

Системы счисления

Тема 1. Введение

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ
(нумерация) – совокупность
способов обозначения натуральных
чисел.

Определения

Система счисления – это способ записи чисел с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:

123, 45678, 1010011, CXL

Цифры:

0, 1, 2, ... I, V, X, L, ...

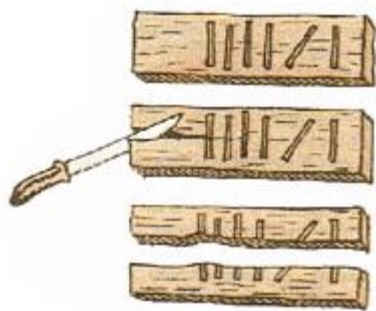
Алфавит – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Типы систем счисления:

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места (*позиции*) в записи числа;
- **позиционные** – зависит...

Непозиционные системы

Унарная – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



Римская:

I – 1 (палец), **V** – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),
X – 10 (две ладони), **L** – 50,
C – 100 (*Centum*), **D** – 500 (*Demimille*),
M – 1000 (*Mille*)

Римская система счисления

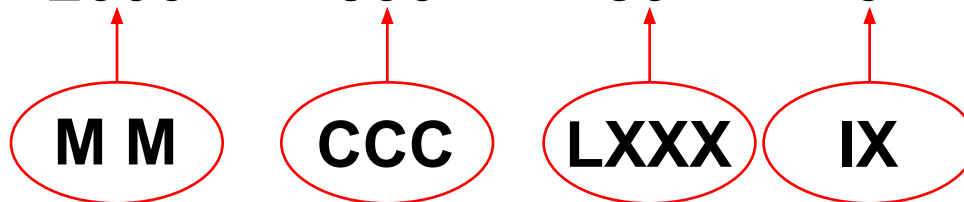
Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично непозиционная!*)

Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$



$$2389 = \text{M M C C C L X X X I X}$$

Примеры:

3768 =

2983 =

1452 =

1999 =

Римская система счисления

Недостатки:

- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (**V**, **X**, **L**, **C**, **D**, **M**)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:
СССLIX + CLXXIV =?

Где используется:

- номера глав в книгах:
- обозначение веков: «**Пираты XX века**»
- циферблат часов



Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)

 аз 1	 вѣди 2	 глаголь 3	 добро 4	 есть 5	 зелѣ 6	 земля 7	 иже 8	 фита 9
 и 10	 како 20	 люди 30	 мыслѣте 40	 наш 50	 кси 60	 ом 70	 покой 80	 червь 90
 рцы 100	 слово 200	 твёрдо 300	 ук 400	 ферт 500	 хер 600	 пси 700	 о 800	 цы 900

Позиционные системы

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Десятичная система:

первоначально – счет на пальцах
изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Основание (количество цифр): 10



Другие позиционные системы:

- двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- шестидесятеричная (1 минута = 60 секунд, 1 час = 60 минут)

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Подготовка к ЕГЭ

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2ⁿ	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

2	8		10	16	
		триады			тетрады
0	0	000	0	0	0000
1	1	001	1	1	0001
10	2	010	2	2	0010
11	3	011	3	3	0011
100	4	100	4	4	0100
101	5	101	5	5	0101
110	6	110	6	6	0110
111	7	111	7	7	0111
1000	10		8	8	1000
1001	11		9	9	1001
1010	12		10	A	1010
1011	13		11	B	1011
1100	14		12	C	1100
1101	15		13	D	1101
1110	16		14	E	1110
1111	17		15	F	1111
10000	20		16	10	

