Действительный анализ

Основной источник : *Смагин В.В. Действительный анализ. Учебное пособие. 2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

1. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

11. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

(продолжение)

Теорема (Лебега) 8. *Пусть последовательность функций* $\{x_n\} \subset L[a,b]$ *такая, что* $x_n(t) \overset{\text{п.в.}}{\to} x(t)$ *при* $n \to \infty$ *и* $(\exists x_0 \in L)(\forall n \in \mathbb{N})[\,|x_n(t)| \overset{\text{п.в.}}{\leq} x_0(t)]$. *Тогда функция* $x \in L$ *и*

$$Ix = \lim_{n\to\infty} Ix_n.$$

Следствие 1. *Пусть функция* $x(t)$ *измерима на* $[a,b]$ *и существует функция* $x_0 \in L[a,b]$ *такая, что* $|x(t)| \leq x_0(t)$ *п.в. на* $[a,b]$. *Тогда* $x \in L[a,b]$.

Примеры

1. Функция $x(t)=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ измерима на отрезке $[0,1]$ как отношение двух измеримых (непрерывных) функций $\sin t$ и $\sqrt{t}$. При этом $|x(t)|\le\frac{1}{\sqrt{t}}=x_0(t)$ на $(0,1]$.

Заметим, что функция $x_0(t)$ является несобственно интегрируемой на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяет условиям теоремы о взаимосвязи несобственной интегрируемости и суммируемости на отрезке $[0,1]$. Следовательно, $x_0\in L[0,1]$. Поэтому, в силу следствия 1 из теоремы Лебега, функция $x(t)=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ суммируема на отрезке $[0,1]$.

2. Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = t^{-\frac{1}{4}} \cos^n t$ на отрезке $[0, \pi]$ и найдем $\lim\limits_{n \to \infty} I x_n$.

Функция $x_n(t)$ измерима на отрезке $[0, \pi]$ как отношение двух измеримых (непрерывных) функций $\cos^n t$ и $t^{\frac{1}{4}}$. При этом $|x_n(t)| \le t^{-\frac{1}{4}} = x_0(t)$ на $(0, \pi]$ при $\forall n$.

Функция $x_0(t)$ является несобственно интегрируемой на отрезке $[0, \pi]$. Следовательно, по теореме о взаимосвязи несобственной интегрируемости и суммируемости, $x_0 \in L[0, \pi]$. Поэтому, в силу следствия 1 из теоремы Лебега, функции $x_n(t)$ суммируемы на отрезке $[0, \pi]$.

Функция $x_0(t)$ является несобственно интегрируемой на отрезке $[0, \pi]$. Следовательно, по теореме о взаимосвязи несобственной интегрируемости и суммируемости, $x_0 \in L[0, \pi]$. Поэтому, в силу следствия 1 из теоремы Лебега, функции $x_n(t)$ суммируемы на отрезке $[0, \pi]$.

Заметим также, что $x_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} x(t) \equiv 0$ почти всюду на $[0, \pi]$.

Итак, выполнены все три условия теоремы Лебега. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} I x_n = I x = 0$.

Глава 2.
Измеримые множества

12. Основные определения и свойства измеримых множеств

Множество $A \subset [a,b]$ называется *измеримым*, если измерима (следовательно, суммируема) характеристическая функция этого множества

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \in [a,b] \backslash A\,. \end{cases}$$

При этом число $I\chi_A = \mu A$ называется *мерой множества* A.

ПРИМЕРЫ

1. $A = [a,b] \Rightarrow \chi_A(t) \equiv 1 \Rightarrow \mu A = I\chi_A = b - a.$

2. A – ММН на $[a,b]$. Тогда $\chi_A(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Следовательно, $\chi_A(t)$ суммируема на $[a,b]$ и $\mu A = I\chi_A = 0$.

Верно и обратное: если $\mu A = 0$, то A – ММН (доказать самостоятельно).

3. A – множество полной меры отрезка $[a,b]$. Тогда $\chi_A(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 1$. Следовательно, $\chi_A(t)$ суммируема на $[a,b]$ и $\mu A = I\chi_A = b - a = \mu[a,b]$.

4. Очевидно, что всякий промежуток $<\alpha,\beta>\subset [a,b]$ является измеримым множеством и его мера равна его длине, то есть $\mu<\alpha,\beta>=\beta-\alpha$.

Простейшие свойства измеримых на $[a, b]$ множеств A и B.

1. *Если $A \subset B$, то $\mu A \leq \mu B$.*

Доказательство. В этом случае верно неравенство $\chi_A(t) \leq \chi_B(t)$ (см. таблицу). По свойству интеграла имеем: $\mu A = I\chi_A \leq I\chi_B = \mu B$.

2. *Если $A \cap B = \varnothing$, то множество $A \cup B$ измеримо и $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$.*

Доказательство следует из равенства $\chi_{A\cup B}(t) = \chi_A(t)+\chi_B(t)$ (см. таблицу) и соответствующего свойства интеграла:

$$\mu(A \cup B) = I\chi_{A\cup B} = I(\chi_A + \chi_B) = I\chi_A + I\chi_B =$$
$$= \mu A + \mu B.$$

	$t \in A \setminus B$	$t \in B \setminus A$	$t \in A \bigcap B$	$t \notin A \bigcup B$
$\chi_A(t)$	**1**	**0**	**1**	**0**
$\chi_B(t)$	**0**	**1**	**1**	**0**
$\chi_{A \setminus B}(t)$	**1**	**0**	**0**	**0**
$\chi_{A \bigcap B}(t)$	**0**	**0**	**1**	**0**
$\chi_{A \bigcup B}(t)$	**1**	**1**	**1**	**0**

3. *Если* $B \subset A$, *то множество* $A \backslash B$ *измеримо и* $\mu(A \backslash B) = \mu A - \mu B$.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \backslash B}(t) = \chi_A(t) - \chi_B(t)$.

