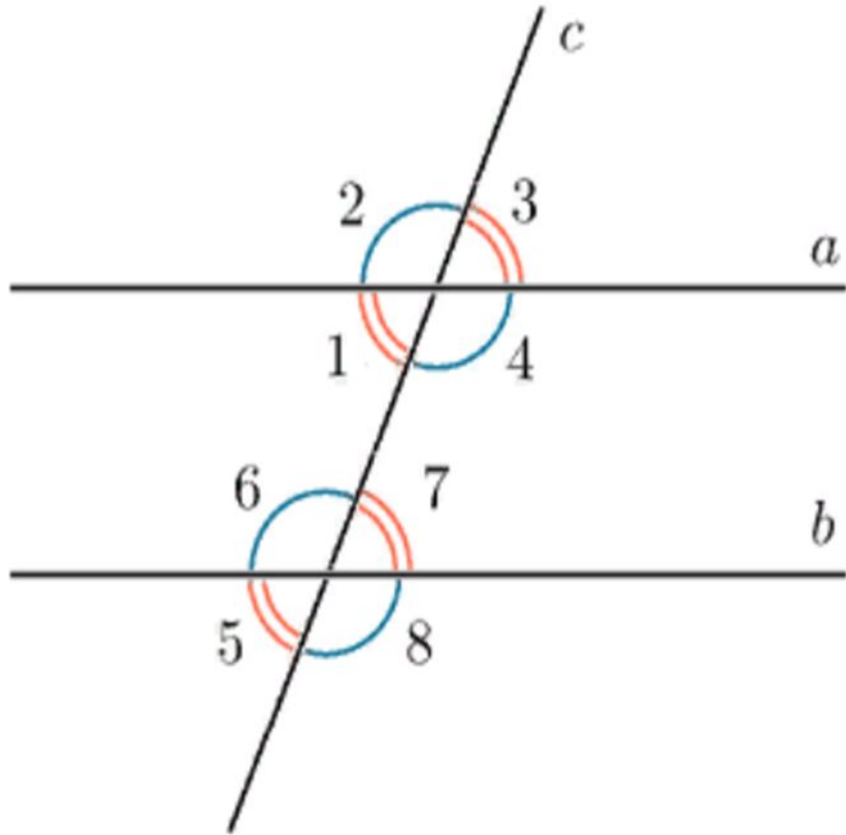


The background is a dark blue gradient with faint, light blue geometric patterns. On the left side, there is a large, semi-circular scale with tick marks and numbers ranging from 140 to 260. Several circular and semi-circular lines, some solid and some dashed, are scattered across the background, some with arrows indicating direction. The overall aesthetic is technical and scientific.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Углы при параллельных прямых и секущей. Вертикальные, смежные, односторонние, соответственные, накрест лежащие углы



Углы 1 и 3 — *вертикальные*. Очевидно, *вертикальные углы равны*, то есть $\angle 1 = \angle 3$

$\angle 2 = \angle 4$ Конечно, углы 5 и 7, 6 и 8 — тоже вертикальные.

Углы 1 и 2 — *смежные*, Сумма смежных углов равна 180°

Углы 3 и 5 (а также 1 и 7, 2 и 8, 4 и 6) Накрест лежащие углы равны.

Углы 1 и 6 — *односторонние*.

Они лежат по одну сторону от всей «конструкции».

Сумма односторонних углов равна 180° $\angle 1 + \angle 6 = 180^\circ$,

$\angle 4 + \angle 7 = 180^\circ$.

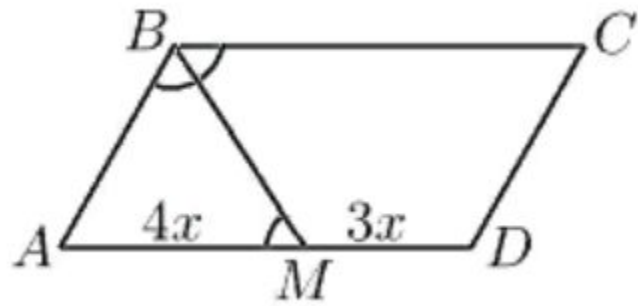
Углы 2 и 6 (а также 3 и 7, 1 и 5, 4 и 8) называются *соответственными*.

Соответственные углы равны, то есть $\angle 2 = \angle 6$,

$\angle 3 = \angle 7$.

Чтобы применять все эти факты в решении задач ЕГЭ, надо научиться видеть их на чертеже.

1. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $3 : 4$, считая от вершины тупого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88 .



биссектриса угла — это луч, выходящий из вершины угла

Пусть BM — биссектриса тупого угла B . По условию, отрезки MD и AB равны $3x$ и $4x$ соответственно.

Рассмотрим углы CBM и BMA . Поскольку AD и BC параллельны, BM — секущая, углы CBM и BMA являются накрест лежащими. Мы знаем, что накрест лежащие углы равны. Значит, треугольник ABM — равнобедренный, следовательно, $AB = AM = 4x$.

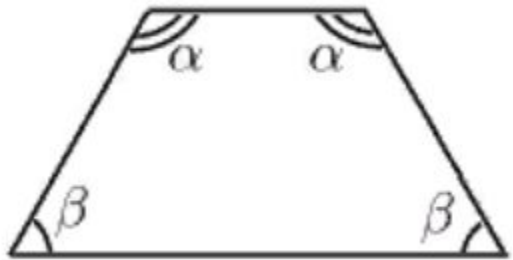
Периметр параллелограмма — это сумма всех его сторон, то есть

$$7x + 7x + 4x + 4x = 88.$$

$$\text{Отсюда } x = 4, 7x = 28.$$

Ответ: 28 .

3. Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 50° ? Ответ дайте в градусах.



равнобедренной (или равнобокой) называется трапеция, у которой боковые стороны равны.

Следовательно, равны углы при верхнем основании, а также углы при нижнем основании.

По условию, $\alpha - \beta = 50^\circ$, то есть $\alpha = \beta + 50^\circ$.

Углы α и β — односторонние при параллельных прямых и секущей, следовательно,

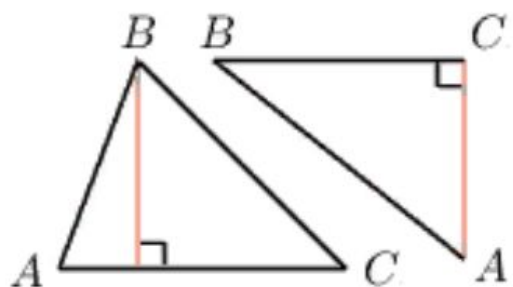
$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

$$\text{Итак, } 2\beta + 50^\circ = 180^\circ$$

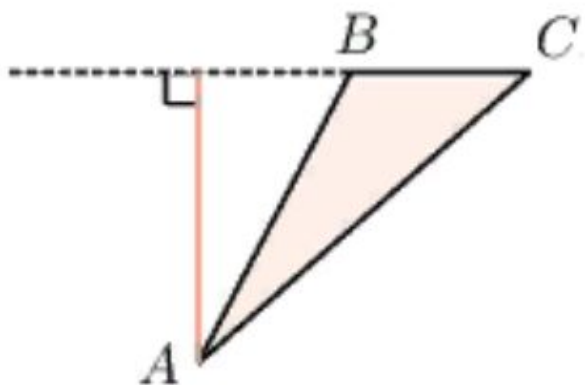
$$\beta = 65^\circ, \text{ тогда } \alpha = 115^\circ.$$

Ответ: 115° .

