Основные законы распределения непрерывных случайных величин

Презентация для студентов

АКб 2

Непрерывная СВ

НСВ называется такая величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Число всех возможных значений НСВ **бесконечно**.

Пример: Случайное отклонение по дальности точки падения снаряда от цели.

Функция распределения НСВ

Функцией распределения называют F(x), определяющую для каждого значения x вероятность того, что СВХ примет значение, меньшее x, т.е. согласно определению

$$F(x)=P(X<x)$$

F(x) определяет и ДСВ и НСВ. F(x) также называют интегральной функцией распределения.

Функция распределения НСВ

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$

   следствие: $P(a > x < b) = F(b) - F(a)$

3. Если все возможные значения х СВХ принадлежат интервалу (a;b), то при a<=a F(x)=0, а при x>=b F(x)=1

   Следствие:

   $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

   $$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

   Функция распределения непрерывна слева

Функция плотности распределения НСВ

Функцией плотности распределения вероятностей называют первую производную от функции F(x), то есть f(x)=F`(x). f(x) называют дифференциальной функцией. Вероятность того, что НСВX примет значения, принадлежащие интервалу (a;b) вычисляемые по формуле

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Свойства:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, в частности, если все возможные значения СВ принадлежат (a;b), то $\int_a^b f(x)dx = 1$

Числовые хар-ки НСВ

Математическое ожидание НСВХ, все возможные значения которой принадлежат интервалу (a;b), определяется равенством:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

Дисперсия НСВХ, все возможные значения которой принадлежат интервалу (a;b), определяется равенством:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(x))^2 \cdot f(x)dx$$

При решении задач применима формула:

$$D(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx - (M(X))^2$$

Числовые хар-ки НСВ

Среднеквадратичное отклонение определяется так же, как и для ДСВ:

$$\delta(X)=\sqrt{D(X)}$$

Начальный момент k-ого порядка НСВ определяется равенством:

$$\nu_k=\int_a^b x^k f(x)dx$$

$$\nu_1=M(X)$$

$$\nu_2=M(X^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx$$

Числовые хар-ки НСВ

Центральный момент k-ого порядка НСВХ, все возможные значения которой принадлежат интервалу (a:b), определяется равенством:

$$\mu_k = \int_a^b (x - M(x))^k f(x)dx$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = D(X)$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$

Числовые хар-ки НСВ

Если все возможные значения НСВХ принадлежат всей числовой оси ОХ, то во всех вышеуказанных формулах определенный интеграл заменяется несобственным интегралом с бесконечными нижним и верхним пределами

Кривая распределения СВХ

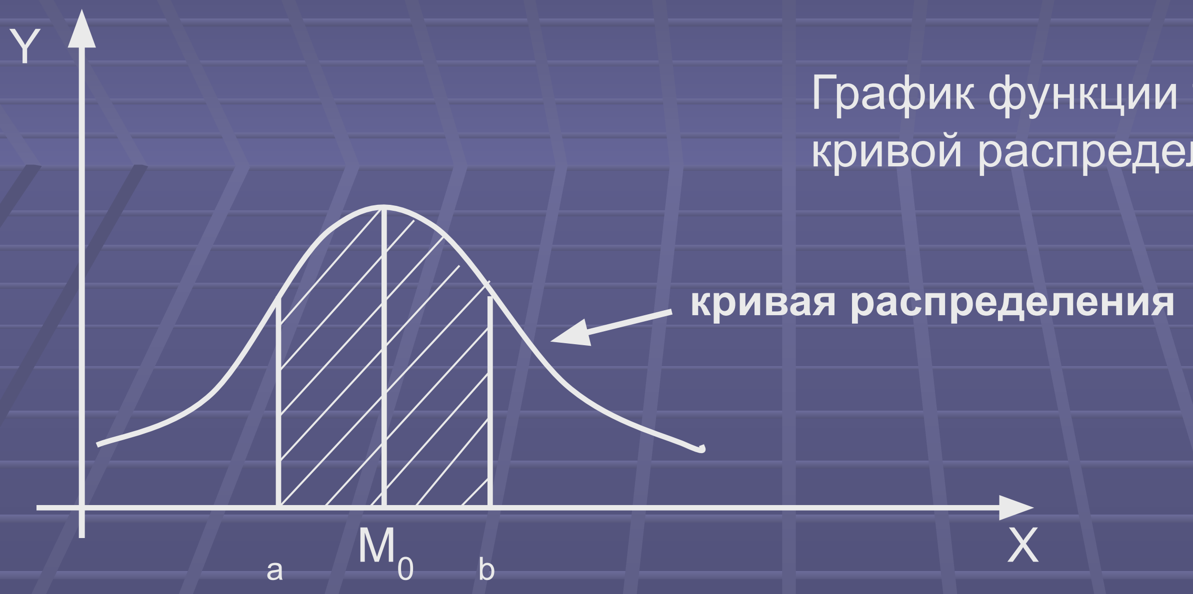


График функции f(x) называется кривой распределения

Геометрически вероятность попадания СВХ в промежуток (a;b) равна площади соответствующей криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения осью ОХ и прямыми x=a и x=b

