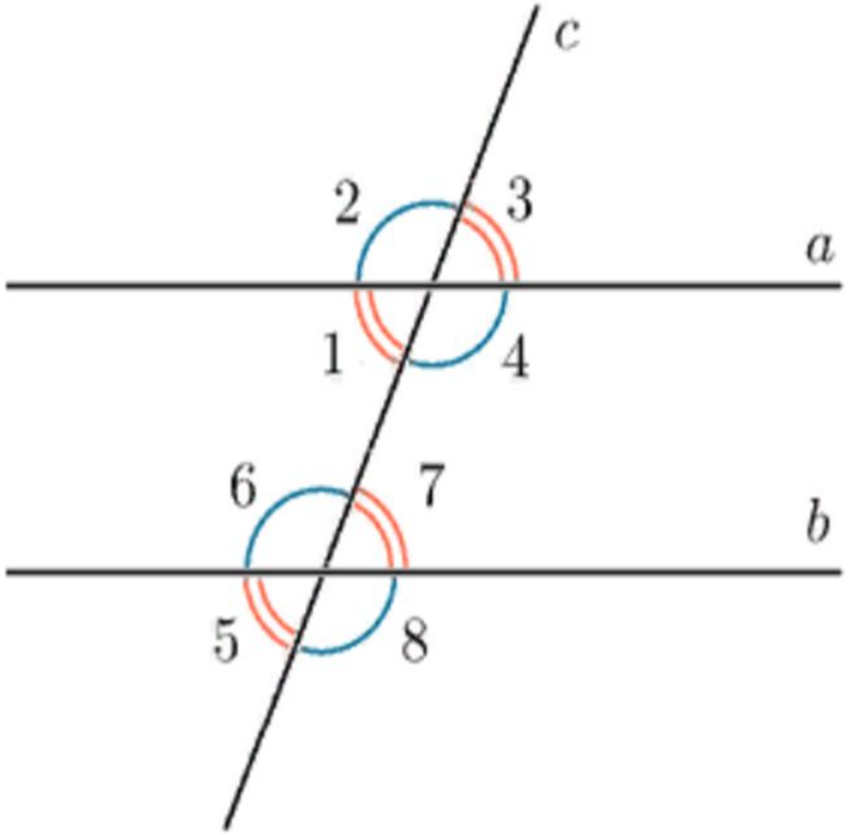
ПЛАНИМЕТРИЯ

Углы при параллельных прямых и секущей. Вертикальные, смежные, односторонние, соответственные, накрест лежащие углы



Углы 1 и 3 — *вертикальные*. Очевидно, *вертикальные углы равны*, то есть $\angle 1 = \angle 3$

$\angle 2 = \angle 4$ Конечно, углы 5 и 7, 6 и 8 — тоже вертикальные.

Углы 1 и 2 — *смежные*. Сумма смежных углов равна $180°$

Углы 3 и 5 (а также 1 и 7, 2 и 8, 4 и 6) Накрест лежащие углы равны.

Углы 1 и 6 — *односторонние*.

Они лежат по одну сторону от всей «конструкции».

Сумма односторонних углов равна $180°$ $\angle 1 + \angle 6 = 180°$,

$\angle 4 + \angle 7 = 180°$.

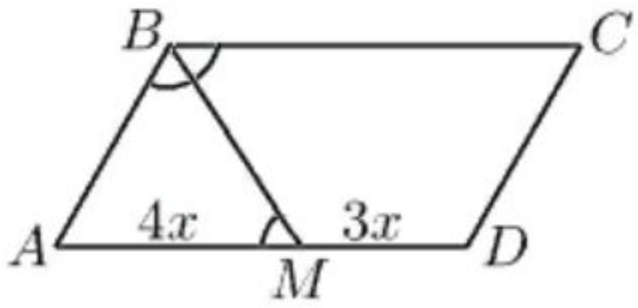
Углы 2 и 6 (а также 3 и 7, 1 и 5, 4 и 8) называются *соответственными*.

Соответственные углы равны, то есть $\angle 2 = \angle 6$,

$\angle 3 = \angle 7$.

Чтобы применять все эти факты в решении задач ЕГЭ, надо научиться видеть их на чертеже.

1. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $3:4$, считая от вершины тупого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.



биссектриса угла — это луч, выходящий из вершины угла

Пусть BM — биссектриса тупого угла B. По условию, отрезки MD и AB равны $3x$ и $4x$ соответственно.

Рассмотрим углы CBM и BMA. Поскольку AD и BC параллельны, BM — секущая, углы CBM и BMA являются накрест лежащими. Мы знаем, что накрест лежащие углы равны. Значит, треугольник ABM — равнобедренный, следовательно, $AB = AM = 4x$.

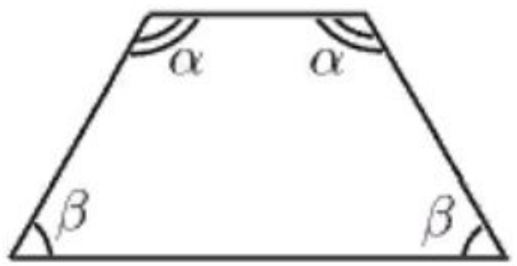
Периметр параллелограмма — это сумма всех его сторон, то есть

$$7x + 7x + 4x + 4x = 88.$$

Отсюда $x = 4, 7x = 28$.

Ответ: 28.

3. Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 50°? Ответ дайте в градусах.



равнобедренной (или равнобокой) называется трапеция, у которой боковые стороны равны.

Следовательно, равны углы при верхнем основании, а также углы при нижнем основании.

По условию, $\alpha - \beta = 50^\circ$, то есть $\alpha = \beta + 50^\circ$.

Углы α и β — односторонние при параллельных прямых и секущей, следовательно,

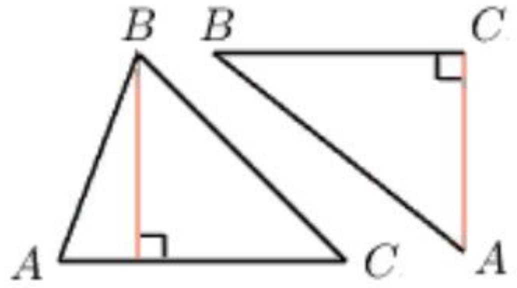
$\alpha + \beta = 180^\circ$.

Итак, $2\beta + 50^\circ = 180^\circ$

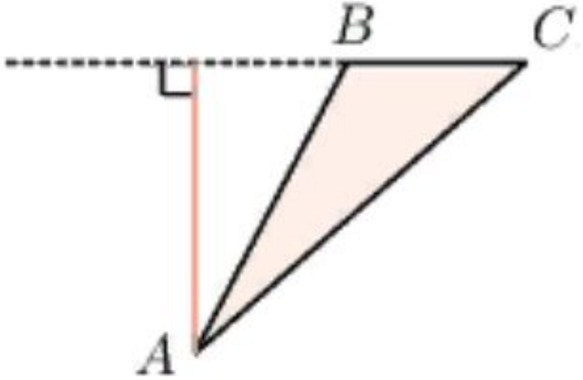
$\beta = 65^\circ$, тогда $\alpha = 115^\circ$.

Ответ: 115°.

