Определение. *Булева функция* $f \in P_n$ ***существенно зависит*** *от переменной* x_i, *если существует такой набор значений* $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$, *что*

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

В этом случае x_i *называют* ***существенной переменной***, *в противном случае* x_i *называют* ***несущественной переменной***.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

x_2	x_3	$f(0, x_2, x_3)$	$\neq f(1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

x_1	x_2	$f(x_1, x_2, 0)$	$= f(x_1, x_2, 1)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

x_1 существенная, $f(0, x_2, x_3) \neq f(1, x_2, x_3)$.

x_3 фиктивная, $f(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2, 1)$.

Минимизация нормальных форм

Функция g входит в функцию f если функция g накрывает своими нулями все нули функции f, а единицы f накрываются как нулями, так и единицами. Функция, g входящая в функциюf, называется импликантой этой функции

Булеву функцию g назовем *импликантом* булевой функции f, если для любых наборов из 0 и 1 из равенства $g = 1$ следует равенство $f = 1$.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$g = \overline{x}\, y\, \overline{z}$$

$$g = 1 \qquad x = 0,\ y = 1,\ z = 0.$$

$$f = 1$$

Импликанта E называется *простой*, если при удалении любой буквы из неё она перестаёт быть импликантой булевой функции f.

$$g = \bar{x}\, y\, \bar{z}$$

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

При отбрасывании $\boxed{x}$

$y\bar{z}$, 1 при $y = 1, z = 0$.

$f(1, 1, 0) = 0$

При отбрасывании $\boxed{y}$

$\bar{x}\,\bar{z}$

1 при $x = 0, z = 0$.

$f(0, 0, 0) = 0$

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$g = \overline{x}\, y\, \overline{z}$$

При отбрасывании $\boxed{z}$

1 при $x = 0$, $y = 1$

$f(0, 1, 1) = 0$

Так как при отбрасывании любой переменной функция $g = \overline{x}\, y\, \overline{z}$ перестает быть импликантом функции f, то $g = \overline{x}\, y\, \overline{z}$ является простым импликантом функции f.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$g = x\,\bar{y}\,z$$

$g = 1$ только при $x = 1$

$y = 0$, $z = 1$.

при отбрасывании $\boxed{x}$

$\bar{y}z$ импликант

не является простым.

Сокращённой ДНФ называется ДНФ, состоящая из всех простых импликант данной булевой функции.

Ядровая импликанта — импликанта, удаление которой из ДНФ некоторой булевой функции f приводит к ДНФ, не равносильной f.

Минимальная ДНФ данной функции f — ДНФ, имеющая наименьшее число символов переменных из всех ДНФ, задающих функцию f.

Тупиковой ДНФ функции f называется такая её ДНФ, состоящая из простых импликант, что удаление из неё любой конъюнкции нарушает равносильность ДНФ данной функции.

Сложностью ДНФ (КНФ) называется количество символов переменных, использованных в записи формулы.

Сокращённая ДНФ может быть получена из СДНФ последовательным применением, пока это возможно, формулы *неполного склеивания* $Ku \vee K\bar{u} = Ku \vee K\bar{u} \vee K$, а затем — формулы *поглощения* $Ku \vee K = K$.

Всякая функция реализуется своей сокращенной ДНФ. Для всякой функции, не равной тождественно нулю, существует единственная сокращенная ДНФ.

Теорема Любая переключательная функция равна дизъюнкции своих простых импликант

Теорема Квайна Если в СДНФ ПФ выполнить все операции неполного склеивания, а затем все операции поглощения, то в результате будет получена сокращенная ДНФ, или дизъюнкция ее все простых импликант

Пример

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$\boxed{\bar{x}\bar{y}z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \boxed{x\bar{y}z} = \bar{x}y\bar{z} \vee \cancel{\bar{x}\bar{y}z} \vee \cancel{x\bar{y}z} \vee \bar{y}z = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}z$$

$$\boxed{\overline{xy}z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \boxed{x\bar{y}z} \vee \boxed{\bar{x}yz} =$$

$$= \bar{x}y\bar{z} \vee \boxed{\bar{y}z} \vee \bar{x}yz =$$

$$= \bar{x}y\bar{z} \vee \boxed{xz} \vee x\bar{y}z =$$

$$= \overline{xy}z \vee \overline{xy}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z$$

