

# Основные законы распределения непрерывных случайных величин

Презентация для студентов

АКБ 2

# Непрерывная СВ

**НСВ** называется такая величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Число всех возможных значений НСВ **бесконечно**.

Пример: Случайное отклонение по дальности точки падения снаряда от цели.



# Функция распределения НСВ

Функцией распределения называют  $F(x)$ , определяющую для каждого значения  $x$  вероятность того, что СВХ примет значение, меньшее  $x$ , т.е. согласно определению

$$F(x) = P(X < x)$$

$F(x)$  определяет и ДСВ и НСВ.  $F(x)$  также называют интегральной функцией распределения.



# Функция распределения НСВ

Свойства функции распределения:

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$

2. если  $x_2 > x_1$ , то  $F(x_2) \geq F(x_1)$

следствие:  $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$

3. Если все возможные значения  $x$  СВХ принадлежат интервалу  $(a; b)$ , то при  $x \leq a$   $F(x) = 0$ , а при  $x \geq b$   $F(x) = 1$

Следствие:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Функция распределения непрерывна слева



# Функция плотности распределения НСВ

Функцией плотности распределения вероятностей называют первую производную от функции  $F(x)$ , то есть  $f(x)=F'(x)$ .  $f(x)$  называют дифференциальной функцией. Вероятность того, что НСВХ примет значения, принадлежащие интервалу  $(a;b)$  вычисляемые по формуле

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Свойства:

1.  $f(x) \geq 0$

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ , в частности, если все возможные значения СВ принадлежат  $(a;b)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$



# Числовые хар-ки НСВ

Математическое ожидание НСВХ, все возможные значения которой принадлежат интервалу (а;б), определяется равенством:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Дисперсия НСВХ, все возможные значения которой принадлежат интервалу (а;б), определяется равенством:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(x))^2 \cdot f(x) dx$$

При решении задач применима формула:

$$D(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx - (M(X))^2$$



# Числовые хар-ки НСВ

Среднеквадратичное отклонение определяется так же, как и для ДСВ:

$$\delta(X) = \sqrt{D(X)}$$

Начальный момент  $k$ -ого порядка НСВ определяется равенством:

$$V_k = \int_a^b x^k f(x) dx$$

$$V_1 = M(X)$$

$$V_2 = M(X^2) = \int_a^b x^2 f(x) dx$$



# Числовые хар-ки НСВ

Центральный момент  $k$ -ого порядка НСВХ, все возможные значения которой принадлежат интервалу  $(a:b)$ , определяется равенством:

$$\mu_k = \int_a^b (x - M(x))^k f(x) dx$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = D(X)$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$



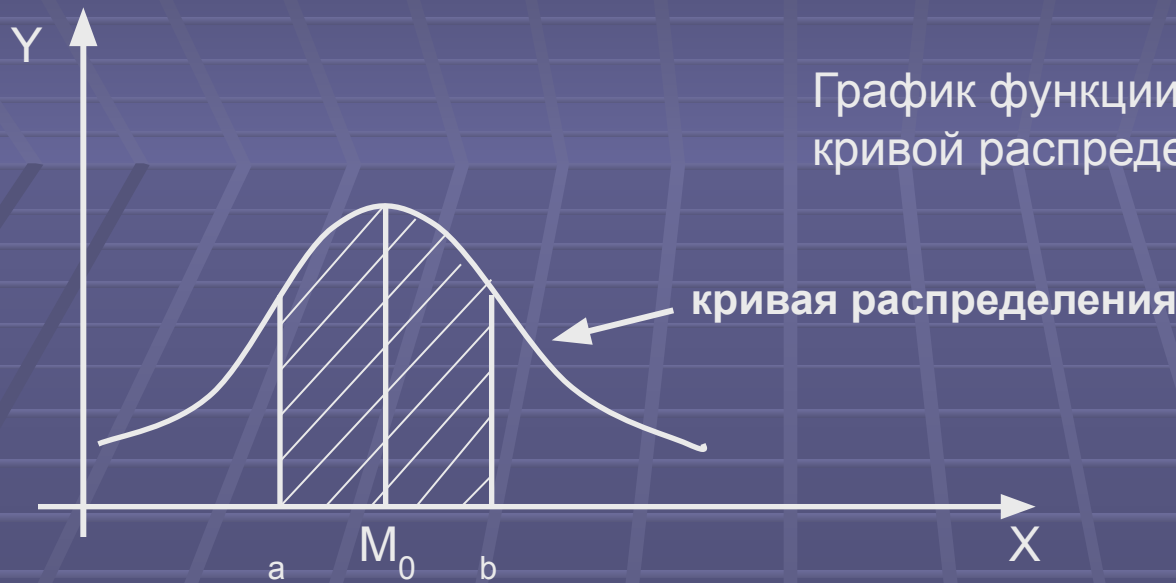


# Числовые хар-ки НСВ

Если все возможные значения НСВХ принадлежат всей числовой оси  $Ox$ , то во всех вышеуказанных формулах определенный интеграл заменяется несобственным интегралом с бесконечными нижним и верхним пределами