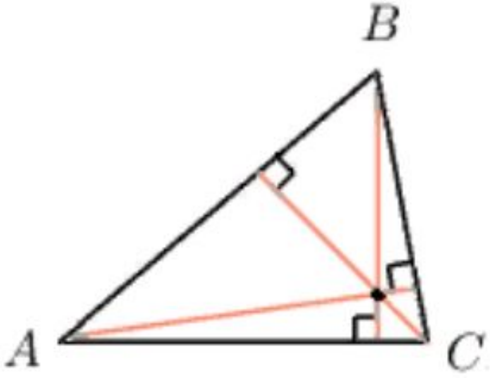
Элементы треугольника. Высоты, медианы, биссектрисы



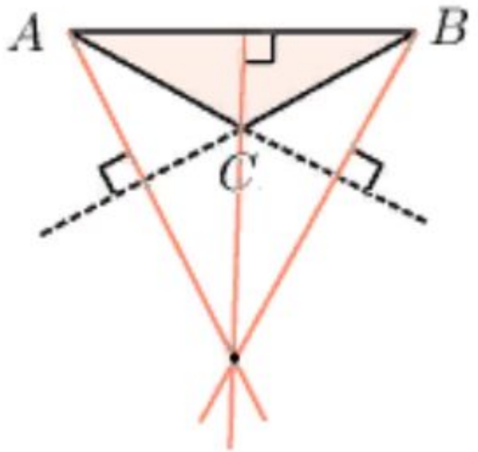
Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону.



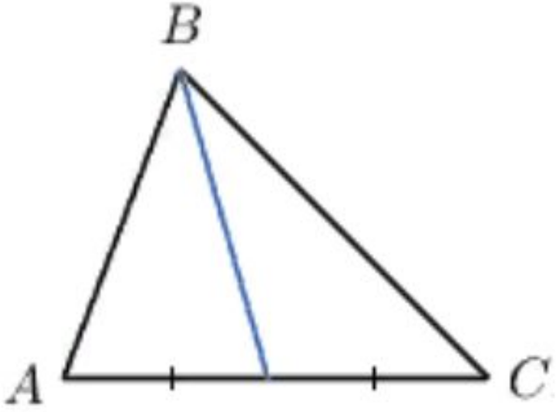
В тупоугольном треугольнике высота опускается на продолжение стороны.



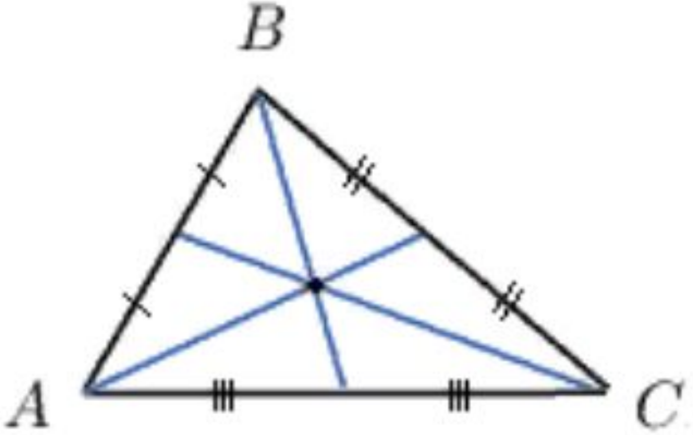
Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке.



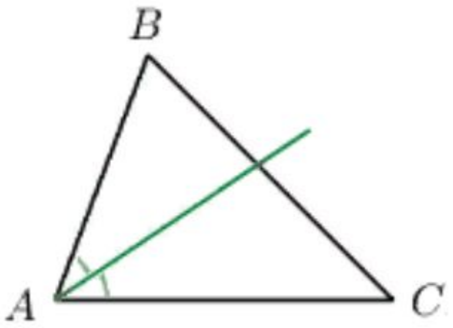
В случае тупого угла пересекаются продолжения высот.



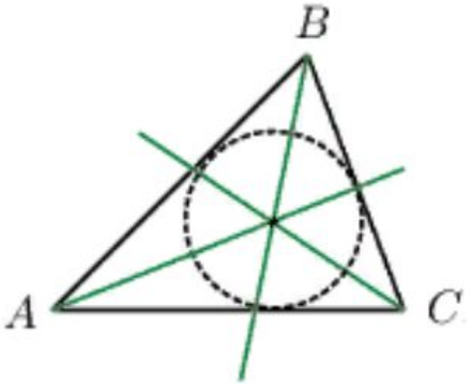
Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.



Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.

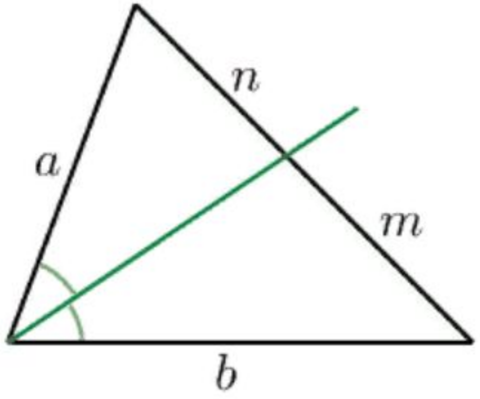


Биссектриса треугольника делит угол треугольника пополам.



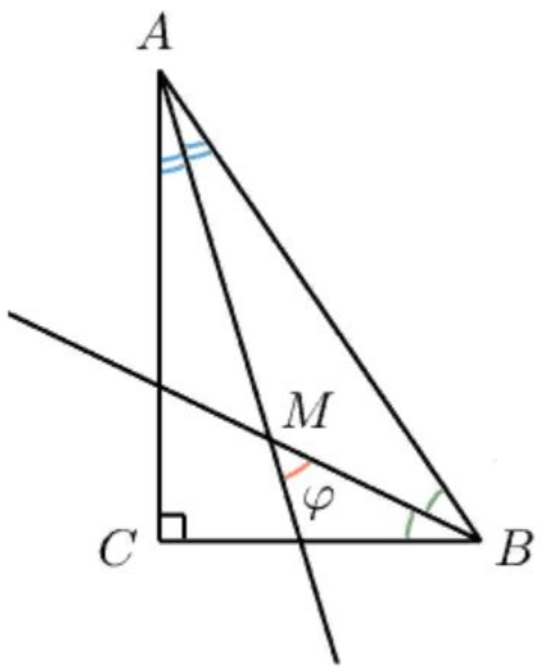
Три биссектрисы пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Еще одно свойство биссектрисы пригодится тем, кто собирается решать задачу $C4$. *Биссектриса треугольника делит противоположную сторону в отношении длин прилежащих сторон.*



$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$$

1. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника.



Пусть биссектрисы треугольника ABC (в котором угол C равен $90°$) пересекаются в точке M.

Рассмотрим треугольник ABM.

$\angle MAB = 0,5\angle BAC$,

$\angle ABM = 0,5\angle ABC$, тогда $\angle AMB = 180° - \angle MAB - \angle ABM = 180° - 0,5\left(\angle ABC + \angle BAC\right)$

Острый угол между биссектрисами на рисунке обозначен φ.

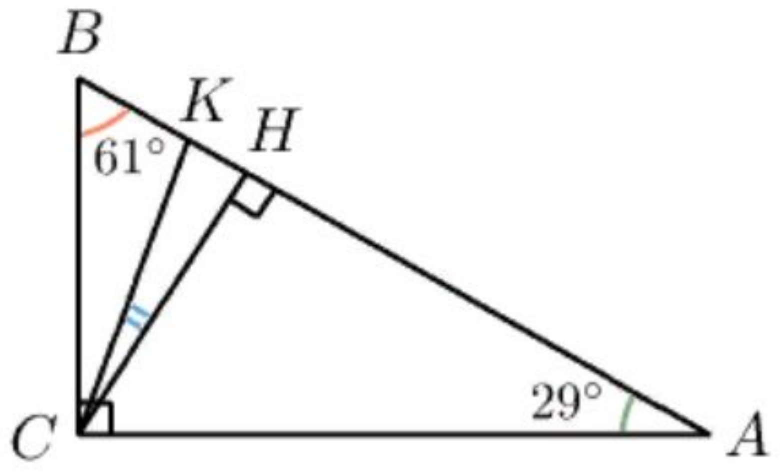
Угол φ смежный с углом AMB, следовательно, $\varphi = 0,5\left(\angle ABC + \angle BAC\right)$.

