Здравствуйте!

Лекция №3

Предел последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* $a \in \mathbb{R}$ *называется пределом последовательности* $\{ x_n \}$ *если*

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}$ *такое что*, $\forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$

Записывают: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a, \quad x_n \to a$

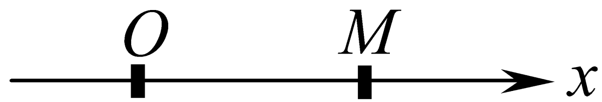
Говорят: последовательность $\{ x_n \}$ сходится (стремиться) к *a*.

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся*** (***сходящейся к** a*)

Последовательность, не имеющую предела, называют ***расходящейся***.

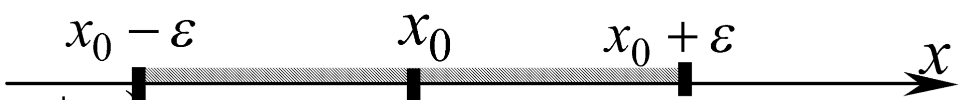
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ
предела последовательности

Пусть $r \in \mathbb{R}$, $M(r) \in Ox$



$M(r)$ – геометрическая интерпретация числа $r \in \mathbb{R}$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.



Интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ называют ε-***окрестностью точки*** x_0.

(геометрическое определение ε-окрестности точки)

Будем обозначать: $U(x_0, \varepsilon)$

Имеем: $U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$

(алгебраическое определение ε-окрестности точки)

Из определения предела последовательности получаем: если $\{x_n\} \to a$, то с геометрической точки зрения это означает, что в любой ε-окрестности точки a находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением может быть конечного их числа. (Геометрическая интерпретация предела последовательности).

$\Rightarrow$ a – **точка «сгущения»** последовательности $\{ x_n \}$.

Определение. Говорят, что при $n \to \infty$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу, равному $+\infty$ (запись: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$) если

$$\forall\ A > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ x_n > A\,.$$

Определение. Говорят, что при $n \to \infty$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу, равному $-\infty$ (запись: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$) если

$$\forall\ A < 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ x_n < A$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Последовательность, сходящуюся к нулю, называют* ***бесконечно малой***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***бесконечно большой***, *если*

$\forall M>0 \;\; \exists N\in\mathbb{N}$ *такое, что* $|x_n|>M, \;\; \forall n>N.$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Расширим множество $\mathbb{R}$.

I способ. Дополним множество $\mathbb{R}$ элементами, обозначаемыми $+\infty$ и $-\infty$ (называют: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность»)

При этом справедливо: $-\infty < r < +\infty$, $\forall r \in \mathbb{R}$.

II способ. Дополним множество $\mathbb{R}$ элементом, обозначаемыми ∞ (называют: «бесконечность»)

При этом ∞ не связана с действительными числами отношением порядка.

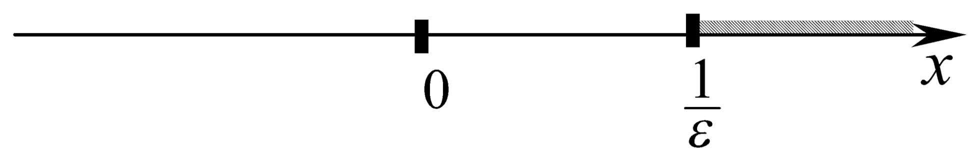
Множество $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ и $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ называют ***расширенным множеством действительных чисел*** (способ расширения всегда понятен из контекста).

Обозначают: $\overline{\mathbb{R}}$.

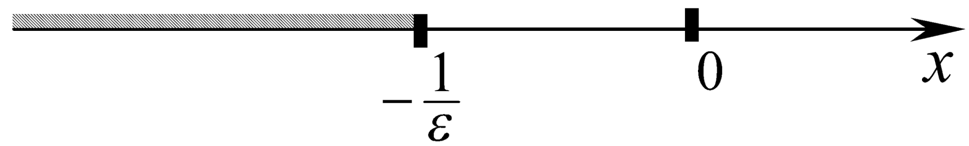
Элементы $-\infty$, $+\infty$, ∞ называют бесконечно удаленными точками числовой прямой.

