

Определение. Булева функция $f \in P_n$ существенно зависит от переменной x_i , если существует такой набор значений $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

В этом случае x_i называют *существенной переменной*, в противном случае x_i называют *несущественной переменной*.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_2	x_3	$f(0, x_2, x_3) \neq f(1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1			
1	0	1	1			
1	1	0	0			
1	1	1	0			

x_1	x_2	$f(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2, 1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x_1 существенная, $f(0, x_2, x_3) \neq f(1, x_2, x_3)$.

x_3 фиктивная, $f(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2, 1)$.

Минимизация нормальных форм

Функция g входит в функцию f если функция g покрывает своими нулями все нули функции f , а единицы f покрываются как нулями, так и единицами. Функция, g входящая в функцию f , называется импликантой этой функции

Булеву функцию g назовем *импликантом* булевой функции f , если для любых наборов из 0 и 1 из равенства $g = 1$ следует равенство $f = 1$.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$g = \bar{x} y \bar{z}$$

$$g = 1$$

$$x = 0, y = 1, z = 0.$$

$$f = 1$$

Импликанта E называется *простой*, если при удалении любой буквы из неё она перестаёт быть импликантой булевой функции f .

$$g = \bar{x} y \bar{z}$$

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

При отбрасывании

x

$y \bar{z}$, 1 при $y=1, z=0$.

$$f(1, 1, 0) = 0$$

При отбрасывании

y

$$\bar{x} \bar{z}$$

1 при $x=0, z=0$.

$$f(0, 0, 0) = 0$$

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$g = \bar{x} y \bar{z}$$

При отбрасывании z

1 при $x = 0, y = 1$

$$f(0, \dot{1}, \dot{1}) = 0$$

Так как при отбрасывании любой переменной функция $g = \bar{x} y \bar{z}$ перестает быть импликантом функции f , то $g = \bar{x} y \bar{z}$ является простым импликантом функции f .

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$g = x \bar{y} z$$

$g = 1$ только при $x = 1$
 $y = 0, z = 1$.

при отбрасывании x
 $\bar{y}z$ импликант
 не является простым.

Сокращённой ДНФ называется ДНФ, состоящая из всех простых импликант данной булевой функции.

Ядровая импликанта — импликанта, удаление которой из ДНФ некоторой булевой функции f приводит к ДНФ, не равносильной f .

Минимальная ДНФ данной функции f — ДНФ, имеющая наименьшее число символов переменных из всех ДНФ, задающих функцию f .

Тупиковой ДНФ функции f называется такая её ДНФ, состоящая из простых импликант, что удаление из неё любой конъюнкции нарушает равносильность ДНФ данной функции.

Сложностью ДНФ (КНФ) называется количество символов переменных, использованных в записи формулы.

Сокращённая ДНФ может быть получена из СДНФ последовательным применением, пока это возможно, формулы *неполного склеивания* $K_i \vee K_{\bar{i}} = K_i \vee K_{\bar{i}} \vee K$, а затем — формулы *поглощения* $K_i \vee K = K$.

Всякая функция реализуется своей сокращённой ДНФ. Для всякой функции, не равной тождественно нулю, существует единственная сокращённая ДНФ.

Теорема Любая переключательная функция равна дизъюнкции своих простых импликант

Теорема Квайна Если в СДНФ ПФ выполнить все операции неполного склеивания, а затем все операции поглощения, то в результате будет получена сокращенная ДНФ, или дизъюнкция ее все простых импликант

Пример

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$\boxed{\bar{x}\bar{y}z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \boxed{x\bar{y}z} = \bar{x}y\bar{z} \vee \cancel{\bar{x}\bar{y}z} \vee \cancel{x\bar{y}z} \vee \bar{y}z = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}z$$

$$\boxed{\bar{x}\bar{y}z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \boxed{x\bar{y}z} \vee \boxed{\bar{x}yz} =$$

$$= \bar{x}y\bar{z} \vee \boxed{\bar{y}z} \vee \bar{x}yz =$$

$$= \bar{x}y\bar{z} \vee \boxed{xz} \vee x\bar{y}z =$$

$$= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z$$

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

001 +

010

101+

010 -01

$$f(x, y, z, w) = (1101 \ 1010 \ 1101 \ 1\bar{1}00).$$

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

0000+
0001+
0100+
1000+
0011+
0110+
1001+
1100+
1011+
1101+
1 полоса

0000+	000 - +
0001+	0 - 00+
0100+	- 000+
1000+	00 - 1+
0011+	01 - 0
0110+	- 001+
1001+	100 - + ✓
1100+	- 100+
1011+	1 - 00+ ✓
1101+	- 011+
	10 - 1+
	1 - 01+
	110 - +
I полоса	II полоса