Поскольку треугольник ABC — прямоугольный, то $\angle ABC + \angle BAC = 90°$.

Тогда $\varphi = 0,5\left(\angle ABC + \angle BAC\right) = 90° : 2 = 45°$.

Ответ: 45.

2. Острые углы прямоугольного треугольника равны 29° и 61°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Пусть CH — высота, проведенная из вершины прямого угла C, CK — биссектриса угла C.

Тогда $\angle ACH = \angle ABC = 61^\circ$

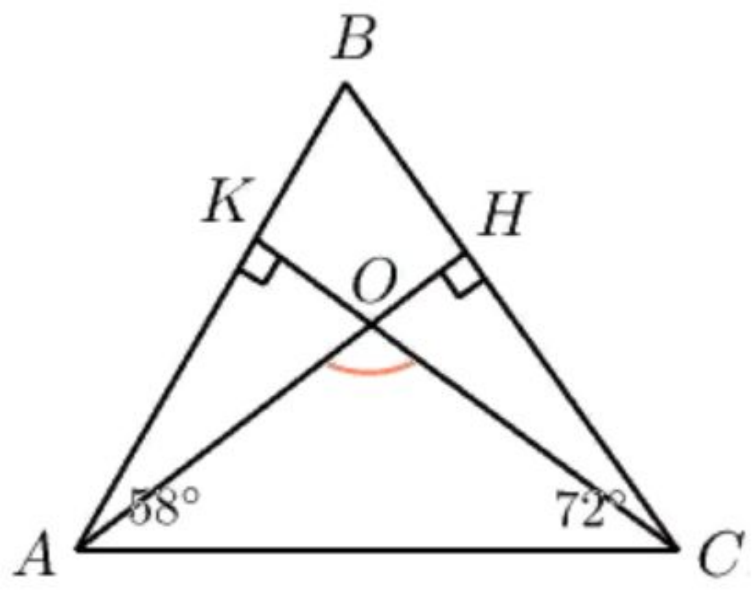
$\angle ACK = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Угол между высотой и биссектрисой — это угол $\angle KCH$.

$\angle KCH = \angle ACH - \angle ACK = 61^\circ - 45^\circ = 16^\circ$

Ответ: 16.

3. Два угла треугольника равны 58° и 72°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



Из треугольника ACH (угол H — прямой) найдем угол CAH. Он равен 18°.

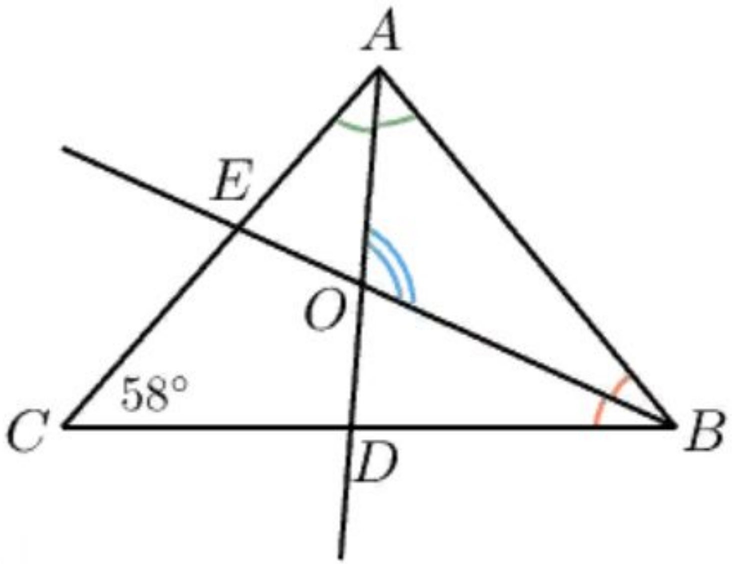
Из треугольника ACK (K — прямой) найдем угол ACK. Он равен 32°.

В треугольнике AOC известны два угла. Найдем третий, то есть угол AOC, который и является тупым углом между высотами треугольника ABC:

$$AOC = 180^\circ - 18^\circ - 32^\circ = 130^\circ.$$

Ответ: 130.

4. *В треугольнике ABC угол C равен $58°$, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.*



Пусть в треугольнике ABC угол BAC равен A, угол ABC равен B.

Рассмотрим треугольник AOB.

$\angle OAB = \angle A$

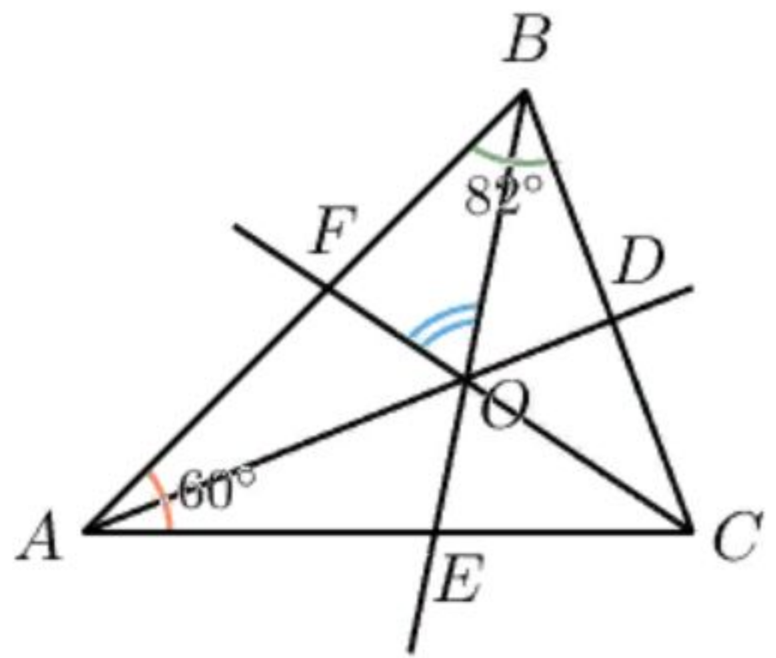
$\angle ABO = \angle B$, тогда $\angle AOB = 180° - (\angle A + \angle B)$.

Из треугольника ABC получим, что $\angle A + \angle B = 180° - 58° = 122°$.

Тогда $\angle AOB = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 61° = 119°$.

Ответ: $119°$.

5. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, угол B равен $82°$. AD, BD и CF — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.



Найдем угол ACB. Он равен $38°$.

Тогда $\angle ACF = \angle ACB = 19°$.

Из треугольника ACF найдем угол $\angle AFC = \angle ACB = 19°$. Он равен $101°$.

Рассмотрим треугольник AOF.

$\angle AFO = 101°, \angle FAO = \angle BAC = 30°$. Значит $\angle AOF = 49°$

Ответ: 49.

Сумма углов треугольника

Сумма треугольника равна 180 градусов.

1. Один из внешних углов треугольника равен 85 градусов. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2:3. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Следовательно, сумма двух других углов треугольника равна 85 градусов, а их отношение равно 2:3. Пусть эти углы равны 2х и 3х. Получим уравнение

$2x + 3x = 85$ и найдем $x = 17$.

Тогда $3x = 51$.

Ответ: 51.