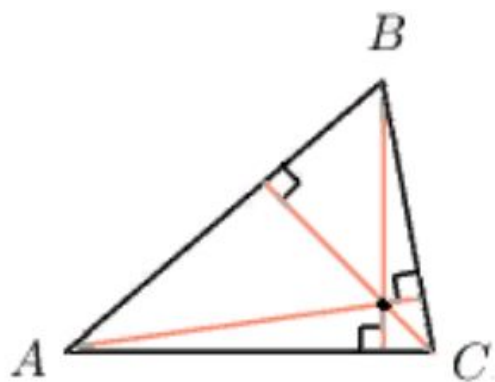
Элементы треугольника. Высоты, медианы, биссектрисы



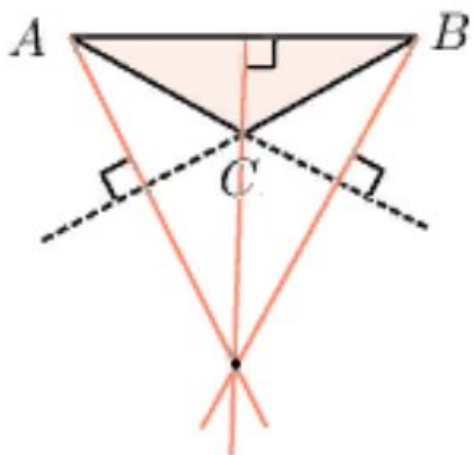
Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону.



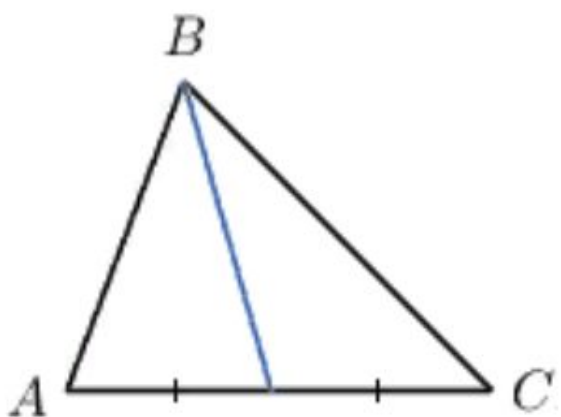
В тупоугольном треугольнике высота опускается на продолжение стороны.



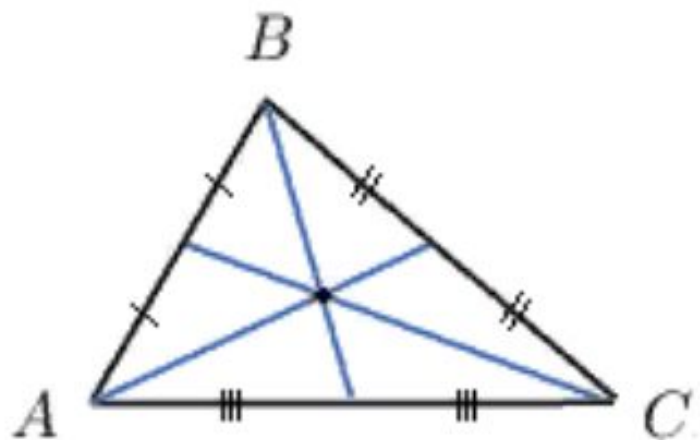
Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке.



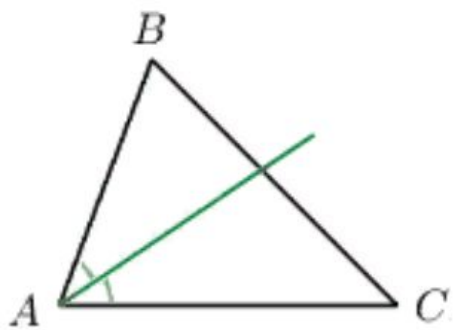
В случае тупого угла пересекаются продолжения высот.



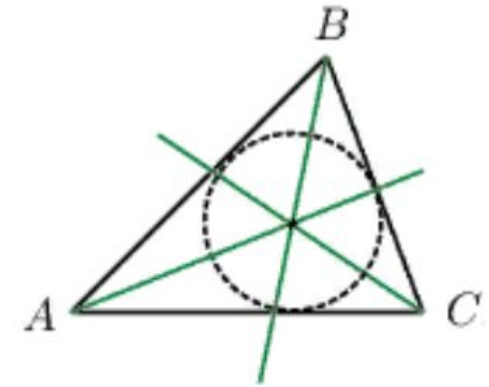
Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.



Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.

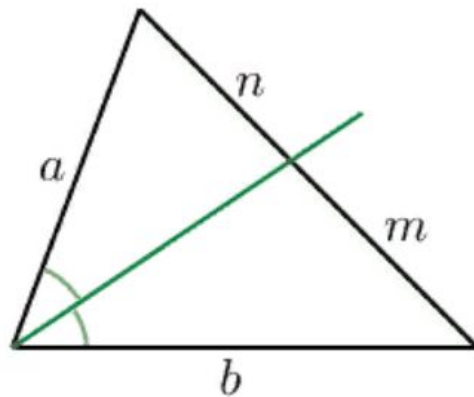


Биссектриса треугольника делит угол треугольника пополам.



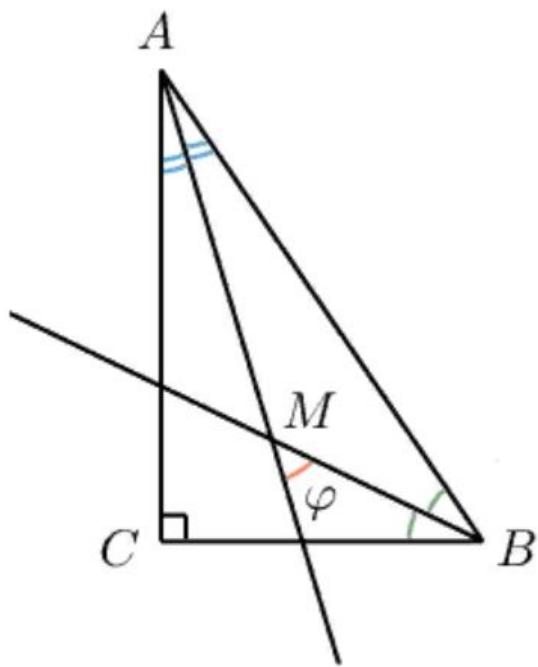
Три биссектрисы пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Еще одно свойство биссектрисы пригодится тем, кто собирается решать задачу **C4**. *Биссектриса треугольника делит противоположную сторону в отношении длин прилежащих сторон.*



$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$$

1. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника.



Пусть биссектрисы треугольника ABC (в котором угол C равен 90°) пересекаются в точке M .

Рассмотрим треугольник ABM .

$$\angle MAB = 0,5\angle BAC,$$

$$\angle ABM = 0,5\angle ABC, \text{ тогда } \angle AMB = 180^\circ - \angle MAB - \angle ABM = 180^\circ - 0,5(\angle ABC + \angle BAC)$$

Острый угол между биссектрисами на рисунке обозначен φ .