ε-окрестностью точек $-\infty$, $+\infty$, ∞ считают следующие множества:

$U(+\infty, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 1/\varepsilon\}$



$U(-\infty, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1/\varepsilon\}$



$U(\infty, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1/\varepsilon\}$

Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то с геометрической точки зрения это означает, что в любой ε-окрестности точки ∞ находятся все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа.

(Геометрическая интерпретация бесконечно большой последовательности).

Записывают: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty, \quad x_n \to \infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремиться к ∞».

Частные случаи бесконечно больших последовательностей:

1) $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $x_n \geq 0$, $\forall n$.

Тогда $|x_n| = x_n > M$, $\forall n > N$

⇒ все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа, находятся в любой ε-окрестности точки $+\infty$.

Записывают: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремиться к $+\infty$».

2) $\{ x_n \}$ – бесконечно большая и $x_n \le 0$, $\forall n$.

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремиться к – ∞».

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Суммой, разностью, произведением, частным двух последовательностей* $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ *называются соответственно последовательности*

$$\{ x_n + y_n \},\ \{ x_n - y_n\},\ \{ x_n \cdot y_n \},\ \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \quad (y_n \ne 0).$$

Последовательность $\{cx_n\}$ называется *произведением* $\{x_n\}$ *на число c* (произведение последовательностей $\{x_n\}$ и $\{c\}$)

Бесконечно малые последовательности

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно-малой последовательностью (б.м.п.), если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то есть, если

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |x_n| < \varepsilon\ .$$

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно-большой последовательностью (б.б.п.), если $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$ (это записывается еще и так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, не выписывая знака перед ∞), то есть если

$$\forall\ A > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |x_n| > A.$$

Свойства бесконечно малых последовательностей

1. Сумма и разность бесконечно-малых последовательностей есть также бесконечно-малая последовательность.

Доказательство.

$$\{x_n\} - \text{б.м.п.} \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1\ \ \forall\ n > N_1\ \ |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\{y_n\} - \text{б.м.п.} \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_2\ \ \forall\ n > N_2\ \ |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда

$$\forall\ n > N\ \ |x_n \pm y_n| \le |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,$$

откуда следует, что $\{x_n \pm y_n\}$ есть б.м.п.

Следствие. Сумма любого конечного числа б.м.п. есть также б.м.п

2. Произведение б.м.п на ограниченную последовательность есть б.м.п.

Доказательство

$\{y_n\}$ ограничена $\Rightarrow \exists\ A > 0\ \forall\ n\ \ |y_n| \le A$

$\{x_n\}$ б.м.п. $\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |x_n| < \dfrac{\varepsilon}{A}$

Но тогда $\forall n > N\ \ |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$, отсюда и следует,

что $\{x_n \cdot y_n\}$ есть б.м.п.

3. Б.м.п. ограничена

Доказательство

Пусть $\{x_n\}$ – б.м.п. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |x_n| < \varepsilon$.

Возьмем $A = \max\left(|x_1|, |x_2|, \ldots\ |x_N|, \varepsilon\right)$. Тогда $\forall\ n\ |x_n| \le A$

то есть $\{x_n\}$ ограничена

Следствие. Произведение б.м.п. есть также б.м.п.

4. Пусть $\{x_n\}$ б.м.п. и $\forall\ n\ \ x_n \neq 0$. Тогда $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ есть б.б.п.

Доказательство

$\{x_n\}$ б.м.п $\Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |x_n| < \varepsilon$.

Возьмем любое $A > 0$ и положим $\varepsilon = \dfrac{1}{A}$.

Тогда $\exists N\ \ \forall n > N\ \ |x_n| < \dfrac{1}{A} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x_n}\right| > A$, отсюда следует, что $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ есть б.б.п.

5. Пусть $\{x_n\}$ – б.б.п., тогда $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ есть б.м.п.

$\{x_n\}$ – б.б.п. $\Rightarrow \forall\ A > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |x_n| > A$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и положим $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$

Тогда $\exists\ N\ \forall\ n > N\ |x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, отсюда следует, что $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ есть б.м.п.