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

001 +
010

101+ 010 -01

$$f(x, y, z, w) = (1101\ 1010\ 1101\ 1100).$$

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

0000+
—
0001+
0100+
1000+
—
0011+
0110+
1001+
1100+
—
1011+
1101+
I полоса

0000+	000-+
0001+	0-00+
0100+	-000+
1000+	00-1+
0011+	01-0
0110+	-001+
1001+	100-+
1100+	-100+
1011+	1-00+
1101+	-011+
	10-1+
	1-01+
	110-+
I полоса	II полоса

0000+	000-+
	0-00+
	-000+
0001+	00-1+
0100+	01-0
1000+	-001+
	100-+ √
	-100+
	1-00+ √
0011+	-011+ √
0110+	10-1+ √
1001+	1-01+ √
1100+	110-+ √
1011+	
1101+	
I полоса	II полоса

I полоса	II полоса	III полоса
0000+	000-+	
0001+	0-00+	-00- √
0100+	-000+	--00 √
1000+	00-1+	-0-1 √
0011+	01-0	1-0- √
0110+	-001+	
1001+	100-+	
1100+	-100+	
1011+	1-00+	
1101+	-011+	
	10-1+	
	1-01+	
	110-+	

Сокращённая ДНФ данной булевой функции имеет вид: $\bar{x}y\bar{w} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{w} \vee \bar{y}w \vee x\bar{z}$.

Постоим тупиковую и минимальную ДНФ функции f

СДНФ $f = \bar{x}\ \bar{y}\ z \vee \bar{x}\ y\ \bar{z} \vee x\ \bar{y}\ z$. Сокр ДНФ $f = \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \bar{y}\,z = 1 \vee 2$ (занумеровали слагаемые).

Заполним таблицу покрытий.

	$\bar{x}\ \bar{y}\ z$	$\bar{x}\ y\ \bar{z}$	$x\ \bar{y}\ z$
(1) $\bar{x}\,y\,\bar{z}$		1	
(2) $\bar{y}\,z$	2		2

№ простой импликанты	1	2	3	4	5
простые импликанты / единичные наборы	$\bar{x}y\bar{w}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{z}\bar{w}$	$\bar{y}w$	$x\bar{z}$
0000		1	1		
0001		1		1	
0011				1	
0100	1		1		
0110	1				
1000		1	1		1
1001		1		1	1
1011				1	
1100			1		1
1101					1

№ простой импликанты	1	2	3	4	5
простые импликанты / единичные наборы	$\bar{x} y \bar{w}$	$\bar{y} \bar{z}$	$\bar{z} \bar{w}$	$\bar{y} w$	$x \bar{z}$
0000		1	1		
0001		1		1	
0011				1	
0100	1		1		
0110	1				
1000		1	1		1
1001		1		1	1
1011				1	
1100			1		1
1101					1

$$(2 \vee 3) \cdot (2 \vee 4) \cdot 4 \cdot (1 \vee 3) \cdot 1 \cdot (2 \vee 3 \vee 5) \cdot (2 \vee 4 \vee 5) \cdot 4 \cdot (5 \vee 3) \cdot 5.$$

$$(2 \vee 3) \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5 = 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5 \vee 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5.$$

Табличный метод минимизации ДНФ

$\bar{A}$ \ $\bar{B}$	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

$$f(A,B)=\bar{A}\,\bar{B} \vee \bar{A}B \vee A\bar{B}=\bar{A}(\bar{B}\vee B)\vee\bar{B}(\bar{A}\vee A)=\bar{A}\vee\bar{B}$$