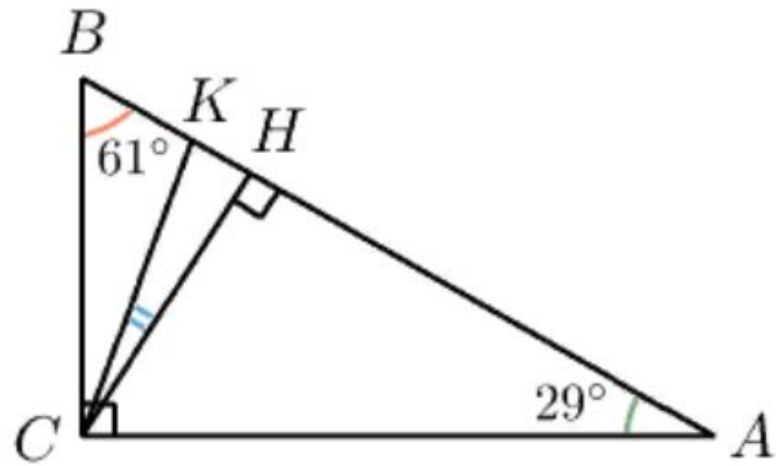
$$\text{Угол } \varphi \text{ смежный с углом } \angle AMB, \text{ следовательно, } \varphi = 0,5(\angle ABC + \angle BAC).$$

Поскольку треугольник ABC — прямоугольный, то $\angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$.

$$\text{Тогда } \varphi = 0,5(\angle ABC + \angle BAC) = 90^\circ : 2 = 45^\circ.$$

Ответ: 45.

2. Острые углы прямоугольного треугольника равны 29° и 61° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Пусть CH — высота, проведенная из вершины прямого угла C , CK — биссектриса угла C .

Тогда $\angle ACH = \angle ABC = 61^\circ$

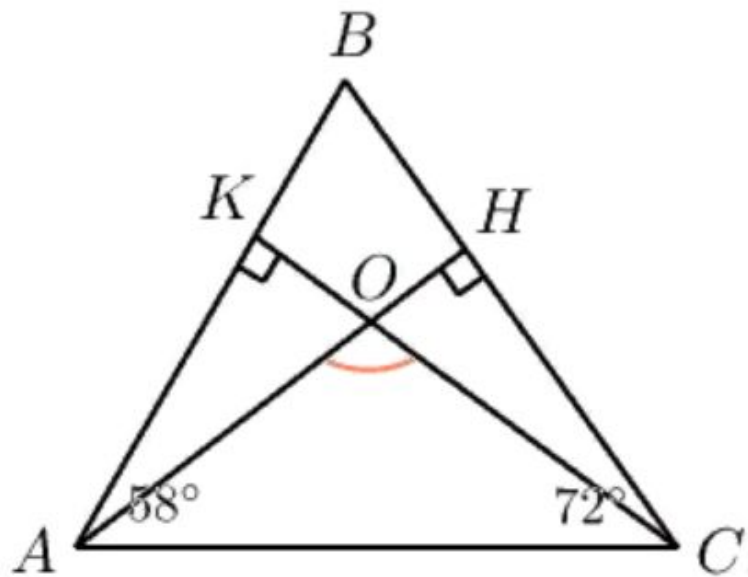
$\angle ACK = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Угол между высотой и биссектрисой — это угол $\angle KCH$.

$\angle KCH = \angle ACH - \angle ACK = 61^\circ - 45^\circ = 16^\circ$

Ответ: 16.

3. Два угла треугольника равны 58° и 72° . Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



Из треугольника ACH (угол H — прямой) найдем угол CAH . Он равен 18° .

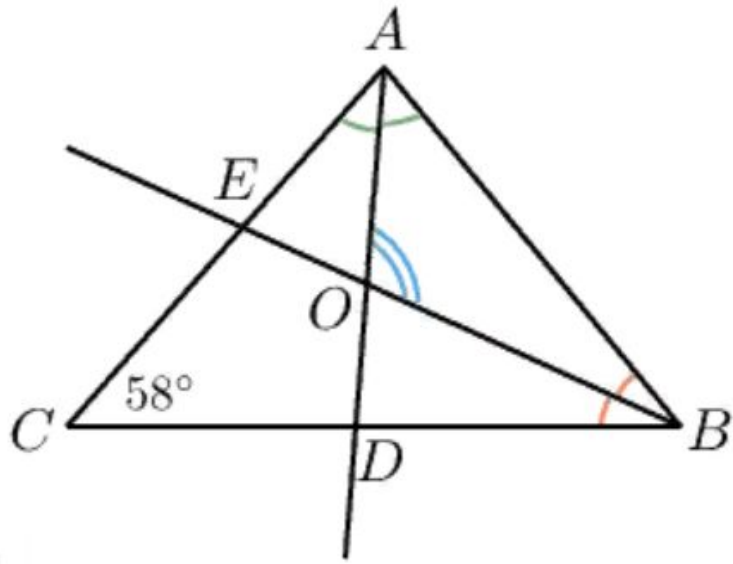
Из треугольника ACK (K — прямой) найдем угол ACK . Он равен 32° .

В треугольнике AOC известны два угла. Найдем третий, то есть угол AOC , который и является тупым углом между высотами треугольника ABC :

$$\angle AOC = 180^\circ - 18^\circ - 32^\circ = 130^\circ.$$

Ответ: 130.

4. В треугольнике ABC угол C равен 58° , AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



Пусть в треугольнике ABC угол BAC равен A , угол ABC равен B .

Рассмотрим треугольник AOB .

$$\angle OAB = \angle A$$

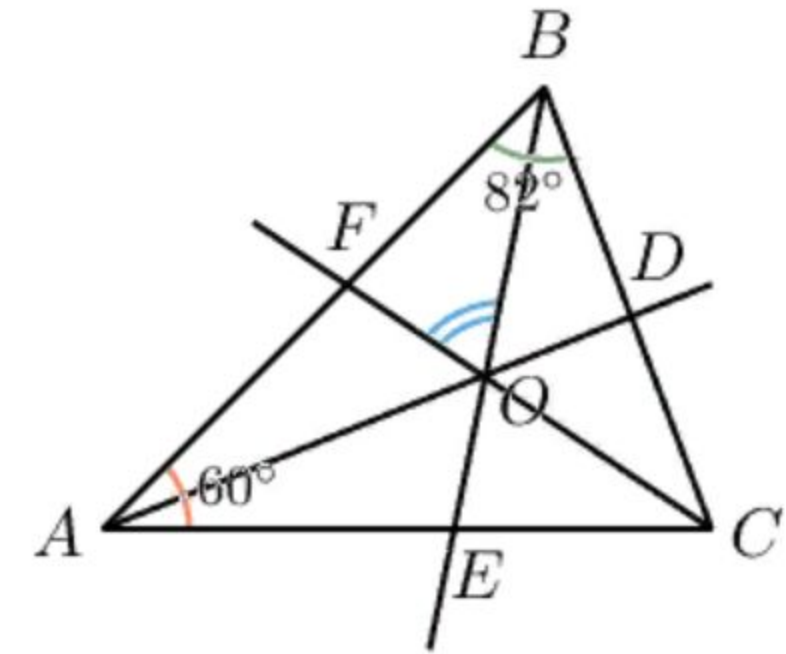
$$\angle ABO = \angle B, \text{ тогда } \angle AOB = 180^\circ - (\angle A + \angle B).$$

Из треугольника ABC получим, что $\angle A + \angle B = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$.

$$\text{Тогда } \angle AOB = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 61^\circ = 119^\circ.$$

Ответ: 119° .

5. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 82° . AD , BD и CF — биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF . Ответ дайте в градусах.



Найдем угол ACB . Он равен 38° .

Тогда $\angle ACF = \angle ACB = 19^\circ$.

Из треугольника ACF найдем угол $\angle AFC = \angle ACB = 19^\circ$. Он равен 101° .

Рассмотрим треугольник AOF .

$\angle AFO = 101^\circ$, $\angle FAO = \angle BAC = 30^\circ$. Значит $\angle AOF = 49^\circ$

Ответ: 49.

Сумма углов треугольника

Сумма треугольника равна 180 градусов.

1. Один из внешних углов треугольника равен 85 градусов. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2:3. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Следовательно, сумма двух других углов треугольника равна 85 градусов, а их отношение равно 2:3. Пусть эти углы равны $2x$ и $3x$. Получим уравнение

$$2x + 3x = 85 \text{ и найдем } x = 17.$$

$$\text{Тогда } 3x = 51.$$

Ответ: 51.

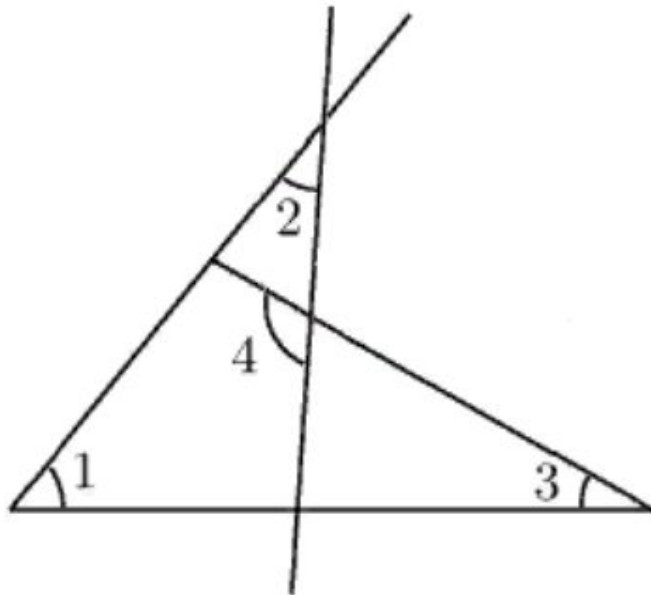
2. Один из углов равнобедренного треугольника равен 98 градусов. Найдите один из других его углов. Ответ дайте в градусах.

Как вы думаете, может ли равнобедренный треугольник иметь два угла по 98 градусов?

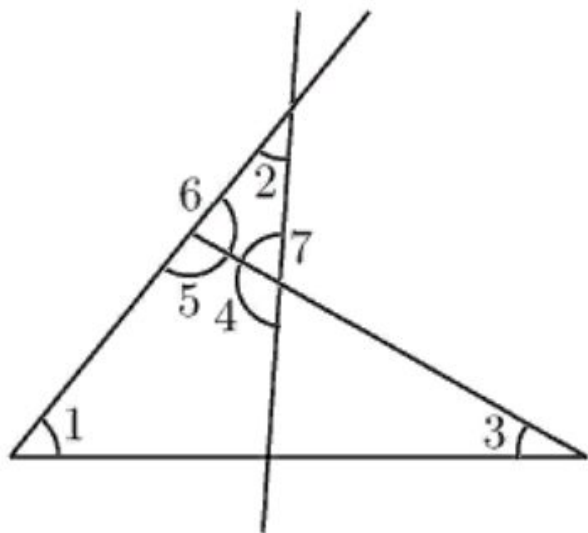
Нет, конечно! Ведь сумма углов треугольника равна 180 градусов. Значит, один из углов треугольника равен 98° , а два других равны $\frac{180 - 98}{2} = 41^\circ$.

Ответ: 41.

3. На рисунке угол 1 равен 46° , угол 2 равен 30° , угол 3 равен 44° . Найдите угол 4. Ответ дайте в градусах.



Давайте отметим на чертеже еще несколько углов. Они нам понадобятся.



Сначала найдем угол 5.

Он равен $180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = 90^\circ$

Тогда $\angle 6 = 90^\circ$

$\angle 7 = 180^\circ - \angle 2 - \angle 6 = 60^\circ$,

Угол 4, смежный с углом 7 равен 120° .

Ответ: 120° .

4. Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

Пусть углы треугольника равны $2x$, $3x$ и $4x$. Запишем, чему равна сумма углов этого треугольника.

$$2x + 3x + 4x = 180^\circ$$

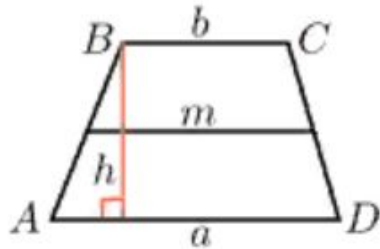
$$9x = 180^\circ$$

$$x = 20^\circ$$

Тогда $2x = 40^\circ$.

Ответ: 40.

Четырехугольники. Выпуклые четырехугольники. Сумма углов четырехугольника. Параллелограмм. Виды параллелограммов и их свойства. Ромб, прямоугольник, квадрат. Трапеция и ее свойства



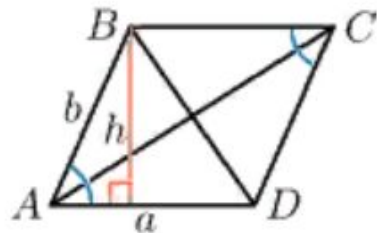
$$m = \frac{1}{2}(a + b)$$

Трапеция - четырёхугольник, имеющий одну пару параллельных сторон.

Эти стороны называются **основаниями** трапеции, две другие - **боковые стороны**.

Средней линией трапеции называется отрезок, который параллелен основаниям и находится на одинаковом расстоянии от оснований трапеции. Его длина равна полусумме оснований.

Площадь трапеции: $S = \frac{1}{2}(a + b)h$



$$AB = CD, BC = DA$$

$$\angle A = \angle C$$

$$\angle A + \angle D = 180^\circ$$

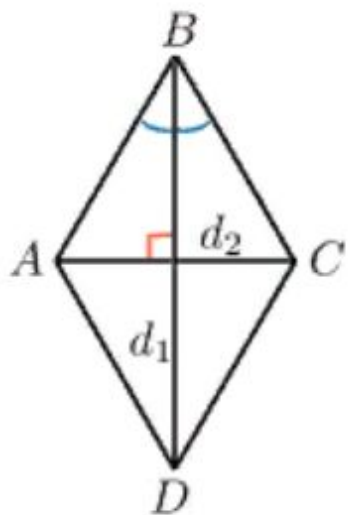
Параллелограмм - четырёхугольник, имеющий две пары параллельных сторон.

Противоположные углы параллелограмма равны.

Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180° .

Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

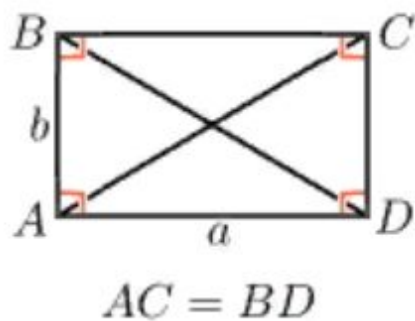
Площадь параллелограмма: $S = ab \sin \angle A = ah$



Ромб - это параллелограмм,
у которого все стороны равны.