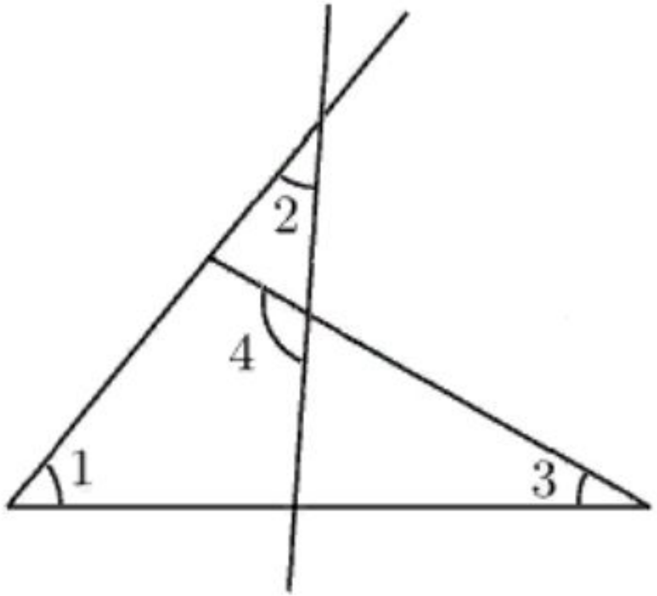
2. Один из углов равнобедренного треугольника равен 98 градусов. Найдите один из других его углов. Ответ дайте в градусах.

Как вы думаете, может ли равнобедренный треугольник иметь два угла по 98 градусов?

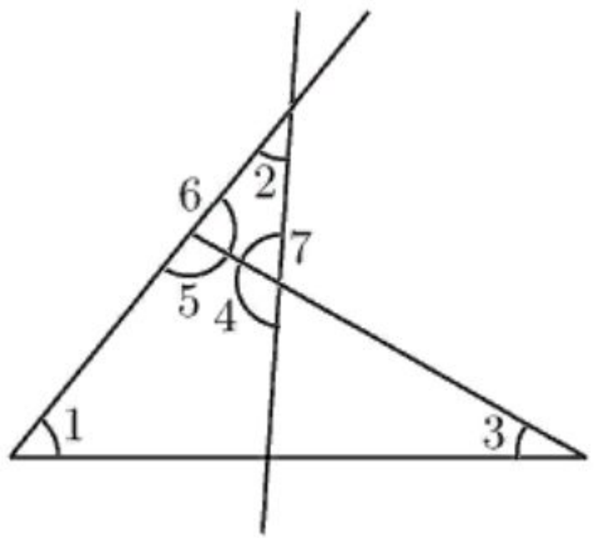
Нет, конечно! Ведь сумма углов треугольника равна 180 градусов. Значит, один из углов треугольника равен 98°, а два других равны $\frac{180-98}{2}=41^\circ$.

Ответ: 41.

3. На рисунке угол 1 равен 46°, угол 2 равен 30°, угол 3 равен 44°. Найдите угол 4. Ответ дайте в градусах.



Давайте отметим на чертеже еще несколько углов. Они нам понадобятся.



Сначала найдем угол 5.

Он равен $180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = 90^\circ$

Тогда $\angle 6 = 90^\circ$

$\angle 7 = 180^\circ - \angle 2 - \angle 6 = 60^\circ$,

Угол 4, смежный с углом 7 равен 120°.

Ответ: 120°.

4. Углы треугольника относятся как $2:3:4$. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

Пусть углы треугольника равны $2x$, $3x$ и $4x$. Запишем, чему равна сумма углов этого треугольника.

$2x+3x+4x=180^\circ$

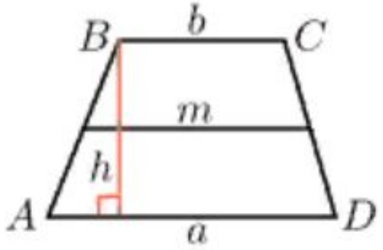
$9x=180^\circ$

$x=20^\circ$

Тогда $2x=40^\circ$.

Ответ: 40.

Четырехугольники. Выпуклые четырехугольники. Сумма углов четырехугольника. Параллелограмм. Виды параллелограммов и их свойства. Ромб, прямоугольник, квадрат. Трапеция и ее свойства



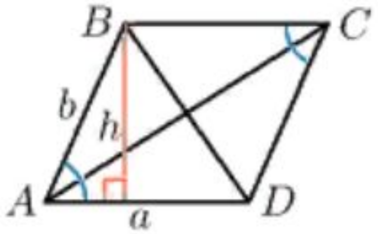
$m = \frac{1}{2}(a+b)$

Трапеция - четырёхугольник, имеющий одну пару параллельных сторон.

Эти стороны называются **основаниями трапеции**, две другие - **боковые стороны**.

Средней линией трапеции называется отрезок, который параллелен основаниям и находится на одинаковом расстоянии от оснований трапеции. Его длина равна полусумме оснований.

Площадь трапеции: $S = \frac{1}{2}(a+b)h$



$AB = CD, BC = DA$

$\angle A = \angle C$

$\angle A + \angle D = 180°$

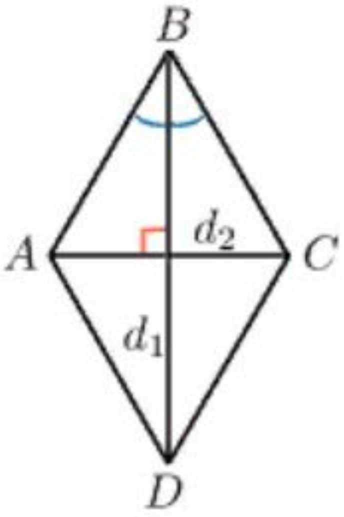
Параллелограмм - четырёхугольник, имеющий две пары параллельных сторон.

Противоположные углы параллелограмма равны.

Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°.

Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

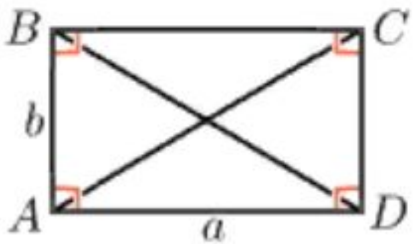
Площадь параллелограмма: $S = ab\sin\angle A = ah$



Ромб - это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами углов ромба.

Площадь ромба: $S = \frac{1}{2}d_1d_2$

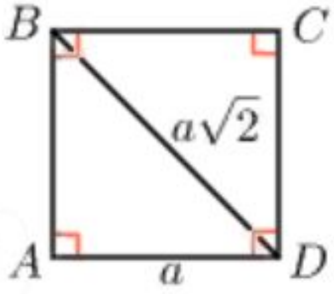


$AC = BD$

Прямоугольник - это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Диагонали прямоугольника равны.

Площадь прямоугольника: $S = ab$



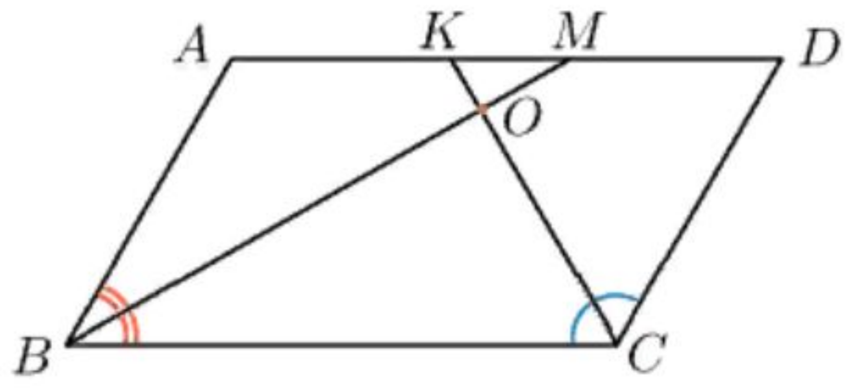
Квадрат - это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Другими словами, это ромб с прямыми углами.