Сходящиеся последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если у нее существует конечный предел (то есть существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a \neq \pm\infty$).

1. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $a \neq \pm\infty$, а $\{\alpha_n\}$ – б.м.п.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Это значит, что

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |x_n - a| < \varepsilon \cdot$$

Обозначим $x_n - a = \alpha_n$. Тогда $x_n = a + \alpha_n$ и $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |\alpha_n| < \varepsilon$. то есть α_n – б.м.п.

Достаточность. Пусть $x_n = a + \alpha_n$, где а $\{\alpha_n\}$ – б.м.п., то есть $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |\alpha_n| < \varepsilon$. Но так как $\alpha_n = x_n - a$, то $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |x_n - a| < \varepsilon$, то есть $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство.

Пусть $x_n = a + \alpha_n$, где α_n– б.м.п. В силу этого $\{\alpha_n\}$ ограничена, то есть $\exists\ A\ \ \forall\ n\ \ |\alpha_n| < A$. Но тогда $\forall\ n\ \ |x_n| = |a + \alpha_n| \le |a| + A$, то есть $\{x_n\}$ ограничена.

3. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся последовательности, то $\{x_n \pm y_n\}$ тоже сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Доказательство.

$\{x_n\}$ сходящаяся $\Rightarrow$ $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ б.м.п.

$\{y_n\}$ сходящаяся $\Rightarrow y_n = b + \beta_n$, где $\{\beta_n\}$ б.м.п.

Но тогда $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$.

По свойствам б.м.п., $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ есть б.м.п. и поэтому $\{x_n \pm y_n\}$ есть сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

4. Если $\{x_n\}$ сходящаяся последовательность, то $\{c \cdot x_n\}$ тоже сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Доказательство

$\{x_n\}$ сходится $\Rightarrow$ $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – б.м.п.

Но тогда $c \cdot x_n = c \cdot a + c \cdot \alpha_n$ и, по свойства б.м.п., $\{c \cdot \alpha_n\}$ есть тоже б.м.п. Поэтому $\{c \cdot x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot a = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

5. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся последовательности, то $\{x_n \cdot y_n\}$ тоже сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Доказательство

$\{x_n\}$ сходится $\Rightarrow$ $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – б.м.п.

$\{y_n\}$ сходится $\Rightarrow y_n = b + \beta_n$, где $\{\beta_n\}$ – б.м.п.

Но тогда $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n)$.

По свойствам б.м.п., $\{b\alpha_n\}$, $\{a\beta_n\}$, $\{\alpha_n\beta_n\}$ есть б.м.п. Их сумма есть также б.м.п. Поэтому, $\{x_n \cdot y_n\}$ есть сходящаяся последовательность и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

6. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, то, начиная с некоторого $n = N$, последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ ограничена.

Доказательство

$\{y_n\}$ сходится $\Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |y_n - b| < \varepsilon$.

Так как $b \neq 0$ то возьмем $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$. Тогда $\exists\ N\ \ \forall\ n > N\ \ |y_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$.

Но тогда $\forall\ n > N$ мы имеем

$$|b| = |(b - y_n) + y_n| \leq |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n|.$$

Сравнивая начало и конец, получим, что

$$\forall n > N\ |y_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \text{ и } \left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|},$$

то есть. при $n > N$ последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ ограничена

7. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$. Тогда $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ есть также сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Доказательство

$\{x_n\}$ сходится $\Rightarrow$ $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ $-$ б.м.п.

$\{y_n\}$ сходится $\Rightarrow y_n = b + \beta_n$, где $\{\beta_n\}$ $-$ б.м.п.

Тогда

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{(b+\beta_n)b} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)$$

Вспомним, что $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$. Тогда $\left\{\dfrac{a}{b}\beta_n\right\}$ есть б.м.п.,

$\left\{\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right\}$ есть б.м.п., и т.к. $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ ограниченна, то

$\left\{\dfrac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right)\right\}$ есть тоже б.м.п.

Итак, $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b} +$ б.м.п. и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$