Диагонали ромба перпендикулярны и являются
биссектрисами углов ромба.

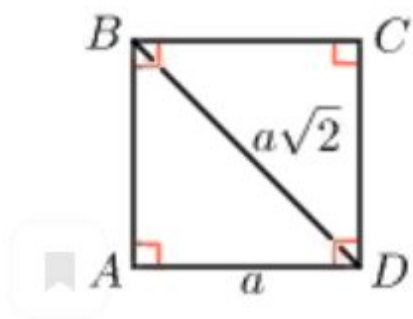
Площадь ромба: $S = \frac{1}{2}d_1d_2$



Прямоугольник - это параллелограмм,
у которого все углы прямые.

Диагонали прямоугольника равны.

Площадь прямоугольника: $S = ab$



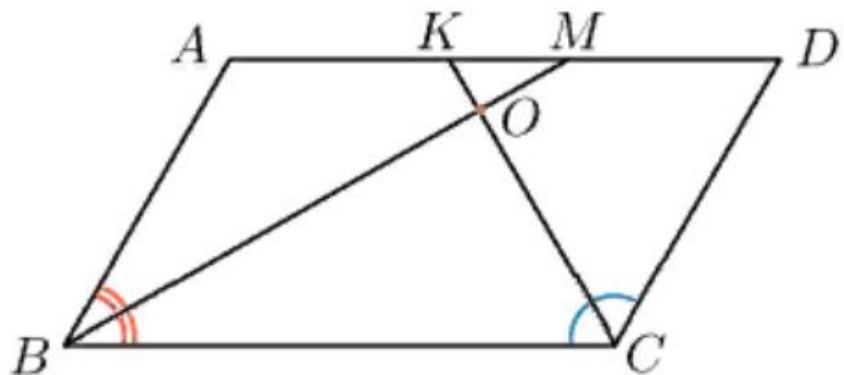
Квадрат - это прямоугольник,
у которого все стороны равны.

Другими словами, это ромб с прямыми углами.

Площадь квадрата: $S = a^2$

Параллелограмм и его свойства. Площадь параллелограмма. Биссектрисы углов параллелограмма

1. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне. Ответ дайте в градусах.



Пусть BM и CK — биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к стороне BC . Сумма углов ABC и BCD равна 180° . Углы OBC и OCB — половинки углов ABC и BCD . Значит, сумма углов ABC и BCD равна 90 градусов. Из треугольника BOC находим, что угол BOC — прямой.

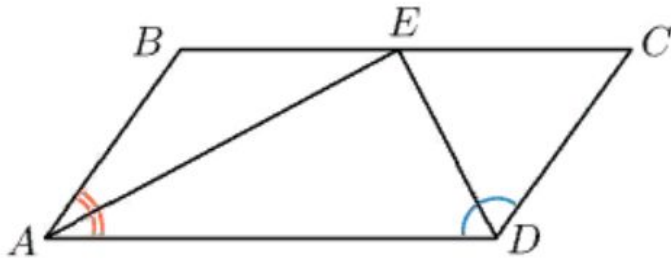
Ответ: 90 .

Биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, — перпендикулярны.

Легко доказывается и другое свойство биссектрис параллелограмма:

Биссектрисы противоположных углов параллелограмма — параллельны.

2. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.



Найдем на этом рисунке накрест лежащие углы. Мы уже рассказывали, что это такое.

Углы DAE и BEA , а также CED и ADE — накрест лежащие. Накрест лежащие углы равны. Значит, угол DAE равен углу BEA , а угол CED — углу ADE .

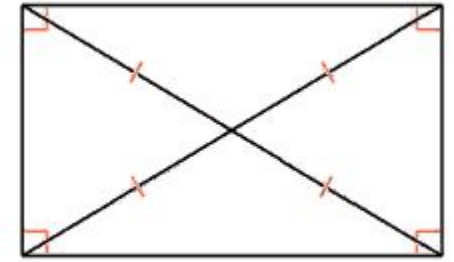
Получаем, что треугольники ABE и CDE — равнобедренные, то есть $BE = AB$, а $EC = CD$. Тогда $BC = 5 + 5 = 10$.

Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник

Прямоугольник и его свойства

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Диагонали прямоугольника равны.



.. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66° . Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

Казалось бы, при чем здесь прямоугольник? Дан прямоугольный треугольник, из вершины прямого угла проведены высота и медиана. А что можно сказать о длине этой медианы?

Давайте достроим чертеж до прямоугольника. Поскольку диагонали прямоугольника равны (это свойство прямоугольника) и делятся пополам в точке пересечения, отрезки CM , BM и AM тоже будут равны. Каждый из них равен половине диагонали прямоугольника. Мы доказали теорему:

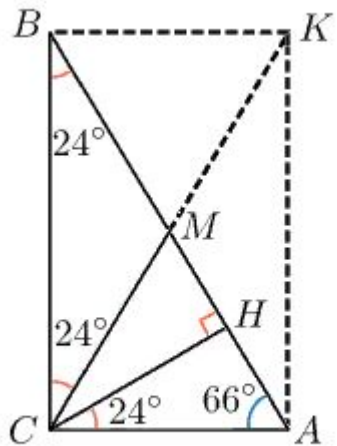
В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Итак, $BM = CM$, значит, треугольник BMC равнобедренный, и угол BCM равен 24° .

По свойству высоты, проведенной из вершины прямого угла,
 $\angle ACH = \angle ABC = 24^\circ$.

Тогда угол MCH (между медианой и высотой треугольника ABC) равен $90^\circ - 24^\circ - 24^\circ = 42^\circ$.

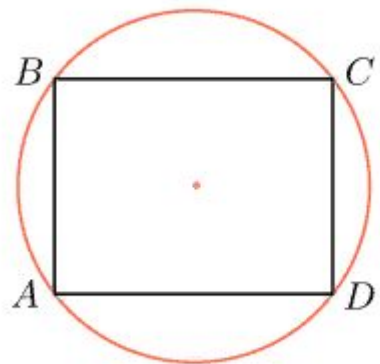
Ответ: 42.



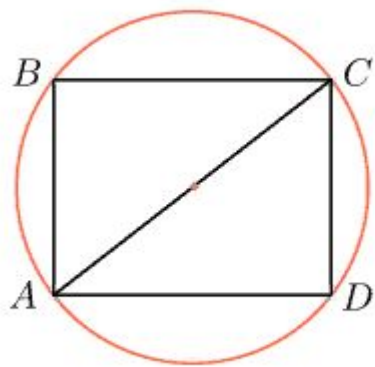
Как вы думаете, где находится центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника? Ведь центр описанной окружности — точка, равноудаленная от всех вершин треугольника. Очевидно, эта точка — середина гипотенузы.

В прямоугольном треугольнике центром описанной окружности является середина гипотенузы.

Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 5.

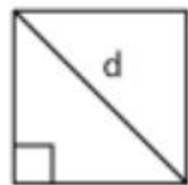


Проведем диагональ AC .



Получим, что AC равна $2R$.
Ответ: 10.