Площадь квадрата: $S = a^2$

Параллелограмм и его свойства. Площадь параллелограмма. Биссектрисы углов параллелограмма

1. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне. Ответ дайте в градусах.



Пусть BM и CK — биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к стороне BC. Сумма углов ABC и BCD равна $180°$. Углы OBC и OCB — половинки углов ABC и BCD. Значит, сумма углов ABC и BCD равна 90 градусов. Из треугольника BOC находим, что угол BOC — прямой.

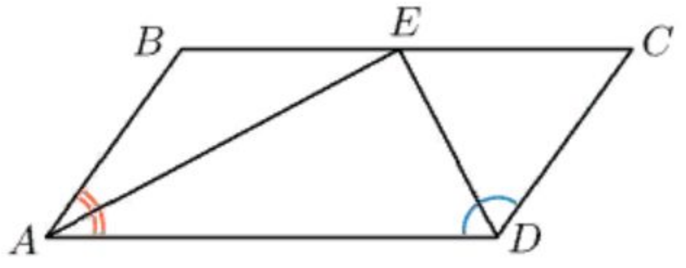
Ответ: 90.

Биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, — перпендикулярны.

Легко доказывается и другое свойство биссектрис параллелограмма:

Биссектрисы противоположных углов параллелограмма — параллельны.

2. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.



Найдем на этом рисунке накрест лежащие углы. Мы уже рассказывали, что это такое.

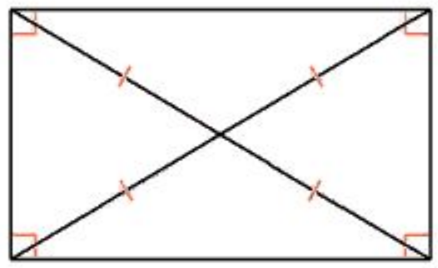
Углы DAE и BEA, а также CED и ADE — накрест лежащие. Накрест лежащие углы равны. Значит, угол DAE равен углу BEA, а угол CED — углу ADE.
Получаем, что треугольники ABE и CDE — равнобедренные, то есть $BE = AB$, а $EC = CD$. Тогда $BC = 5 + 5 = 10$.

Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник

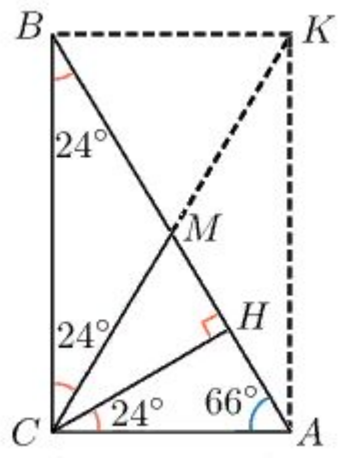
Прямоугольник и его свойства

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Диагонали прямоугольника равны.



.. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66°. Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Казалось бы, при чем здесь прямоугольник? Дан прямоугольный треугольник, из вершины прямого угла проведены высота и медиана. А что можно сказать о длине этой медианы?

Давайте достроим чертеж до прямоугольника. Поскольку диагонали прямоугольника равны (это свойство прямоугольника) и делятся пополам в точке пересечения, отрезки CM, BM и AM тоже будут равны. Каждый из них равен половине диагонали прямоугольника. Мы доказали теорему:

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Итак, $BM = CM$, значит, треугольник BMC равнобедренный, и угол BCM равен 24°.

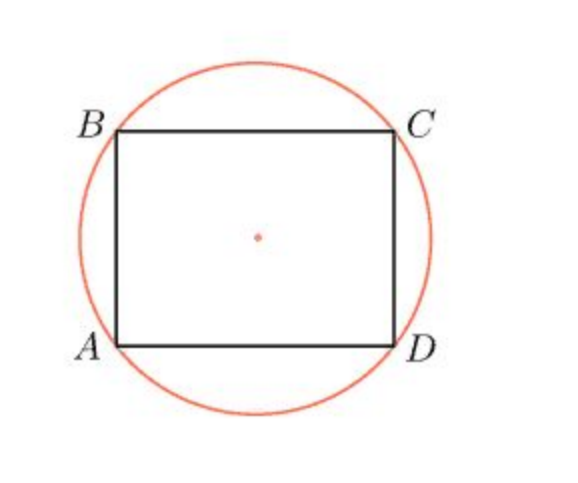
По свойству высоты, проведенной из вершины прямого угла,
$\angle ACH = \angle ABC = 24^\circ$.

Тогда угол MCH (между медианой и высотой треугольника ABC) равен $90^\circ - 24^\circ - 24^\circ = 42^\circ$.
Ответ: 42.

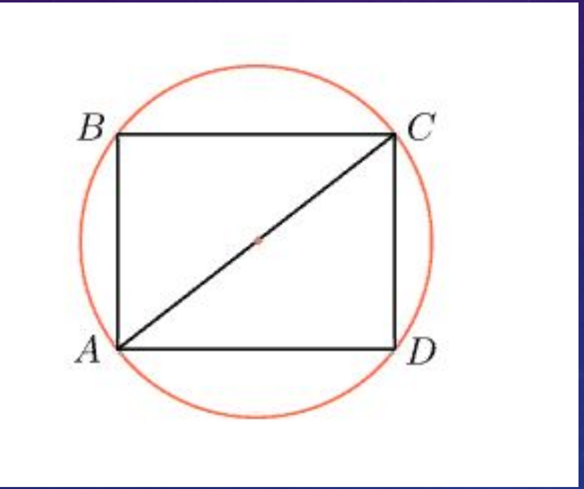
Как вы думаете, где находится центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника? Ведь центр описанной окружности — точка, равноудаленная от всех вершин треугольника. Очевидно, эта точка — середина гипотенузы.

В прямоугольном треугольнике центром описанной окружности является середина гипотенузы.

Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 5.



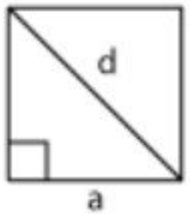
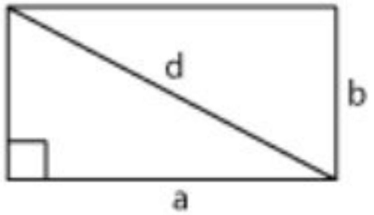
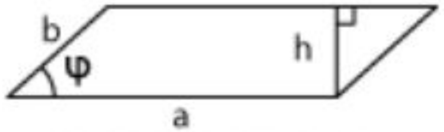
Проведем диагональ AC.

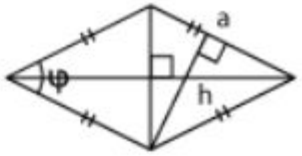
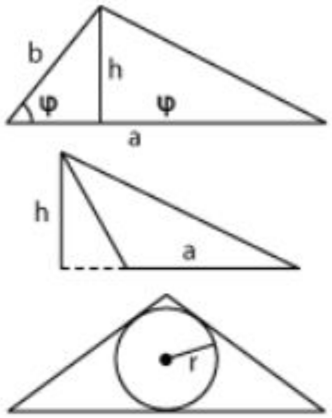
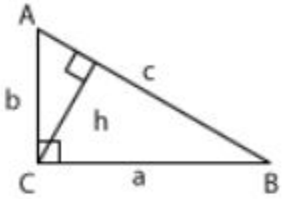


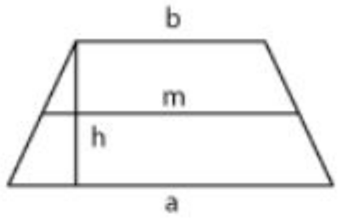
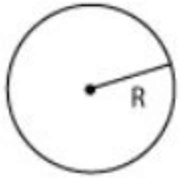
Получим, что AC равна $2R$.