0000+	000 - +
0001+	0 - 00+
0100+	- 000+
1000+	00 - 1+
0011+	01 - 0
0110+	- 001+
1001+	100 - + ✓
1100+	- 100+
1011+	1 - 00+ ✓
1101+	- 011+ ✓
	10 - 1+ ✓
	1 - 01+ ✓
	110 - + ✓
I полоса	II полоса

0000+	000 - +	
0001+	0 - 00+	- 00 - ✓
0100+	- 000+	- - 00 ✓
1000+	00 - 1+	- 0 - 1 ✓
0011+	01 - 0	1 - 0 - ✓
0110+	- 001+	
1001+	100 - +	
1100+	- 100+	
1011+	1 - 00+	
1101+	- 011+	
	10 - 1+	
	1 - 01+	
	110 - +	
I полоса	II полоса	III полоса

Сокращённая ДНФ данной булевой функции имеет вид:
 $\overline{x}y\overline{w} \vee \overline{y}z \vee \overline{z}w \vee y\overline{w} \vee xz$.

Построим тупиковую и минимальную ДНФ функции f

СДНФ $f = \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} z$. Сокр ДНФ $f = \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{y} z = 1 \vee 2$
(занумеровали слагаемые).

Заполним таблицу покрытий.

	$\bar{x} \bar{y} z$	$\bar{x} y \bar{z}$	$x \bar{y} z$
(1) $\bar{x} y \bar{z}$		1	
(2) $\bar{y} z$	2		2

№ простой импликаты	1	2	3	4	5
простые импликаты	$\overline{\overline{x}}\overline{\overline{y}}\overline{\overline{w}}$	$\overline{\overline{y}}\overline{\overline{z}}$	$\overline{\overline{z}}\overline{\overline{w}}$	$\overline{\overline{y}}\overline{\overline{w}}$	$\overline{\overline{x}}\overline{\overline{z}}$
единичные наборы					
0000		1	1		
0001		1		1	
0011				1	
0100	1		1		
0110	1				
1000		1	1		1
1001		1		1	1
1011				1	
1100			1		1
1101					1

№ простой импликаты	1	2	3	4	5
простые импликаты	$\overline{x}\overline{y}\overline{w}$	$\overline{y}\overline{z}$	$\overline{z}\overline{w}$	$\overline{y}\overline{w}$	$\overline{x}\overline{z}$
единичные наборы					
0000		1	1		
0001		1		1	
0011				1	
0100	1		1		
0110	1				
1000		1	1		1
1001		1		1	1
1011				1	
1100			1		1
1101					1

$$(2 \vee 3) \cdot (2 \vee 4) \cdot 4 \cdot (1 \vee 3) \cdot 1 \cdot (2 \vee 3 \vee 5) \cdot (2 \vee 4 \vee 5) \cdot 4 \cdot (5 \vee 3) \cdot 5.$$

$$(2 \vee 3) \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5 = 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5 \vee 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5.$$

Табличный метод минимизации ДНФ

$\bar{A} \backslash \bar{B}$	\bar{B}	B
\bar{A}	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

$$f(A,B) = \bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B \vee A\bar{B} = \bar{A}(\bar{B} \vee B) \vee \bar{B}(A \vee \bar{A}) = \bar{A} \vee \bar{B}$$