N	A	B	f
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

A \ B	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	1	1
A	1	0

A \ B	0	1
0	1	1
1	1	0

X1 \ X2	0	1
0	1	0
1	0	0

$\overline{X_1}\,\overline{X_2}$

X1 \ X2	0	1
0	0	0
1	0	1

$X_1\,X_2$

X1 \ X2	0	1
0	0	0
1	1	0

$X_1\,\overline{X_2}$

X1 \ X2	0	1
0	1	0
1	1	0

$\overline{X_2}$

X1 \ X2	0	1
0	1	1
1	0	0

$\overline{X_1}$

X1 \ X2	0	1
0	1	1
1	0	1

S2

S1

$$S_1 \vee S_2 =$$
$$= X_2 \vee \overline{X_1}$$

	x_1	$\overline{x}_1$
x_2	11	01
$\overline{x}_2$	10	00

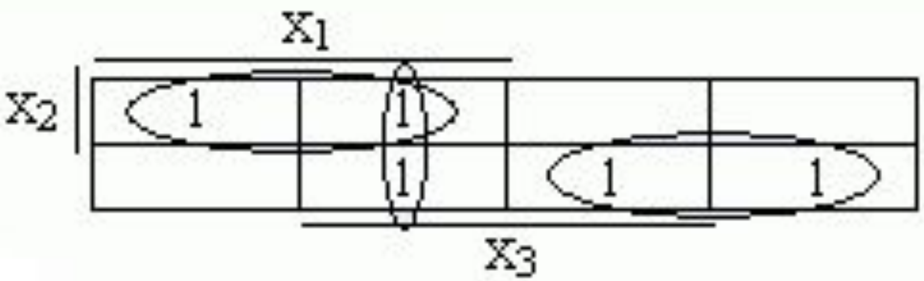
	x_2				
x_1	1100	1101	1001	1000	
	1110	1111	1011	1010	x_3
	0110	0111	0011	0010	
	0100	0101	0001	0000	
		x_4			

	x_1			
x_2	110	111	011	010
	100	101	001	000
		x_3		

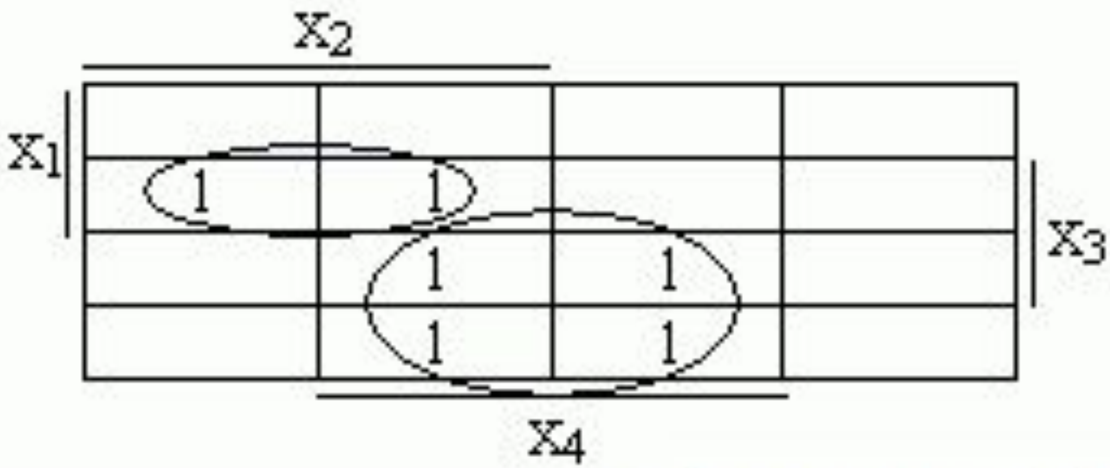
N	A	B	C	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	1	0	1

$$f(A,B,C)=\bar{A}B \vee A\bar{B} \vee \bar{C}$$



$$f = x_1x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1x_3.$$



$$f_1 = x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_4.$$

Принципы склейки

- Склейку клеток карты Карно можно осуществлять по единицам (если необходимо получить ДНФСклейку клеток карты Карно можно осуществлять по единицам (если необходимо получить ДНФ) или по нулям (если требуется КНФ)
- Склеивать можно только прямоугольные области с числом единиц (нулей) 2^n, где n — целое число, при этом рекомендуется брать максимальное из возможных значений n. В некоторых ситуациях в раскладке образуется единица, которую невозможно склеить с какой либо областью. В этом случае единица склеивается «сама с собой».

- Область, которая подвергается склейке должна содержать только единицы
- Крайние клетки каждой горизонтали и каждой вертикали также граничат между собой (топологически карта Карно для четырёх переменных представляет собой тор) и могут объединяться в прямоугольники. Следствием этого правила является смежность всех четырёх угловых ячеек карты Карно для N=4. Если во всех четырёх угловых ячейках стоят единицы они могут быть объединены в квадрат

- Все единицы должны попасть в какую-либо область
- С точки зрения минимальности ДНФ число областей должно быть как можно меньше, а число клеток в области должно быть как можно больше (чем больше клеток в области, тем меньше переменных содержит терм.
- Одна ячейка карты Карно может входить сразу в несколько областей.

В отличие от СДНФ, ДНФ не единственны. Возможно несколько эквивалентных друг другу ДНФ, которые соответствуют разным способам покрытия карты Карно прямоугольными областями.