Ответ: 10.

Все формулы по геометрии. Площади фигур

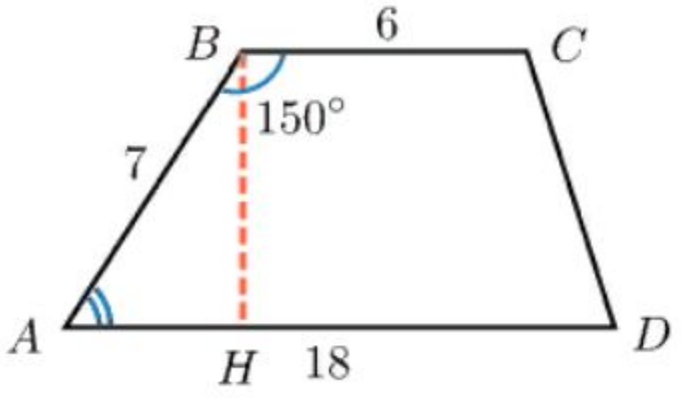
 квадрат	$S=a^2$	$P=4a$ (периметр - это сумма всех сторон фигуры) $d=a\sqrt{2}$ длина диагонали
 прямоугольник	$S=a\cdot b$	$d=\sqrt{a^2+b^2}$
 параллелограмм	$S=a\cdot h=a\cdot b\cdot\sin\varphi$ h - высота	

 ромб	$S=a\cdot h=a^2\sin\varphi=$ $=\dfrac{d_1\cdot d_2}{2}$ d1, d2 - диагонали	
 треугольник	$S=\dfrac{a\cdot h}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\sin\varphi=$ $=p\cdot r$ p - полупериметр r - радиус вписанной окружности	
 прямоугольный треугольник	$S=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b=\dfrac{1}{2}c\cdot h$	$c^2=a^2+b^2$ Теорема Пифагора $\sin A=\dfrac{a}{c}$ $\cos A=\dfrac{b}{c}$ $\mathrm{tg}A=\dfrac{a}{b}$

 трапеция	$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$ a, b - основания h - высота	$m=\frac{a+b}{2}$ средняя линия
 круг	$S=\pi R^2$	$L=2\pi R=\pi\cdot D$ D - диаметр

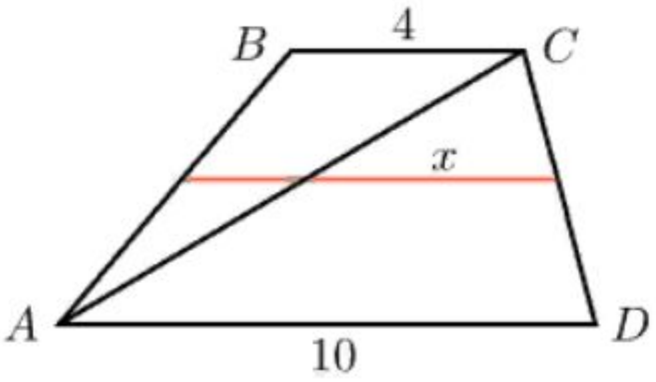
Трапеция и ее свойства

2. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150. Найдите площадь трапеции.



Это стандартная задача. Углы ABC и BAH — односторонние, значит, их сумма равна $180°$, и тогда угол BAH равен $30°$. Из треугольника ABH найдем высоту BH. Катет, лежащий напротив угла в $30°$, равен половине гипотенузы. Получаем, что $BH = 3,5$ и площадь трапеции равна 42.

3. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

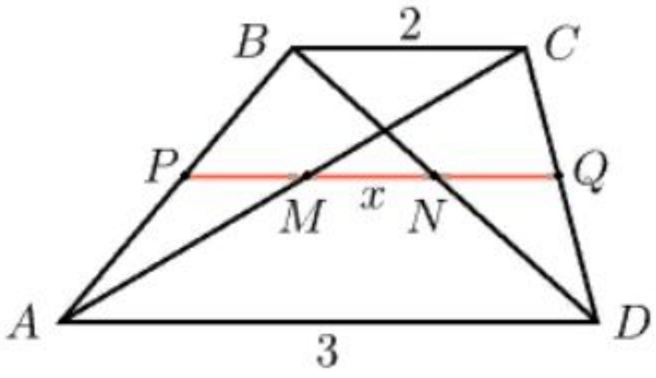


Скажите, что вы видите на чертеже? Можно сказать, что изображена трапеция $ABCD$, и в ней проведена средняя линия. А можно увидеть и другое — два треугольника, ABC и ACD, в которых проведены средние линии.

Мы помним, что средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне и равна половине этой стороны.

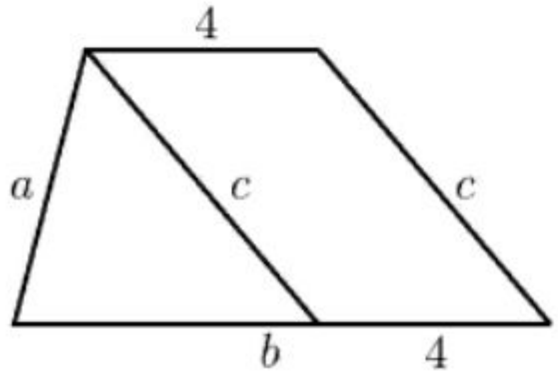
Из треугольника ACD находим: $x = 5$.

4. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



Проведем PQ — среднюю линию трапеции, $PQ = 2,5$. Легко доказать, что отрезок MN, соединяющий середины диагоналей трапеции, лежит на средней линии. Дальше все просто. Найдем отрезки PM и NQ, являющиеся средними линиями треугольников ABC и BCD, а затем отрезок MN. Он равен $0,5$.

5. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.



Периметр треугольника равен сумме его сторон, то есть $a + b + c$.

Периметр трапеции равен $a + b + 4 + c + 4$.

Заметим, что периметр трапеции на 8 больше, чем периметр треугольника. Значит, он равен 15 + 8 = 23.

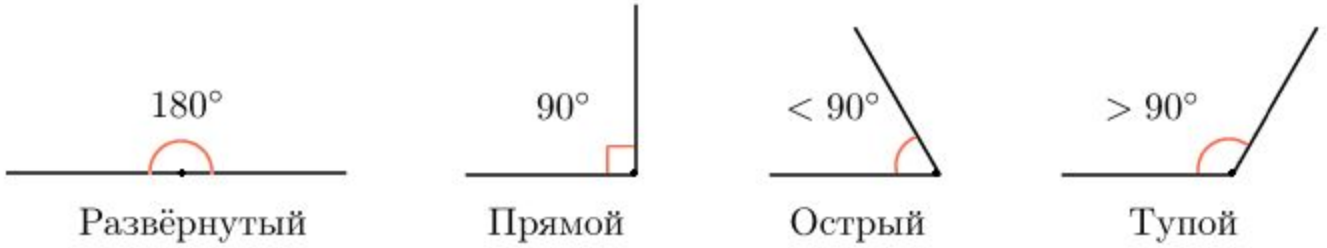
Ответ: 23.

Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Напомним, что *прямой угол* — это угол, равный 90 градусов. Другими словами, половина развернутого угла.