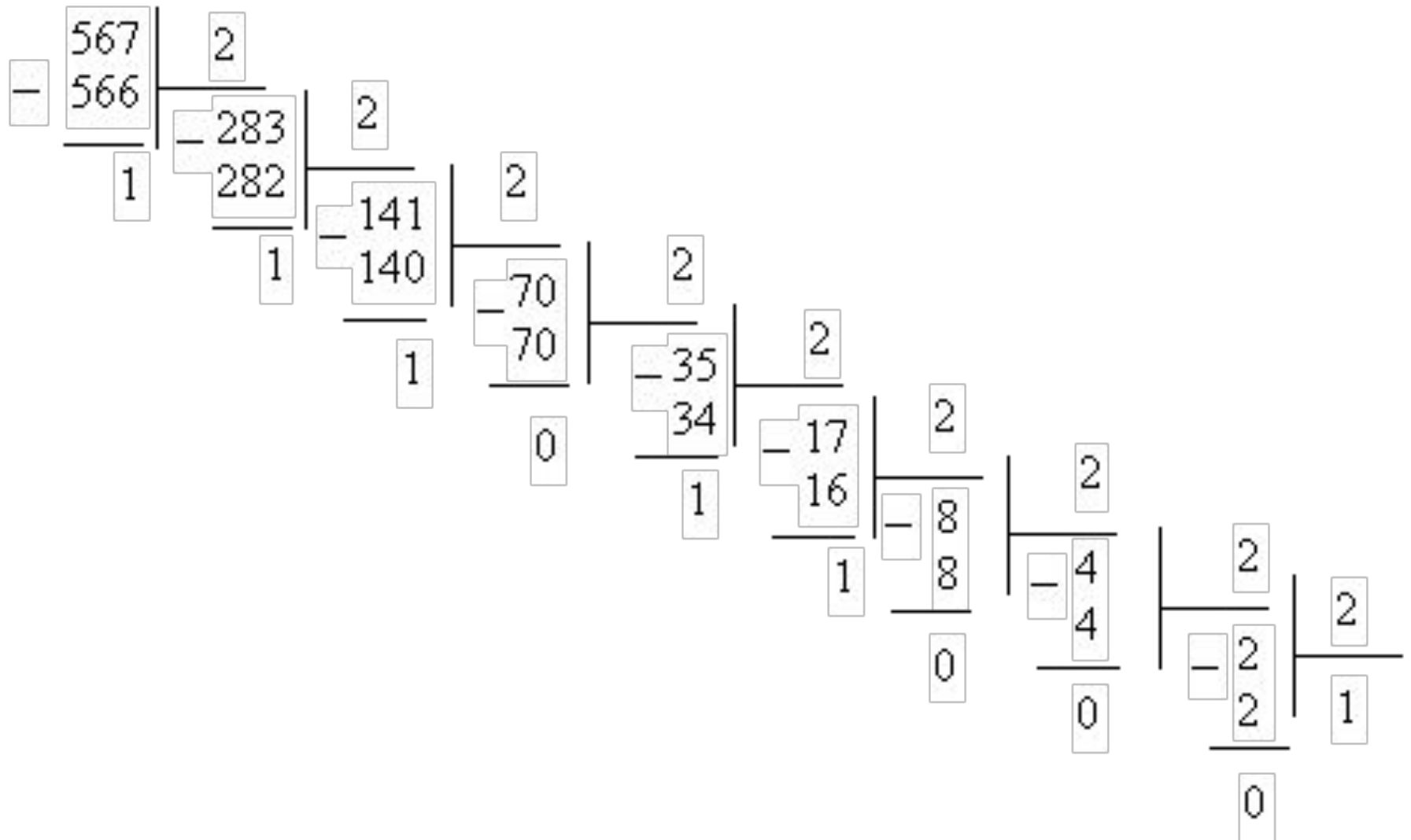
Перевод чисел из одной системы счисления в другую (десятичную)

$$10101101.101_2 = 1*2^7 + 0*2^6 + 1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + \\ + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + \\ + 1*2^{-3} = 173.625_{10}$$

$$703.04_8 = 7*8^2 + 0*8^1 + 3*8^0 + 0*8^{-1} + 4*8^{-2} = 451.0625_{10}$$

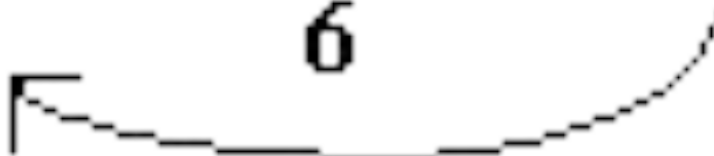
$$B2E.4_{16} = 11*16^2 + 2*16^1 + 14*16^0 + 4*16^{-1} = 2862.25_{10}$$

Перевод чисел из десятичной системы счисления в другую



Перевести

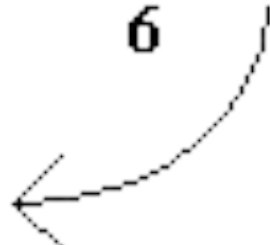
181_{10} в "8" с.с.

$$\begin{array}{r|l} 181 & 8 \\ \hline 176 & 22 \\ \hline 5 & 16 \\ & 2 \\ & \hline & 6 \end{array}$$


Результат: $181_{10} = 265_8$

Перевести 622_{10} в "16" с.с.