Мода

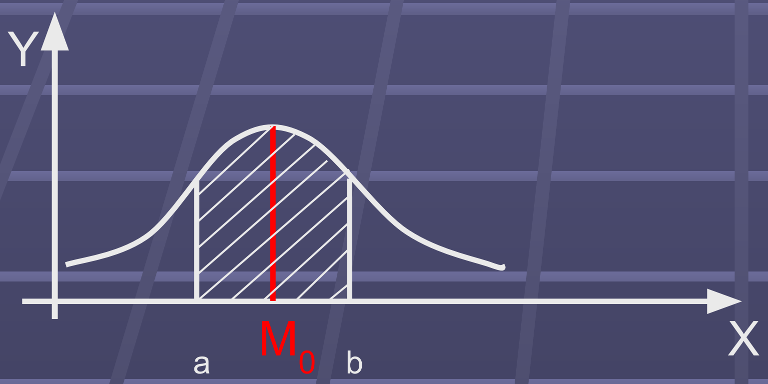
Модой ДСВХ называется ее наиболее вероятное значение. **Модой НСВХ** называется такое ее значение M_0, при котором плотность распределения максимальная.

Для нахождения моды НСВ необходимо найти максимум функции с помощью первой или второй производной.

X	1	2	3
P	0.1	0.6	0.3

$M_0=2$, т.к. $0.1<0.6>0.3$

Геометрически мода является абсциссой той точки кривой или полигона распределения, ордината которой максимальна



Медиана

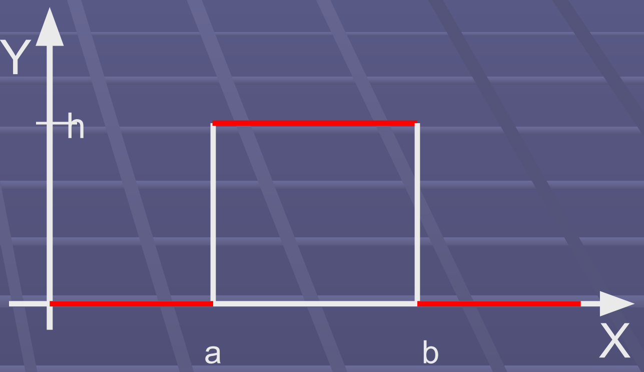
Медианой НСВХ называется такое ее значение M_e, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина больше или меньше M_e, т.е. $\mathbf{P(x< M_e)=P(x> M_e)=0.5}$

Ордината, проведенная к точке с абсциссой, равной M_e, делит пополам площадь, ограниченную кривой или полигоном распределения. Если прямая **x=a** является осью симметрии кривой распределения y=f(x), то $\mathbf{M_0=M_e=M(X)=a}$

Равномерное распределение плотности

Равномерным называется распределение таких СВ, все значения которых лежат на некотором отрезке (a;b) и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке

Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратичное отклонение равномерно распределенной СВ:



$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ h, a \le x \le b \\ 0, x > b \end{cases}$$

$$h = \frac{1}{b-a}$$

X

Показательное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

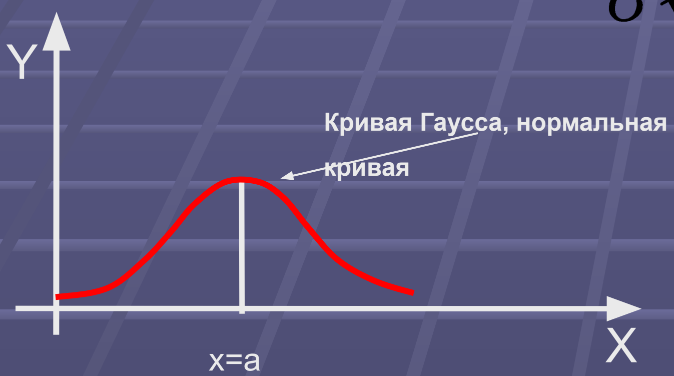
Нормальный закон распределения. Функция Лапласа

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Кривая распределения симметрична относительно прямой x=a. Максимальная ордината при x=a равна

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$



$$1)\ f(x)>0$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1$$

Ось абсцисс является асимптотой кривой y=f(x)

$$M(X)=a$$

$$\sigma(X)=D(X)$$

$$M_0=a=M_e$$

Ф(x) - Функция Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$$