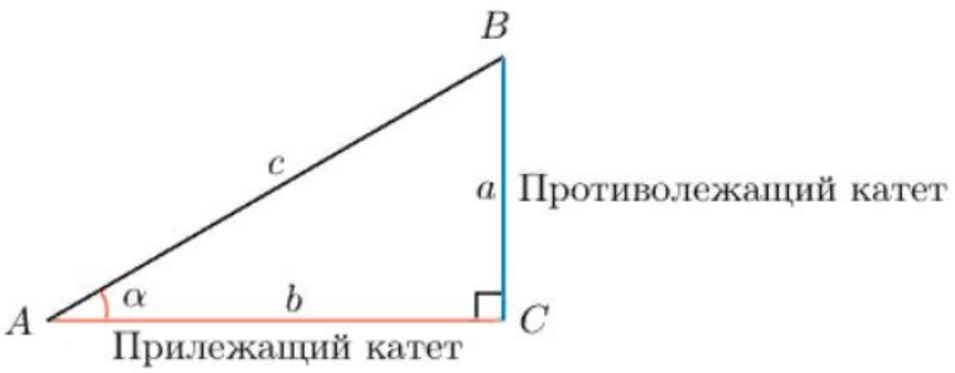
Острый угол — меньший 90 градусов.

Тупой угол — больший 90 градусов.



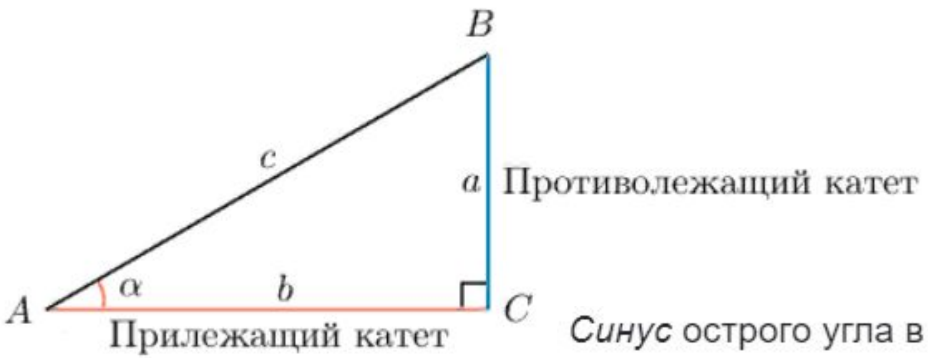
Нарисуем прямоугольный треугольник. Прямой угол обычно обозначается C. Обратим внимание, что сторона, лежащая напротив угла, обозначается той же буквой, только маленькой. Так, сторона, лежащая напротив угла А, обозначается a.

Угол A обозначается соответствующей греческой буквой α.



Гипотенуза прямоугольного треугольника — это сторона, лежащая напротив прямого угла.

Катеты — стороны, лежащие напротив острых углов.



Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$tg\, A = \frac{a}{b}$$

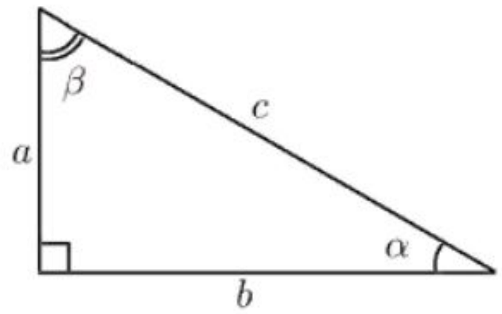
Другое (равносильное) определение: тангенсом острого угла называется отношение синуса угла к его косинусу:

$$tg\, A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение прилежащего катета к противолежащему (или, что то же самое, отношение косинуса к синусу):

$$ctg\, A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

основные соотношения для синуса, косинуса, тангенса и котангенса



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad\alpha + \beta = 90^\circ$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad\cos\alpha = \sin\beta$

$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}$ $\quad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $\quad\sin\alpha = \cos\beta$

$\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a}$ $\quad\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}\beta$

Синус, косинус и тангенс — их еще называют *тригонометрическими функциями угла* — дают соотношения между *сторонами* и *углами* треугольника. Зная угол, можно найти все его тригонометрические функции по специальным таблицам. А зная синусы, косинусы и тангенсы углов треугольника и одну из его сторон, можно найти остальные.

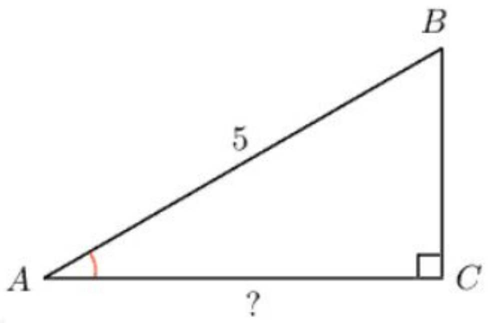
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
$ctg\varphi$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = 0,1$. Найдите $\cos B$.

Задача решается за четыре секунды.

Поскольку $A + B = 90^\circ$, $\sin A = \cos B = 0,1$.

2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 5$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AC.



Имеем:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{25}$$

Отсюда

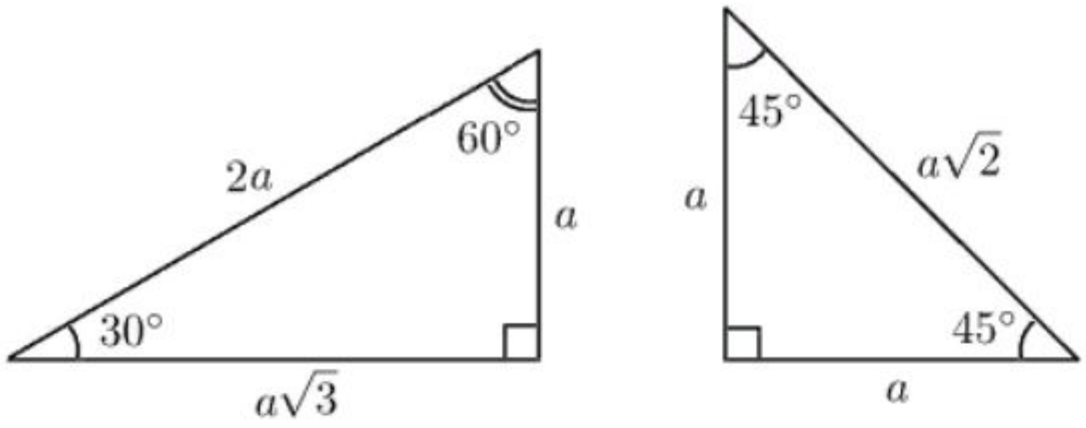
$$BC = \frac{7}{25} \cdot AB = \frac{7}{5}$$

Найдем AC по теореме Пифагора.

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \frac{24}{5} = 4,8$$

Задача решена.

Часто в задачах встречаются треугольники с углами $90°$, $30°$ и $60°$ или с углами $90°$, $45°$ и $45°$. Основные соотношения для них запоминайте наизусть!