→

$$\begin{array}{r|l} 622 & 16 \\ \hline \underline{48} & 38 \\ 142 & \hline \underline{128} & 32 \\ 14 & \mathbf{6} \\ & \hline & \mathbf{2} \end{array}$$


Результат: $622_{10} = 26E_{16}$

Перевод дробей из десятичной системы счисления в другую

Перевести $0.3125_{10} \rightarrow$ "8" с.с.

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{0} & 3125 \times 8 \\ \hline \mathbf{2} & 5000 \times 8 \\ \mathbf{4} & 0000 \end{array}$$

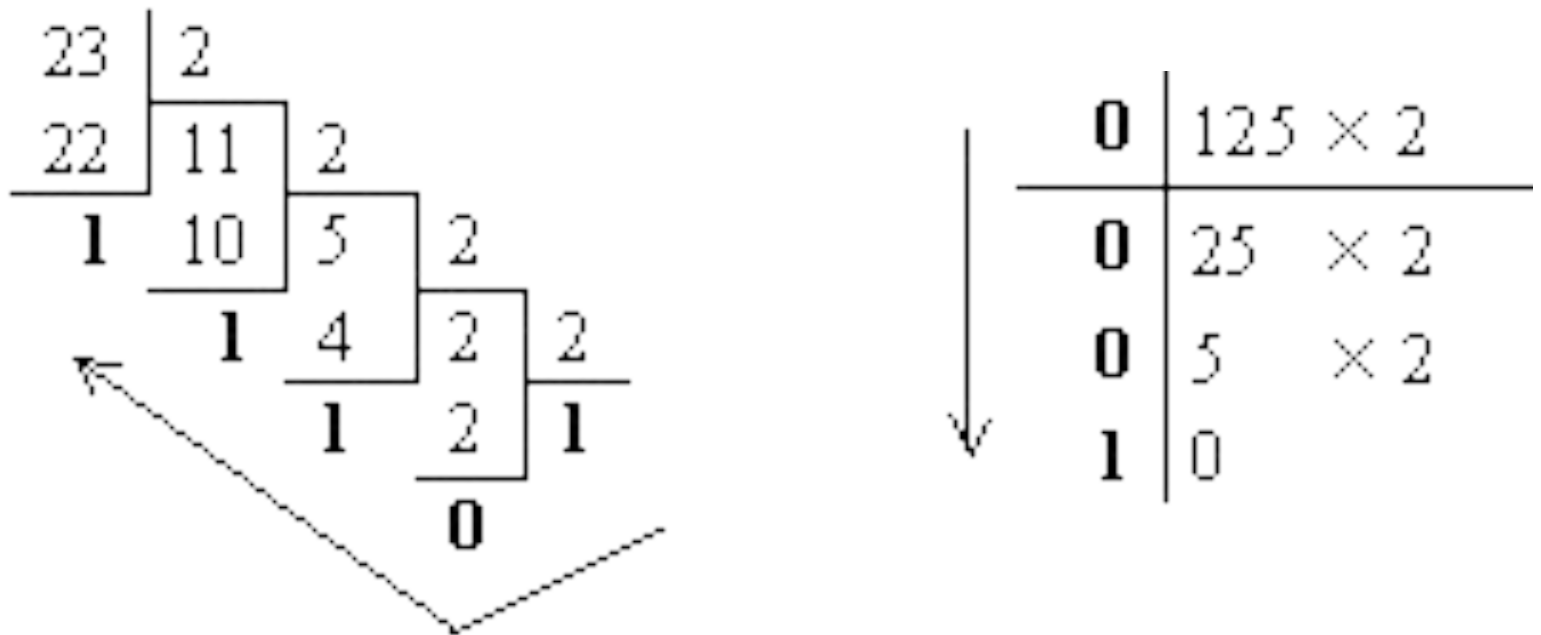
Результат: $0.3125_{10} = 0.24_8$

Перевести $0.65_{10} \rightarrow$ "2" с.с. Точность 6 знаков

	0		65 × 2
	1		3 × 2
	0		6 × 2
	1		2 × 2
→	0		4 × 2
↓	0		8 × 2
↓	1		6 × 2
			...

