

Здравствуйте!

Лекция №3

Предел последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ такое что, } \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

Записывают: $\lim x_n = a, \quad x_n \rightarrow a$

Говорят: последовательность $\{x_n\}$ $n \rightarrow \infty$ сходится (стремиться) к a .

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся***
(***сходящейся к a***)

Последовательность, не имеющую предела, называют ***расходящейся***.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ предела последовательности

Пусть $r \in \mathbb{R}$, $M(r) \in Ox$



$M(r)$ – геометрическая интерпретация числа $r \in \mathbb{R}$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.



Интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ называют **ε -окрестностью точки** x_0 .
(геометрическое определение ε -окрестности точки)

Будем обозначать: $U(x_0, \varepsilon)$

Имеем: $U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$

(алгебраическое определение ε -окрестности точки)

Из определения предела последовательности получаем: если $\{x_n\} \rightarrow a$, то с геометрической точки зрения это означает, что в любой ε -окрестности точки a находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением может быть конечного их числа. (Геометрическая интерпретация предела последовательности).

$\Rightarrow a$ – **точка «сгущения»** последовательности $\{x_n\}$.

Определение. Говорят, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу, равному $+\infty$ (запись: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ или $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$) если

$$\forall A > 0 \exists N \forall n > N \ x_n > A.$$

Определение. Говорят, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу, равному $-\infty$ (запись: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ или $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$) если

$$\forall A < 0 \exists N \forall n > N \ x_n < A$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность, сходящуюся к нулю, называют **бесконечно малой**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если

$\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $|x_n| > M, \forall n > N$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Расширим множество \mathbb{R} .

I способ. Дополним множество \mathbb{R} элементами, обозначаемыми $+\infty$ и $-\infty$ (называют: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность»)

При этом справедливо: $-\infty < r < +\infty$, $\forall r \in \mathbb{R}$.

II способ. Дополним множество \mathbb{R} элементом, обозначаемыми ∞ (называют: «бесконечность»)

При этом ∞ не связана с действительными числами отношением порядка.

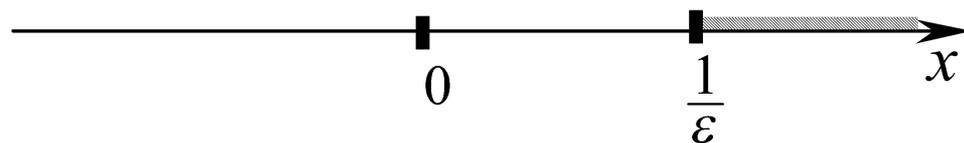
Множество $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называют **расширенным множеством действительных чисел** (способ расширения всегда понятен из контекста).

Обозначают: $\overline{\mathbb{R}}$.

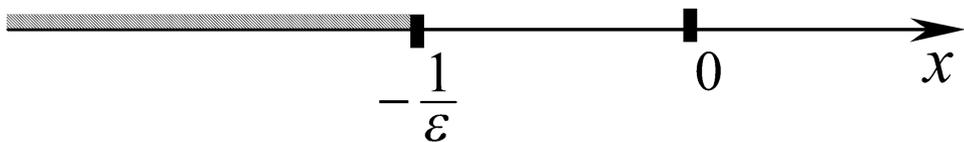
Элементы $-\infty, +\infty, \infty$ называют бесконечно удаленными точками числовой прямой.

ε -окрестностью точек $-\infty, +\infty, \infty$ считают следующие множества:

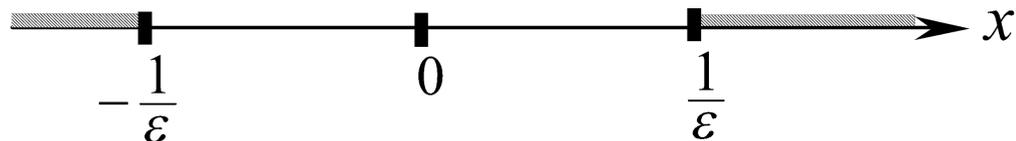
$$U(+\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/\varepsilon\}$$



$$U(-\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1/\varepsilon\}$$



$$U(\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1/\varepsilon\}$$



Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то с геометрической точки зрения это означает, что в любой ε -окрестности точки ∞ находятся все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа.