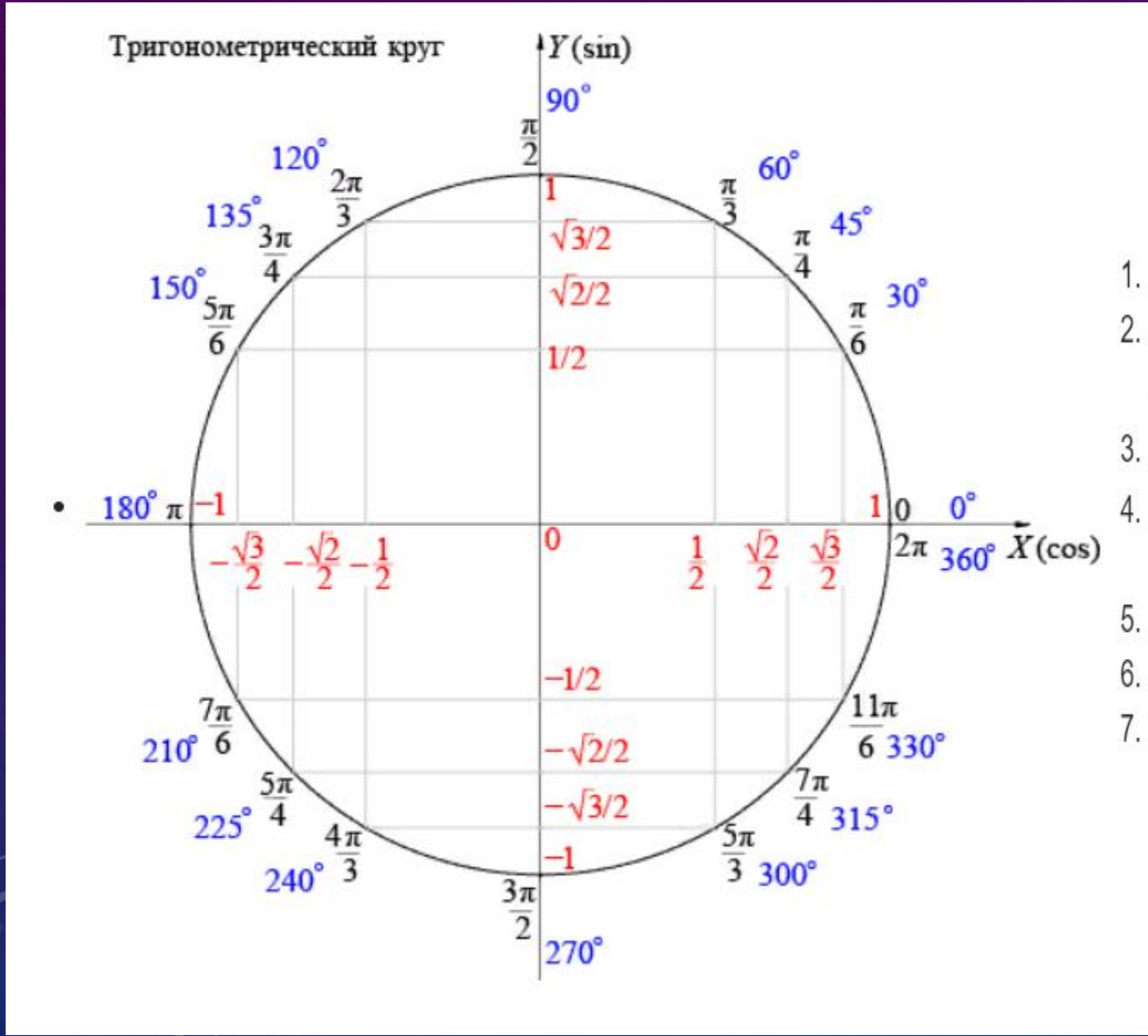
Для треугольника с углами $90°$, $30°$ и $60°$ катет, лежащий напротив угла в $30°$, равен *половине гипотенузы*.

Треугольник с углами $90°$, $45°$ и $45°$ — равнобедренный. В нем гипотенуза в $\sqrt{2}$ раз больше катета.

Тригонометрический круг: вся тригонометрия на одном рисунке

Тригонометрический круг — это самый простой способ начать осваивать тригонометрию. Он легко запоминается, и на нём есть всё необходимое.

Тригонометрический круг заменяет десяток таблиц.



Вот что мы видим на этом рисунке:

1. Перевод градусов в радианы и наоборот. Полный круг содержит 360 градусов, или 2π радиан.
2. Значения синусов и косинусов основных углов. Помним, что значение косинуса угла мы находим на оси X, а значение синуса — на оси Y.
3. И синус, и косинус принимают значения от -1 до 1.
4. Значение тангенса угла α тоже легко найти — поделив $\sin\alpha$ на $\cos\alpha$. А чтобы найти котангенс — наоборот, косинус делим на синус.
5. Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса.
6. Синус — функция нечётная, косинус — чётная.
7. Тригонометрический круг поможет увидеть, что синус и косинус — функции периодические. Период равен 2π.

Нарисована единичная окружность — то есть окружность с радиусом, равным единице, и с центром в начале системы координат. Той самой системы координат с осями OX и OY , в которой мы привыкли рисовать графики функций.

Мы отсчитываем углы от положительного направления оси OX против часовой стрелки.

Полный круг — 360 градусов.
Точка с координатами $(1;0)$ соответствует углу ноль градусов. Точка с координатами $(-1;0)$ отвечает углу в $180°$, точка с координатами $(0;1)$ — углу в $90°$. Каждому углу от нуля до 360 градусов соответствует точка на единичной окружности.

Косинусом угла называется абсцисса (то есть координата по оси OX) точки на единичной окружности, соответствущей данному углу α.

Синусом угла называется ордината (то есть координата по оси OY) точки на единичной окружности, соответствущей данному углу α.

Например:

$$cos\,60° = \frac{1}{2};$$

$$cos\,0° = 1;$$

$$sin\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$sin\,240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Итак, косинус и синус — координаты точки на единичной окружности, соответствующей данному углу. Косинус — абсцисса (x), синус — ордината (y). Поскольку окружность единичная, для любого угла и синус, и косинус находятся в пределах от -1 до 1:

$$-1 \leqslant cos\,\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant sin\,\alpha \leqslant 1.$$

Простым следствием теоремы Пифагора является *основное тригонометрическое тождество*:

$$cos^2\,\alpha + sin^2\,\alpha = 1$$

Для того, чтобы узнать знаки синуса и косинуса какого-либо угла, не нужно рисовать отдельных таблиц. Всё уже нарисовано! Находим на нашей окружности точку, соответствующую данному углу α, смотрим, положительны или отрицательны ее координаты по x (это косинус угла α) и по y (это синус угла α).

Принято использовать две единицы измерения углов: градусы и радианы. Перевести градусы в радианы просто: 360 градусов, то есть полный круг, соответствует 2π радиан. На нашем рисунке подписаны и градусы, и радианы.

Если отсчитывать угол от нуля против часовой стрелки — он положительный. Если отсчитывать по часовой стрелке — угол будет отрицательным. Например, угол -30° — это угол величиной в 30°, который отложили от положительного направления оси x по часовой стрелке.

Легко заметить, что

$$cos\,(-\alpha) = cos\,\alpha,$$
$$sin\,(-\alpha) = -sin\,\alpha.$$

Углы могут быть и больше 360 градусов. Например, угол 732° — это два полных оборота по часовой стрелке и еще 12°. Поскольку, сделав несколько полных оборотов по окружности, мы возвращаемся в ту же точку с теми же координатами по x и по y, значения синуса и косинуса повторяются через 360°. То есть:

$$cos\ (\alpha + 360^\circ \cdot n) = cos\,\alpha,$$
$$sin\ (\alpha + 360^\circ \cdot n) = sin\,\alpha,$$

где n — целое число. То же самое можно записать в радианах:

$$cos\ (\alpha + 2\pi n) = cos\,\alpha,$$
$$sin\ (\alpha + 2\pi n) = sin\,\alpha.$$

Можно на том же рисунке изобразить ещё и оси тангенсов и котангенсов, но проще посчитать их значения. По определению,

$$tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha},$$

$$ctg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}.$$

В результате получим следующую таблицу.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$tg\,\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\,\varphi$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	не существует