4. *Множество* $A \cup B$ *измеримо и* $\mu(A \cup B) \leq \mu A + \mu B$.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \cup B}(t) = \max\{\chi_A(t), \chi_B(t)\}$ и оценки $\max\{\chi_A(t), \chi_B(t)\} \leq \chi_A(t) + \chi_B(t)$.

5. *Множество* $A \cap B$ *измеримо.*

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \cap B}(t) = \min\{\chi_A(t), \chi_B(t)\}$.

6. *Множество* $A \backslash B$ *измеримо.*

Доказательство следует из равенства $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$.

Теорема 10. *Пусть* $\{A_n\}$ – *последовательность измеримых множеств, таких, что* $A_n \subset [a, b]$ *и* $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$. *Тогда множество* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *измеримо и* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Пусть $x_n(t) = \chi_{A_n}(t)$. Последовательность $x_n(t) = \chi_{A_n}(t)$ при всех $t \in [a, b]$ возрастает и ограничена сверху единицей, следовательно, при всех $t \in [a, b]$ существует конечный $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$ и на $[a, b]$ определена функция

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

Покажем, что $x(t) = \chi_A(t)$:

Покажем, что $x(t) = \chi_A(t)$:

$$x(t) = 1 \Leftrightarrow (\exists n_0 : \forall n \geq n_0)[x_n(t) = 1] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists n_0 : \forall n \geq n_0)[t \in A_n] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \Leftrightarrow \chi_A(t) = 1.$$

Итак, $x(t) \equiv \chi_A(t)$ (с учетом того, что эти функции могут принимать только два значения, 1 и 0).

Выполнены все три условия теоремы Лебега о предельном переходе. Следовательно, $x \in L$ и $Ix = \lim_{n\to\infty} Ix_n$, то есть множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо и

$$\mu A = I\chi_A = Ix = \lim_{n\to\infty} Ix_n = \lim_{n\to\infty} I\chi_{A_n} = \lim_{n\to\infty} \mu A_n.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $\{A_n\}$ – *последовательность измеримых множеств, таких, что* $A_n \subset [a,b]$ *и* $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$. *Тогда множество* $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *измеримо и* $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Обозначим множество $[a,b]\backslash A = CA$ (дополнение множества A до отрезка $[a,b]$). Пусть $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ и рассмотрим множество

$$CA = C\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} CA_n.$$

Множества CA_n измеримы и
$CA_1 \subset CA_2 \subset ... \subset CA_n \subset ...$. Следовательно, по теореме 10, множество CA измеримо и

$$\mu(CA) = \lim_{n\to\infty} \mu(CA_n) = \lim_{n\to\infty} \mu([a,b]\backslash A_n) = (b-a) - \lim_{n\to\infty} \mu A_n.$$

Но тогда измеримо и множество $A = C(CA) = [a,b]\backslash CA$, причем $\mu(CA) = (b-a) - \mu A$. Следовательно, $\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$.

Следствие доказано.

Теорема 11. *Пусть* $\{A_n\}$ *– последовательность измеримых множеств, таких, что* $A_n \subset [a, b]$ *и* $A_i \cap A_j = \varnothing \, (i \neq j)$. *Тогда множество* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *измеримо и* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$ определим измеримые множества $D_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$:
$D_1 = A_1,\ D_2 = D_1 \bigcup A_2,\ D_3 = D_2 \bigcup A_3,\ D_4 = D_3 \bigcup A_4,\ \dots$.

Заметим, что $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$.

Тогда по теореме 10 множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ измеримо и $\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu D_n$.

По свойству 2 $\mu D_n = \sum_{k=1}^{n} \mu A_n$.

Следовательно,

$$\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu D_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu A_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_n.$$

Теорема доказана.

Установленное в теореме 11 свойство называют *счетной аддитивностью меры.*

Теорема 12. *Пусть* $\{A_n\}$ – *последовательность измеримых множеств,* $A_n \subset [a,b]$. *Тогда множество* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *измеримо и* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$ определим измеримые множества $D_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$:

$D_1 = A_1$, $D_2 = D_1 \bigcup A_2$, $D_3 = D_2 \bigcup A_3$, $D_4 = D_3 \bigcup A_4$, ...

Заметим, что $D_1 \subset D_2 \subset ... \subset D_n \subset ...$.

Тогда по теореме 10 множество

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ измеримо и $\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu D_n$.

По свойству 4 $\mu D_n \leq \sum_{k=1}^{n} \mu A_n$.

Следовательно,

$$\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu D_n \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu A_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_n.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $\{A_n\}$ *– последовательность измеримых множеств,* $A_n \subset [a,b]$. *Тогда множество* $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *измеримо.*

Доказательство. Обозначим множество $[a,b]\backslash A = CA$ (дополнение множества A до отрезка $[a,b]$). В таком случае, множество

$$CA = C\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} CA_n$$

измеримо. Но тогда измеримо и множество $A = C(CA) = [a,b]\backslash CA$.

Следствие доказано.