# Кривая распределения СВХ



Геометрически вероятность попадания СВХ в промежуток  $(a;b)$  равна площади соответствующей криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения осью  $OX$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$



# Мода

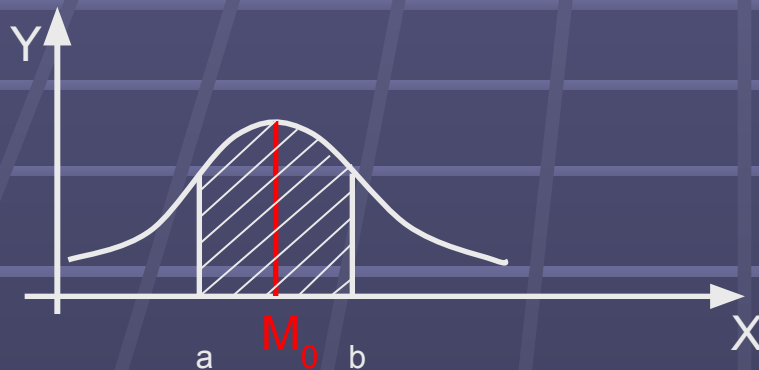
**Модой ДСВХ** называется ее наиболее вероятное значение. **Модой НСВХ** называется такое ее значение  $M_0$ , при котором плотность распределения максимальная.

Для нахождения моды НСВ необходимо найти максимум функции с помощью первой или второй производной.

X	1	2	3
P	0.1	0.6	0.3

$M_0=2$ , т.к.  $0.1 < 0.6 > 0.3$

Геометрически мода является абсциссой той точки кривой или полигона распределения, ордината которой максимальна



# Медиана

**Медианой НСВХ** называется такое ее значение  $M_e$ , для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина больше или меньше  $M_e$ , т.е.  $P(x < M_e) = P(x > M_e) = 0.5$

Ордината, проведенная к точке с абсциссой, равной  $M_e$ , делит пополам площадь, ограниченную кривой или полигоном распределения. Если прямая  $x=a$  является осью симметрии кривой распределения  $y=f(x)$ , то  $M_0 = M_e = M(X) = a$



# Равномерное распределение ПЛОТНОСТИ

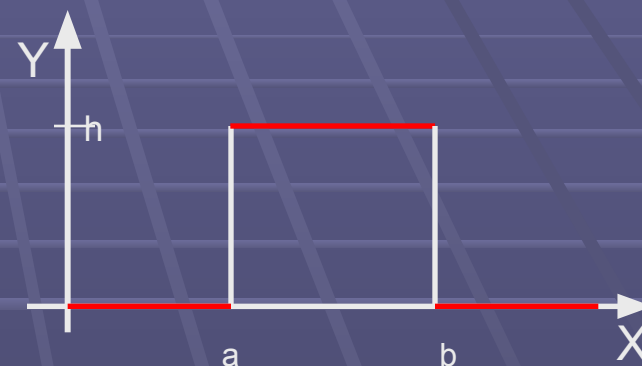
Равномерным называется распределение таких СВ, все значения которых лежат на некотором отрезке (a;b) и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке

Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратичное отклонение равномерно распределенной СВ:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ h, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

$$h = \frac{1}{b-a}$$



# Показательное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

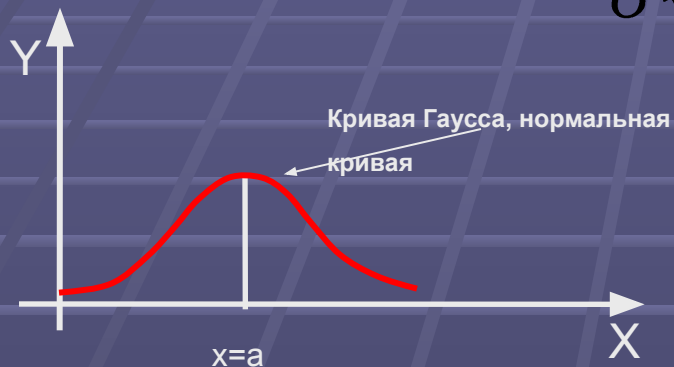


# Нормальный закон распределения. Функция Лапласа

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Кривая распределения симметрична относительно прямой  $x=a$ .  
Максимальная ордината при  $x=a$  равна



1)  $f(x) > 0$

2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Ось абсцисс является асимптотой кривой  $y=f(x)$

$$M(X) = a$$

$$\sigma(X) = D(X)$$

$$M_0 = a = M_e$$

$\Phi(x)$  - Функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

