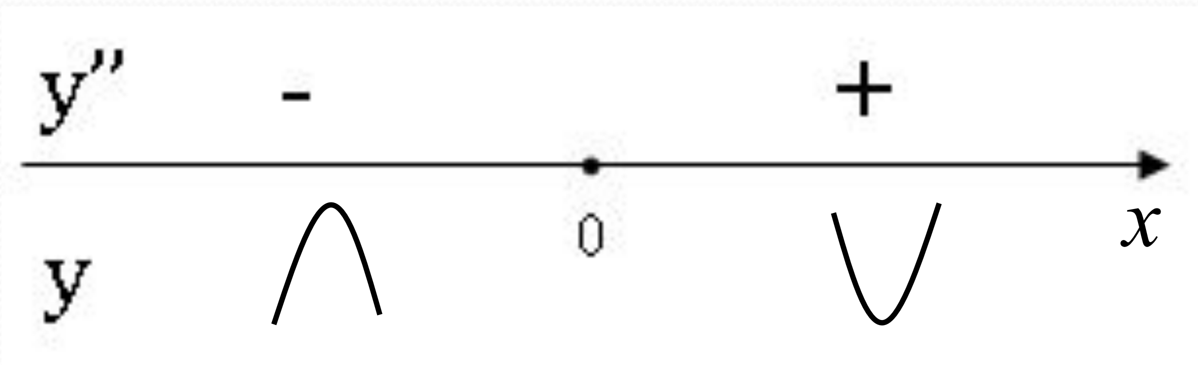
$$6x = 0 => x = 0$$

– если на некотором интервале y”>0, то на этом интервале график функции вогнутый;

– если на некотором интервале y”<0, то на этом интервале график функции выпуклый;

$$y''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$$

$$y''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$$



Находим точку перегиба:

$$y_{\text{перег.}} = y(0) = 2 - 3 \cdot 0 + 0^3 = 2$$

Точка перегиба (0;2)

6) Дополнительные точки, построение графика:

$$y(-2) = 2 - 3 \cdot (-2) + (-2)^3 = 2 + 6 - 8 = 0$$

$$y(2) = 2 - 3 \cdot 2 + 2^3 = 2 - 6 + 8 = 4$$

7) Уравнение касательной в точке перегиба:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \qquad (0; 2)$$

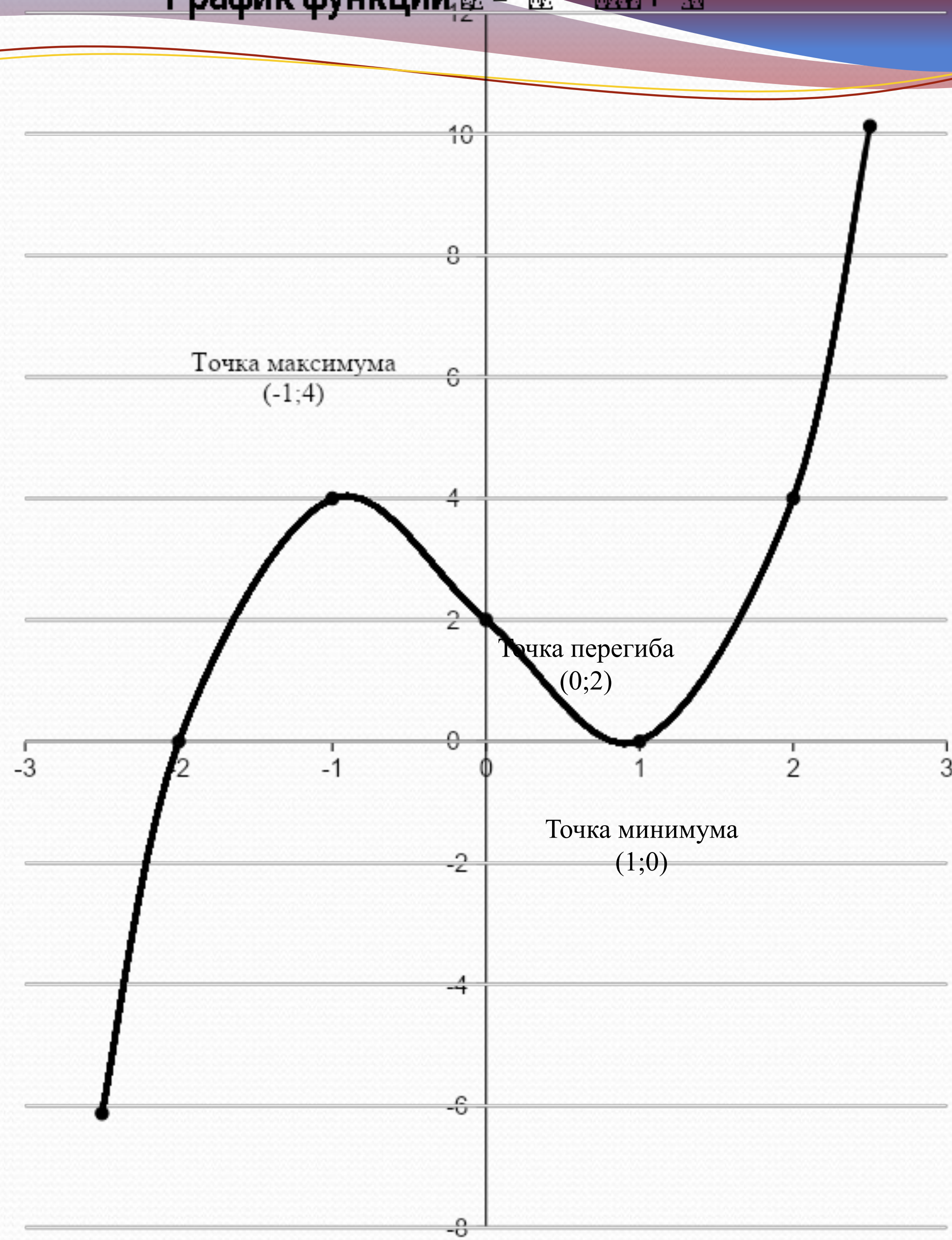
$$y'(x_0) = y'(0) = -3 + 3 \cdot 0^2 = -3$$

$$y - 2 = -3 \cdot (x - 0)$$

$$y - 2 = -3x$$

$3x + y - 2 = 0$ ***- уравнение касательной в точке перегиба***

График функции



ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Частной производной функции *f(x,y)* по переменной *x* в точке (x_0,y_0) называют предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Частной производной функции *f(x,y)* по переменной *y* в точке (x_0,y_0) называют предел:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(y_0+\Delta y,x_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Частная производная – это производная функции одной переменной, когда значение другой переменной фиксировано. Поэтому частные производные вычисляются по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной.

Пример. Найти частные производные функции

$$z = e^{x^2 y}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^{x^2 y}(x^2 y)_x{}' = 2xye^{x^2 y} \quad y - const$$

$$\frac{dz}{dy} = e^{x^2 y}(x^2 y)_y{}' = x^2 e^{x^2 y} \quad x - const$$

Частными производными второго порядка функции *f(x,y)* по *x* и по *y* соответственно называют выражения:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right), \qquad \frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dy}\right)$$

Смешанными частными производными второго порядка функции *f(x,y)* называют выражения:

$$\frac{d^2 f}{dxdy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dx}\right), \qquad \frac{d^2 f}{dydx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right)$$