(Геометрическая интерпретация бесконечно большой последовательности).

Записывают: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad x_n \rightarrow \infty$

Говорят: «последовательность $\{x_n\}$ стремиться к ∞ ».

Частные случаи бесконечно больших последовательностей:

1) $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $x_n \geq 0, \quad \forall n$.

Тогда $|x_n| = x_n > M, \quad \forall n > N$

\Rightarrow все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа, находятся в любой ε -окрестности точки $+\infty$.

Записывают: $\lim x_n = +\infty, \quad x_n \rightarrow +\infty$

Говорят: «последовательность $\{x_n\}$ стремиться к $+\infty$ ».

2) $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $x_n \leq 0, \forall n$.

Записывают: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, x_n \rightarrow -\infty$

Говорят: «последовательность $\{x_n\}$ стремиться к $-\infty$ ».

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Суммой, разностью, произведением, частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются соответственно последовательности

$$\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \quad (y_n \neq 0) .$$

Последовательность $\{cx_n\}$ называется *произведением* $\{x_n\}$ на число c (произведение последовательностей $\{x_n\}$ и $\{c\}$)

Бесконечно малые последовательности

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно-малой последовательностью (б.м.п.), если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, то есть, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n| < \varepsilon.$$

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно-большой последовательностью (б.б.п.), если $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$ (это записывается еще и так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, не выписывая знака перед ∞), то есть если

$$\forall A > 0 \exists N \forall n > N |x_n| > A.$$

Свойства бесконечно малых последовательностей

1. Сумма и разность бесконечно-малых последовательностей есть также бесконечно-малая последовательность.

Доказательство.

$$\{x_n\} - \text{б.м.п.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n > N_1 |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\{y_n\} - \text{б.м.п.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n > N_2 |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда

$$\forall n > N |x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

откуда следует, что $\{x_n \pm y_n\}$ есть б.м.п.

Следствие. Сумма любого конечного числа б.м.п. есть также б.м.п

2. Произведение б.м.п на ограниченную последовательность есть б.м.п.

Доказательство

$$\{y_n\} \text{ ограничена} \Rightarrow \exists A > 0 \forall n |y_n| \leq A$$

$$\{x_n\} \text{ б.м.п.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n| < \frac{\varepsilon}{A}$$

Но тогда $\forall n > N |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$, отсюда и следует,

что $\{x_n \cdot y_n\}$ есть б.м.п.

3. Б.м.п. ограничена

Доказательство

Пусть $\{x_n\}$ – б.м.п. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n| < \varepsilon$.

Возьмем $A = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, \varepsilon)$. Тогда $\forall n |x_n| \leq A$

то есть $\{x_n\}$ ограничена

Следствие. Произведение б.м.п. есть также б.м.п.

4. Пусть $\{x_n\}$ б.м.п. и $\forall n \ x_n \neq 0$. Тогда $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ есть

б.б.п.

Доказательство

$\{x_n\}$ б.м.п. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \ |x_n| < \varepsilon$.

Возьмем любое $A > 0$ и положим $\varepsilon = \frac{1}{A}$.

Тогда $\exists N \forall n > N \ |x_n| < \frac{1}{A} \Rightarrow \left| \frac{1}{x_n} \right| > A$, отсюда следует, что $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$

есть б.б.п.

5. Пусть $\{x_n\}$ – б.б.п., тогда $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ есть б.м.п.

$$\{x_n\} \text{ – б.б.п.} \Rightarrow \forall A > 0 \exists N \forall n > N |x_n| > A.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и положим $A = \frac{1}{\varepsilon}$

Тогда $\exists N \forall n > N |x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, отсюда следует, что $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$

есть б.м.п.

Сходящиеся последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если у нее существует конечный предел (то есть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $a \neq \pm\infty$).

1. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $a \neq \pm\infty$, а $\{\alpha_n\}$ – б.м.п.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon .$$

Обозначим $x_n - a = \alpha_n$. Тогда $x_n = a + \alpha_n$ и

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |\alpha_n| < \varepsilon$. то есть α_n – б.м.п.

Достаточность. Пусть $x_n = a + \alpha_n$, где а $\{\alpha_n\}$ – б.м.п., то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |\alpha_n| < \varepsilon$. Но так как $\alpha_n = x_n - a$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$, то есть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство.

Пусть $x_n = a + \alpha_n$, где α_n — б.м.п. В силу этого $\{\alpha_n\}$ ограничена, то есть $\exists A \forall n |\alpha_n| < A$. Но тогда $\forall n |x_n| = |a + \alpha_n| \leq |a| + A$, то есть $\{x_n\}$ ограничена.

3. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся последовательности, то $\{x_n \pm y_n\}$ тоже сходящаяся последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Доказательство.

$\{x_n\}$ сходящаяся $\Rightarrow x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ б.м.п.

$\{y_n\}$ сходящаяся $\Rightarrow y_n = b + \beta_n$, где $\{\beta_n\}$ б.м.п.

Но тогда $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$.

По свойствам б.м.п., $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ есть б.м.п. и поэтому $\{x_n \pm y_n\}$ есть сходящаяся последовательность и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

4. Если $\{x_n\}$ сходящаяся последовательность, то $\{c \cdot x_n\}$ тоже сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Доказательство

$\{x_n\}$ сходится $\Rightarrow x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – б.м.п.

Но тогда $c \cdot x_n = c \cdot a + c \cdot \alpha_n$ и, по свойства б.м.п., $\{c \cdot \alpha_n\}$ есть тоже б.м.п. Поэтому $\{c \cdot x_n\}$ сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot a = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

5. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся последовательности, то $\{x_n \cdot y_n\}$ тоже сходящаяся последовательность и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Доказательство

$\{x_n\}$ сходится $\Rightarrow x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – б.м.п.

$\{y_n\}$ сходится $\Rightarrow y_n = b + \beta_n$, где $\{\beta_n\}$ – б.м.п.

Но тогда $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n)$.

По свойствам б.м.п., $\{b\alpha_n\}$, $\{a\beta_n\}$, $\{\alpha_n\beta_n\}$ есть б.м.п. Их сумма

есть также б.м.п. Поэтому, $\{x_n \cdot y_n\}$ есть сходящаяся

последовательность и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

6. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$, то, начиная с некоторого $n = N$,

последовательность $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ ограничена.

Доказательство

$\{y_n\}$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |y_n - b| < \varepsilon$.

Так как $b \neq 0$ то возьмем $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$. Тогда $\exists N \forall n > N |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$.

Но тогда $\forall n > N$ мы имеем

$$|b| = |(b - y_n) + y_n| \leq |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n|.$$

Сравнивая начало и конец, получим, что

$$\forall n > N |y_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \quad \text{и} \quad \left| \frac{1}{y_n} \right| < \frac{2}{|b|},$$

то есть. при $n > N$ последовательность $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ ограничена

7. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся последовательности, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$. Тогда $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ есть также сходящаяся последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$.

Доказательство

$\{x_n\}$ сходится $\Rightarrow x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – б.м.п.

$\{y_n\}$ сходится $\Rightarrow y_n = b + \beta_n$, где $\{\beta_n\}$ – б.м.п.

Тогда

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{(b + \beta_n)b} = \frac{1}{y_n} \left(\alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n \right)$$

Вспомним, что $b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$. Тогда $\left\{ \frac{a}{b} \beta_n \right\}$ есть б.м.п.,

$\left\{ \alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n \right\}$ есть б.м.п., и т.к. $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ ограничена, то

$\left\{ \frac{1}{y_n} \left(\alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n \right) \right\}$ есть тоже б.м.п.

Итак, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \text{б.м.п.}$ и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$