Все формулы по геометрии. Площади фигур



а
квадрат

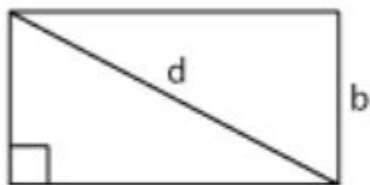
$$S=a^2$$

$$P=4a$$

(периметр - это сумма
всех сторон фигуры)

$$d=a\sqrt{2}$$

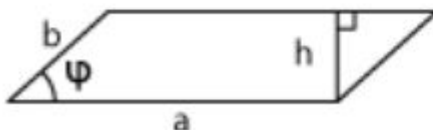
длина диагонали



а
прямоугольник

$$S=a \cdot b$$

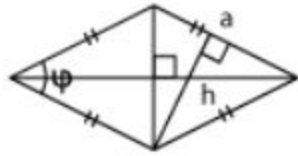
$$d=\sqrt{a^2+b^2}$$



а
параллелограмм

$$S=a \cdot h=a \cdot b \cdot \sin \psi$$

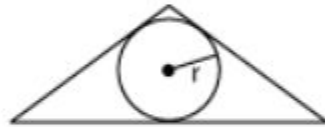
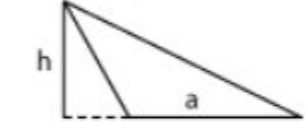
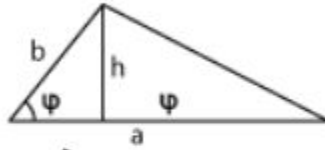
h - высота



ромб

$$S = a \cdot h = a^2 \sin \Psi = \\ = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

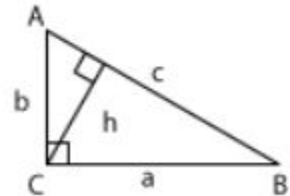
d1, d2 - диагонали



треугольник

$$S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin \Psi = \\ = p \cdot r$$

p - полупериметр
r - радиус вписанной
окружности



прямоугольный
треугольник

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot h$$

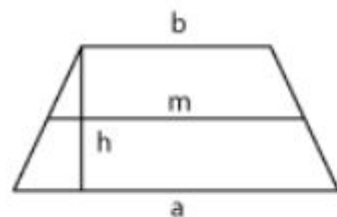
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема
Пифагора

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$$



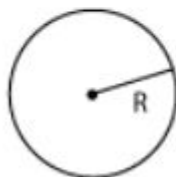
трапеция

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

a, b - основания
h - высота

$$m = \frac{a+b}{2}$$

средняя линия



круг

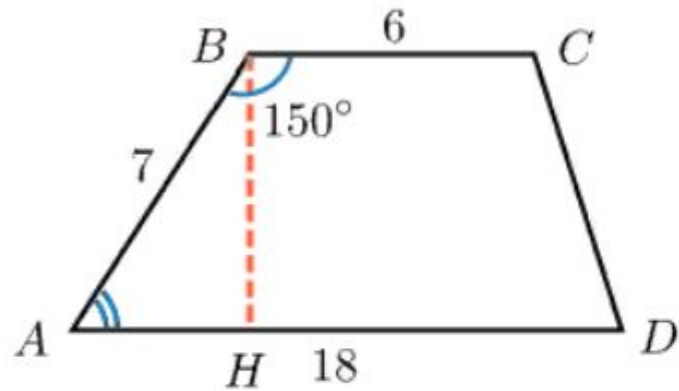
$$S = \pi R^2$$

$$L = 2\pi R = \pi \cdot D$$

D - диаметр

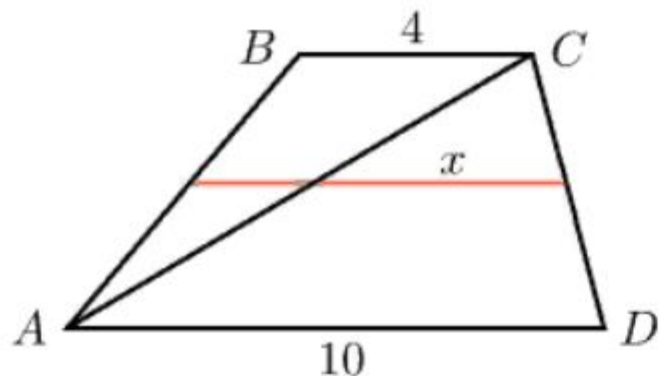
Трапеция и ее свойства

2. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150° . Найдите площадь трапеции.



Это стандартная задача. Углы ABC и BAH — односторонние, значит, их сумма равна 180° , и тогда угол BAH равен 30° . Из треугольника ABH найдем высоту BH . Катет, лежащий напротив угла в 30° , равен половине гипотенузы. Получаем, что $BH = 3,5$ и площадь трапеции равна 42.

3. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

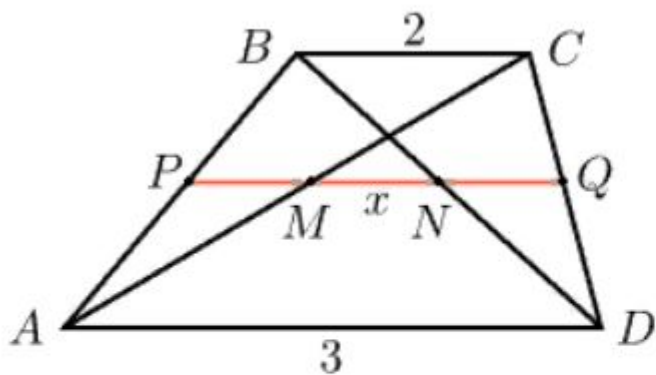


Скажите, что вы видите на чертеже? Можно сказать, что изображена трапеция $ABCD$, и в ней проведена средняя линия. А можно увидеть и другое — два треугольника, ABC и ACD , в которых проведены средние линии.

Мы помним, что средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне и равна половине этой стороны.

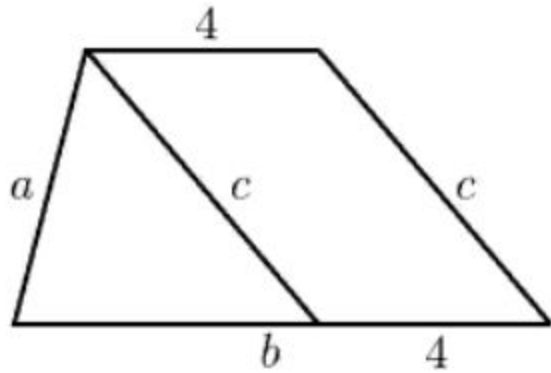
Из треугольника ACD находим: $x = 5$.

4. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



Проведем PQ — среднюю линию трапеции, $PQ = 2,5$. Легко доказать, что отрезок MN , соединяющий середины диагоналей трапеции, лежит на средней линии. Дальше все просто. Найдём отрезки PM и NQ , являющиеся средними линиями треугольников ABC и BCD , а затем отрезок MN . Он равен $0,5$.

5. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.



Периметр треугольника равен сумме его сторон, то есть $a + b + c$.

Периметр трапеции равен $a + b + 4 + c + 4$.

Заметим, что периметр трапеции на 8 больше, чем периметр треугольника. Значит, он равен $15 + 8 = 23$.

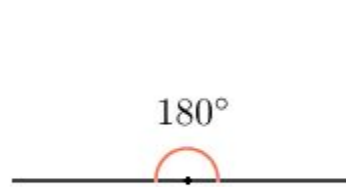
Ответ: 23.

Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Напомним, что *прямой угол* — это угол, равный 90 градусам. Другими словами, половина развёрнутого угла.

Острый угол — меньший 90 градусам.

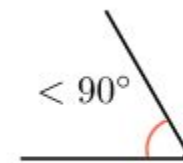
Тупой угол — больший 90 градусам.



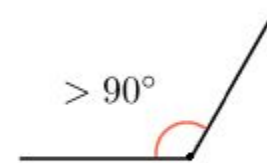
Развёрнутый



Прямой



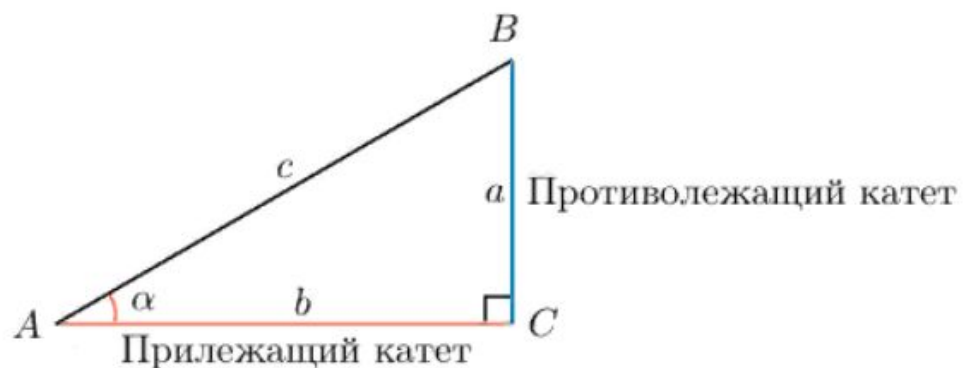
Острый



Тупой

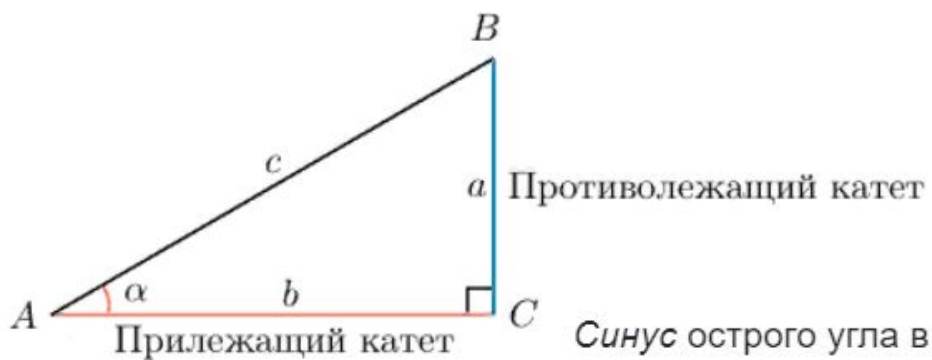
Нарисуем прямоугольный треугольник. Прямой угол обычно обозначается C . Обратим внимание, что сторона, лежащая напротив угла, обозначается той же буквой, только маленькой. Так, сторона, лежащая напротив угла A , обозначается a .

Угол A обозначается соответствующей греческой буквой α .



Гипотенуза прямоугольного треугольника — это сторона, лежащая напротив прямого угла.

Катеты — стороны, лежащие напротив острых углов.



Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$$

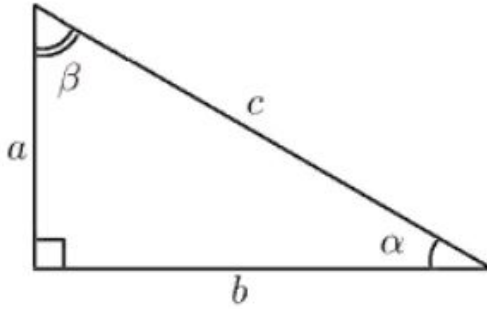
Другое (равносильное) определение: тангенсом острого угла называется отношение синуса угла к его косинусу:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение прилежащего катета к противолежащему (или, что то же самое, отношение косинуса к синусу):

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$$

Синус, косинус и тангенс — их еще называют *тригонометрическими функциями угла* — дают соотношения между *сторонами* и *углами* треугольника. Зная угол, можно найти все его тригонометрические функции по специальным таблицам. А зная синусы, косинусы и тангенсы углов треугольника и одну из его сторон, можно найти остальные.

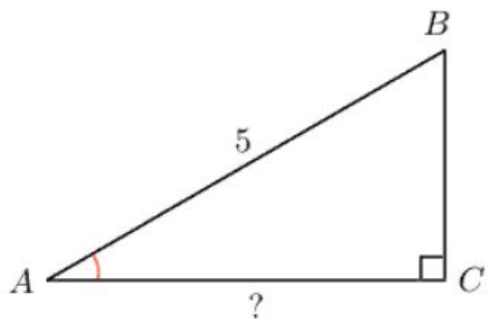
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\operatorname{ctg} \varphi$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,1$. Найдите $\cos B$.

Задача решается за четыре секунды.

Поскольку $A + B = 90^\circ$, $\sin A = \cos B = 0,1$.

2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 5$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AC .



Имеем:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{25}$$

Отсюда

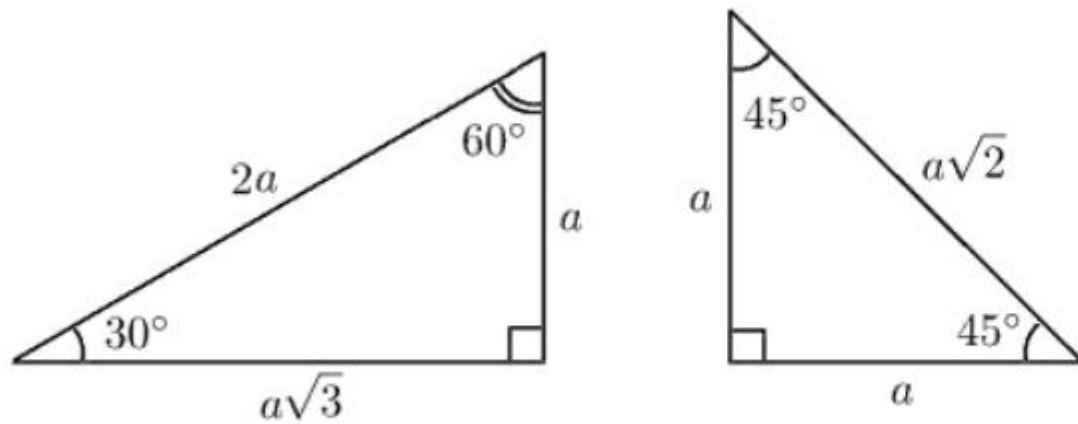
$$BC = \frac{7}{25} \cdot AB = \frac{7}{5}$$

Найдем AC по теореме Пифагора.

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \frac{24}{5} = 4,8$$

Задача решена.

Часто в задачах встречаются треугольники с углами 90° , 30° и 60° или с углами 90° , 45° и 45° . Основные соотношения для них запоминайте наизусть!



