

Пример 2.1. Отрезок, соединяющий точки $A(3,2,1)$ и $B(15,6,-1)$, разделен на пять равных частей (рис. 12). Найти координаты точки C_2 .

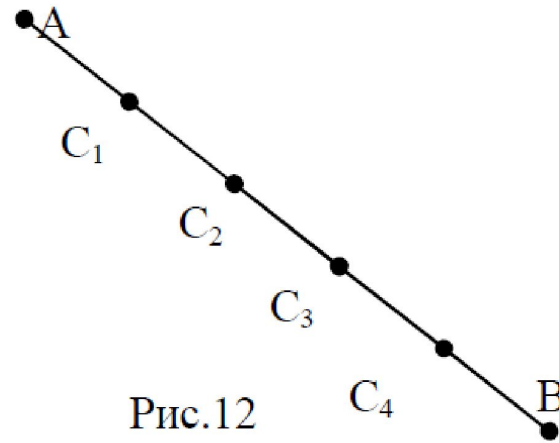


Рис.12

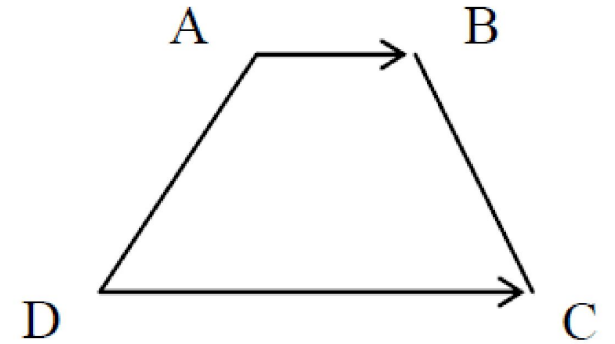


Рис.13

Пример 2.2. В трапеции $ABCD$ (рис. 13) известны координаты трех её вершин $A(1,1,-4)$, $B(3,2,-1)$, $C(4,3,4)$. Найти координаты вершины D , если она лежит в плоскости yoz .

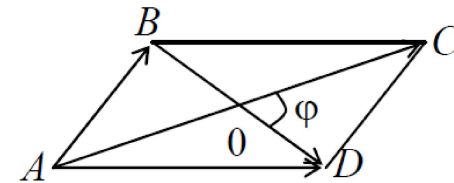
Пример. Проверить, что точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ служат вершинами трапеции.

Указание: проверить коллинеарность векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{DC} .

Пример. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = \{1,3,-2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{4,2,-2\}$. Найти вектор медианы \overrightarrow{BM} .

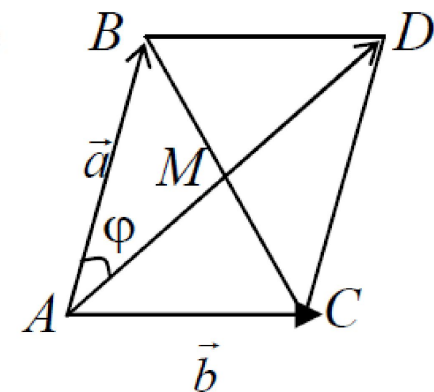
Пример. Даны точки $A(8,-7,-5)$, $B(-1,5,7)$. Найти координаты точек C и D , делящих отрезок AB на три равные части.

Пример 2.4. Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если $A(1,2,0)$, $B(-2,1,1)$, $D(3,-1,3)$.



Пример 2.5. Найти вектор \vec{c} , коллинеарный вектору $\vec{a} = \{1,3,2\}$, если его проекция на вектор $\vec{b} = \{2,1,0\}$ равна $-2\sqrt{5}$.

Пример 2.6. Найти длину медианы AM треугольника ABC и угол φ между медианой AM и стороной AB , если $AB = 10$ см, $AC = 6$ см и $\angle BAC = 60^\circ$.

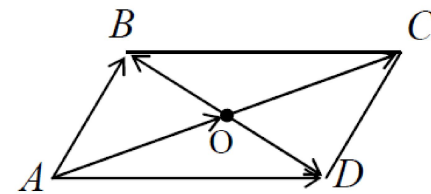


Пример. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти $np_{\vec{a}}\vec{b}$, угол (\vec{a}, \vec{b}) .

Пример. Найти вектор \vec{p} , если $\vec{p} \updownarrow \vec{c}$, $|\vec{p}| = 75$, $\vec{c} = \{16, -15, 12\}$.

Пример 2.9. Вычислить $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

Пример 2.11. Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если $\vec{AC} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{BD} = 4\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$, \vec{e}_1, \vec{e}_2 — единичные векторы и $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{4}$.



Пример 2.12. Найти вектор \vec{c} , перпендикулярный векторам \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k}$, $|\vec{c}| = 3\sqrt{41}$ и вектор \vec{c} образует тупой угол с осью oz .