N	A	B	f
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

$A \backslash B$	\bar{B}	B
\bar{A}	1	1
A	1	0

$A \backslash B$	0	1
0	1	1
1	1	0

	X2	
X1	0	1
0	1	0
1	0	0

$$\overline{X_1} \overline{X_2}$$

	X2	
X1	0	1
0	0	0
1	0	1

$$X_1 X_2$$

	X2	
X1	0	1
0	0	0
1	1	0

$$X_1 \overline{X_2}$$

	X2	
X1	0	1
0	1	0
1	1	0

$$\overline{X_2}$$

	X2	
X1	0	1
0	1	1
1	0	0

$$\overline{X_1}$$

	X2	
X1	0	1
0	1	1
1	0	1

$$S_1 \vee S_2 =$$

$$= X_2 \vee \overline{X_1}$$

	x_1	\bar{x}_1
x_2	11	01
\bar{x}_2	10	00

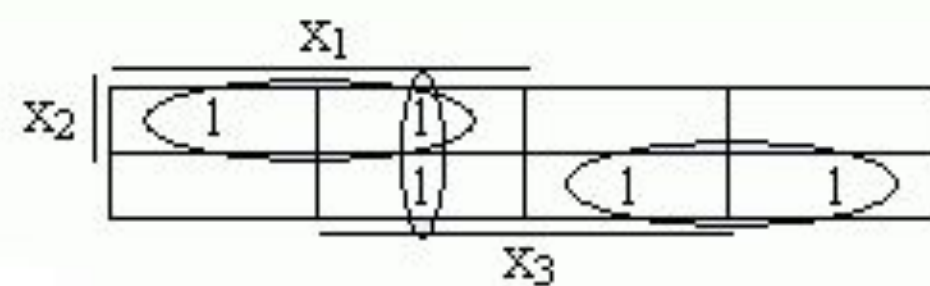
	x_2				
x_1	1100	1101	1001	1000	x_3
	1110	1111	1011	1010	
	0110	0111	0011	0010	
	0100	0101	0001	0000	
	x_4				

	x_1			
x_2	110	111	011	010
	100	101	001	000
	x_3			

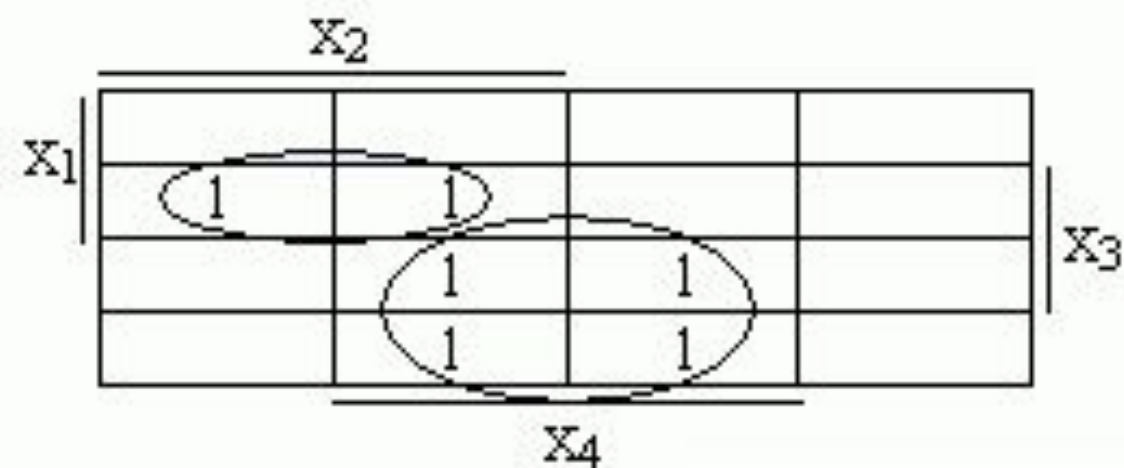
N	A	B	C	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	1	0	1

$$f(A,B,C) = \bar{A}B \vee A\bar{B} \vee \bar{C}$$



$$f = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3.$$



$$f_1 = x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_4.$$

Принципы склейки

- ◆ Склейку клеток карты Карно можно осуществлять по единицам (если необходимо получить ДНФ) Склейку клеток карты Карно можно осуществлять по единицам (если необходимо получить ДНФ) или по нулям (если требуется КНФ)
- ◆ Склеивать можно только прямоугольные области с числом единиц (нулей) 2^n , где n — целое число, при этом рекомендуется брать максимальное из возможных значений n . В некоторых ситуациях в раскладке образуется единица, которую невозможно склеить с какой либо областью. В этом случае единица склеивается «сама с собой».

- ◆ Область, которая подвергается склейке должна содержать только единицы
- ◆ Крайние клетки каждой горизонтали и каждой вертикали также граничат между собой (топологически карта Карно для четырёх переменных представляет собой тор) и могут объединяться в прямоугольники. Следствием этого правила является смежность всех четырёх угловых ячеек карты Карно для $N=4$. Если во всех четырёх угловых ячейках стоят единицы они могут быть объединены в квадрат

- ◆ Все единицы должны попасть в какую-либо область
- ◆ С точки зрения минимальности ДНФ число областей должно быть как можно меньше, а число клеток в области должно быть как можно больше (чем больше клеток в области, тем меньше переменных содержит терм).
- ◆ Одна ячейка карты Карно может входить сразу в несколько областей.

В отличие от СДНФ, ДНФ не единственны. Возможно несколько эквивалентных друг другу ДНФ, которые соответствуют разным способам покрытия карты Карно прямоугольными областями.