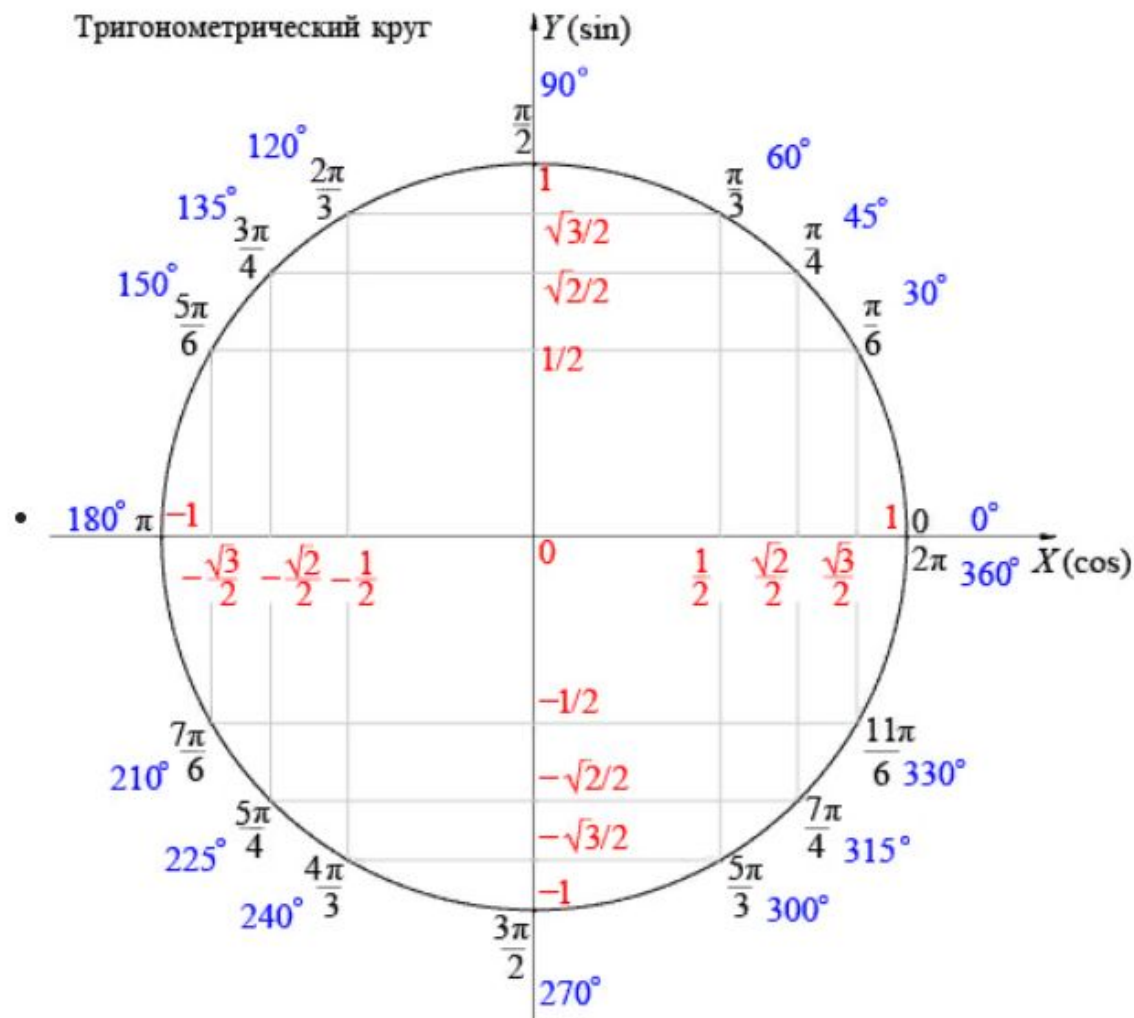
Для треугольника с углами 90° , 30° и 60° катет, лежащий напротив угла в 30° , равен *половине гипотенузы*.

Треугольник с углами 90° , 45° и 45° — равнобедренный. В нем гипотенуза в $\sqrt{2}$ раз больше катета.

Тригонометрический круг: вся тригонометрия на одном рисунке

Тригонометрический круг — это самый простой способ начать осваивать тригонометрию. Он легко запоминается, и на нём есть всё необходимое.

Тригонометрический круг заменяет десяток таблиц.



Вот что мы видим на этом рисунке:

1. Перевод градусов в радианы и наоборот. Полный круг содержит 360 градусов, или 2π радиан.
2. Значения синусов и косинусов основных углов. Помним, что значение косинуса угла мы находим на оси X , а значение синуса — на оси Y .
3. И синус, и косинус принимают значения от -1 до 1 .
4. Значение тангенса угла α тоже легко найти — поделив $\sin \alpha$ на $\cos \alpha$. А чтобы найти котангенс — наоборот, косинус делим на синус.
5. Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса.
6. Синус — функция нечётная, косинус — чётная.
7. Тригонометрический круг поможет увидеть, что синус и косинус — функции периодические. Период равен 2π .

Нарисована единичная окружность — то есть окружность с радиусом, равным единице, и с центром в начале системы координат. Той самой системы координат с осями OX и OY , в которой мы привыкли рисовать графики функций.

Мы отсчитываем углы от положительного направления оси OX против часовой стрелки.

Полный круг — 360 градусов.

Точка с координатами $(1; 0)$ соответствует углу ноль градусов. Точка с координатами $(-1; 0)$ отвечает углу в 180° , точка с координатами $(0; 1)$ — углу в 90° . Каждому углу от нуля до 360 градусов соответствует точка на единичной окружности.

Косинусом угла называется абсцисса (то есть координата по оси OX) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α .

Синусом угла называется ордината (то есть координата по оси OY) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α .

Например:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 0^\circ = 1;$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Итак, косинус и синус — координаты точки на единичной окружности, соответствующей данному углу. Косинус — абсцисса (x), синус — ордината (y). Поскольку окружность единичная, для любого угла и синус, и косинус находятся в пределах от -1 до 1 :

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1,$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1.$$

Простым следствием теоремы Пифагора является *основное тригонометрическое тождество*:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Для того, чтобы узнать знаки синуса и косинуса какого-либо угла, не нужно рисовать отдельных таблиц. Всё уже нарисовано! Находим на нашей окружности точку, соответствующую данному углу α , смотрим, положительны или отрицательны ее координаты по x (это косинус угла α) и по y (это синус угла α).

Принято использовать две единицы измерения углов: градусы и радианы. Перевести градусы в радианы просто: 360 градусов, то есть полный круг, соответствует 2π радиан. На нашем рисунке подписаны и градусы, и радианы.

Если отсчитывать угол от нуля против часовой стрелки — он положительный. Если отсчитывать по часовой стрелке — угол будет отрицательным. Например, угол -30° — это угол величиной в 30° , который отложили от положительного направления оси x по часовой стрелке.

Легко заметить, что

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Углы могут быть и больше 360° градусов. Например, угол 732° — это два полных оборота по часовой стрелке и еще 12° . Поскольку, сделав несколько полных оборотов по окружности, мы возвращаемся в ту же точку с теми же координатами по x и по y , значения синуса и косинуса повторяются через 360° . То есть:

$$\cos(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \cos \alpha,$$

$$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \sin \alpha,$$

где n — целое число. То же самое можно записать в радианах:

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha,$$

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha.$$

Можно на том же рисунке изобразить ещё и оси тангенсов и котангенсов, но проще посчитать их значения. По определению,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

В результате получим следующую таблицу.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{tg} \varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \varphi$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	не существует