Пример. Найти высоту AK и площадь треугольника с вершинами $A(2,2,2)$, $B(4,0,3)$, $C(0,1,0)$.

Пример. Найти координаты вектора \vec{x} , если он перпендикулярен векторам $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

Пример 2.13. Вычислить смешанное произведение векторов

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} + 4\vec{k}.$$

Пример 2.14. Проверить, что векторы $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{k}$ некопланарны. Найти объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, и высоту h_a , опущенную из конца вектора \vec{a} .

Пример. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$, $D(3,7,2)$. Найти длину высоты, опущенной на грань $B CD$.

Пример. Показать, что точки $A(5,7,-2)$, $B(3,1,-1)$, $C(9,4,-4)$, $D(1,5,0)$ лежат в одной плоскости.

Пример 3.1. Найти расстояние от точки $P_1(-1,4,5)$ до плоскости, проходящей через точку $P_0(3,-1,0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{N} = \{4,-2,1\}$.

Пример 3.2. Построить плоскости с уравнениями $2x + 3y + 4z = 12$ и $3x + 2y = 6$. Найти угол между этими плоскостями.

Пример 3.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $A(1,2,3)$, $B(0,-2,1)$, $C(-4,-3,2)$.

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,1,1)$ параллельно плоскости $-2x + y - z + 1 = 0$. Вычислить расстояние между этими плоскостями.

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через заданные точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$ перпендикулярно плоскости $x - y + 1 = 0$.

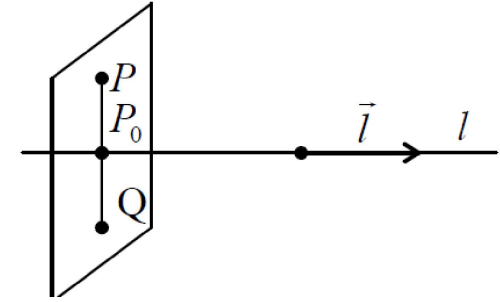
Указание: использовать компланарность векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и нормального вектора \vec{N} заданной плоскости.

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(0,1,2)$ параллельно векторам $\vec{a}_1 = \{2,0,1\}$, $\vec{a}_2 = \{1,1,0\}$. Нарисовать эту плоскость.

Указание: использовать компланарность векторов $\overrightarrow{M_0M}$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 .

Пример 3.4. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$ и прямой $x = 3t - 4$, $y = 4t + 5$, $z = 5t - 1$. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямые.

Пример 3.5. Найти точку Q , симметричную точке $P(2, -5, 7)$ относительно прямой $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{2}$.



Пример 3.6. Записать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями:
$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z - 3 = 0, \\ 2x + 3y - z - 4 = 0. \end{cases}$$

Пример. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(0, -2, 1)$, $M_2(1, 2, 3)$.

Пример. Убедиться, что прямые $l_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{4}$ и $l_2: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 11 = 0 \end{cases}$ параллельны. Написать уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

Указание: найти направляющий вектор прямой l_1 , точку M_2 на прямой l_2 и использовать компланарность векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и \vec{l}_1 .

Пример. Найти проекцию точки $P(1, 0, -2)$ на плоскость $6x + 5y - 7z + 90 = 0$.

Указание: написать уравнение прямой, проходящей через точку P перпендикулярно заданной плоскости, и найти точку пересечения этой прямой и плоскости.

Пример. Убедиться, что прямая $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-8}$ параллельна плоскости $2x - 2y + z + 7 = 0$. Найти расстояние между прямой и плоскостью.

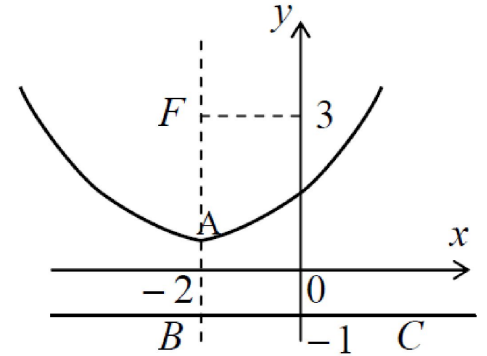
Пример 3.7. Установить, какая линия определяется уравнением $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 17 = 0$, и изобразить ее на чертеже.

Пример 3.8. Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 2y + 5}, \text{ и изобразить ее на чертеже.}$$

Пример 3.9. Построить линию с уравнением $y = 3 - 2\sqrt{2 - x}$. Найти ее фокус.

Пример 3.10. Записать уравнение параболы, если ее фокус $F(-2,3)$, а уравнение директрисы $y = -1$.



Пример. Привести уравнение линии $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y = 36$ к каноническому виду и построить линию. Найти межфокусное расстояние. Записать уравнение асимптот.

Пример. Записать уравнение параболы, если ее фокус $F(-2,3)$, а уравнение директрисы $x = 4$.