Результат: $0.65_{10} \quad 0.10(1001)_2$

Перевести $23.125_{10} \rightarrow$ "2" с.с



$$23_{10} = 10111_2; 0.125_{10} = 0.001_2$$

$$\text{Результат: } 23.125_{10} = 10111.001_2$$

Для перевода восьмеричного или шестнадцатеричного числа в двоичную форму

достаточно заменить каждую цифру этого числа соответствующим трехразрядным двоичным числом (триадой) (Таб.) или четырехразрядным двоичным числом (тетрадой) (Таб.), при этом отбрасывают ненужные нули в старших и младших разрядах

Перевести 1101111001.1101_2 "8" \rightarrow с.с.

$$\underbrace{001}_1 \underbrace{101}_5 \underbrace{111}_7 \underbrace{001}_1 . \underbrace{110}_6 \underbrace{100}_4 = 1571.64_8$$

Перевести 1111111011.100111_2 \rightarrow "16" с.с

$$\underbrace{0111}_7 \underbrace{1111}_F \underbrace{1011}_B . \underbrace{1001}_9 \underbrace{1100}_C = 7FB.9C_{16}$$

Перевести $175.24_8 \rightarrow$ "16" с.с

$$\underbrace{1}_{001} \underbrace{7}_{111} \underbrace{5}_{101} . \underbrace{2}_{010} \underbrace{4}_{100}_8 = 1111101.0101_2 = \underbrace{0111}_7 \underbrace{1101}_D . \underbrace{0101}_5_2 = 7D.5_{16}$$

Результат: $175.24_8 = 7D.5_{16}$

Двоичная арифметика

Таблица двоичного сложения	Таблица двоичного вычитания	Таблица двоичного умножения
$0+0=0$	$0-0=0$	$0 \quad 0=0$
$0+1=1$	$1-0=1$	$0 \quad 1=0$
$1+0=1$	$1-1=0$	$1 \quad 0=0$
$1+1=10$	$10-1=1$	$1 \quad 1=1$

×

×

×

×

	← единицы переноса		← единицы переноса
	1 1		1 1 1 1
X=	1101	X=	1101
Y=	+ 101	Y=	+ 101
X+Y=	<u>10010</u>	Z=	+ 111
		X+Y+Z=	<u>11001</u>

$$\begin{array}{r}
 10010 \\
 - 101 \\
 \hline
 01101
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 1001 \\
 \times 101 \\
 \hline
 1001 \\
 1001 \\
 \hline
 101101
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \underline{110001.1} \quad | \quad 1001 \\
 \underline{1001} \quad \quad | \quad 101.1 \\
 \hline
 \quad 1101 \\
 \underline{\quad 1001} \\
 \quad \quad 1001 \\
 \underline{\quad \quad 1001} \\
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Упражнения

1. Перевести следующие числа в десятичную систему счисления:
а) 1101112; б) 10110111.10112; в) 563.448; г) 721.358; д) 1C4.A16; е) 9A2F.B52.
2. Перевести следующие числа из "10" с.с в "2", "8", "16" с.с.:
а) 463; б) 1209; в) 362; г) 3925; д) 11355.
3. Перевести следующие числа из "10" с.с в "2", "8", "16" с.с.
(точность вычислений - 5 знаков после точки):
а) 0.0625; б) 0.345; в) 0.225; г) 0.725; д) 217.375; е) 31.2375; ж) 725.03125; з) 8846.04.

4. Перевести следующие числа в двоичную систему счисления:

а) 1725.326_8 ; б) 341.34_8 ; в) $7BF.52A_{16}$; г) $3D2.C_{16}$.

5. Перевести следующие числа из одной системы счисления в другую:

а) 11011001.01011_2 "8" с.с.;

б) 1011110.1101_2 "8" с.с.;

в) 1101111101.0101101_2 "16" с.с.;

г) $110101000.100101_2 \rightarrow$ "16" с.с.

6. Перевести следующие числа из одной системы счисления в другую:

а) 312.7_8 "16" с.с.; \rightarrow б) 51.43_8 "16" с.с.;

в) $5B.F_{16} \rightarrow$ "8" с.с.; г) $D4.19_{16} \rightarrow$ "8" с.с.

7. Заданы двоичные числа X и Y. Вычислить $X+Y$ и $X-Y$, если:

а) $X=1101001$; $Y=101111$;

б) $X=101110110$; $Y=10111001$;

в) $X=100011001$; $Y=101011$.

8. Заданы двоичные числа X и Y. Вычислить $X*Y$ и X/Y , если:

а) $X=1000010011$; $Y=1011$;

б) $X=110010101$; $Y=1001$;

в) $X=100101.011$; $Y=110.1$;

г) $X=100000.1101$; $Y=101.01$.