Пример 2.1. Отрезок, соединяющий точки $A(3,2,1)$ и $B(15,6,-1)$, разделен на пять равных частей (рис. 12). Найти координаты точки C_2.

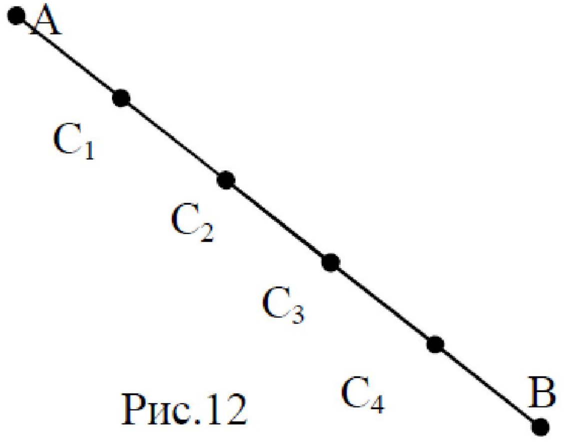


Рис.12

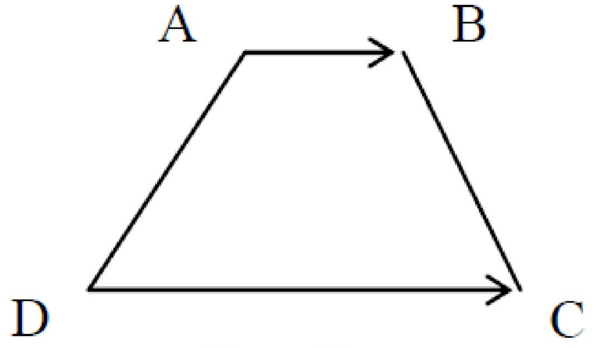


Рис.13

Пример 2.2. В трапеции $ABCD$ (рис. 13) известны координаты трех её вершин $A(1,1,-4), B(3,2,-1), C(4,3,4)$. Найти координаты вершины D, если она лежит в плоскости yoz.

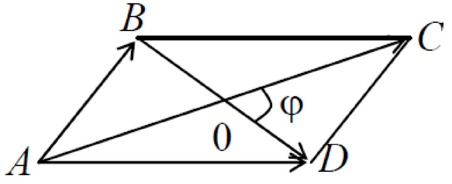
Пример. Проверить, что точки $A(3,-1,2), B(1,2,-1), C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ служат вершинами трапеции.

Указание: проверить коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

Пример. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = \{1,3,-2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{4,2,-2\}$. Найти вектор медианы $\overrightarrow{BM}$.

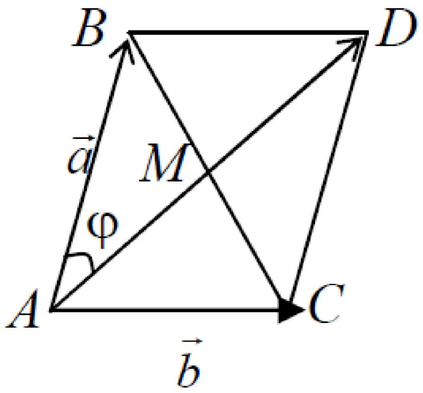
Пример. Даны точки $A(8,-7,-5), B(-1,5,7)$. Найти координаты точек C и D, делящих отрезок AB на три равные части.

Пример 2.4. Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если $A(1,2,0)$, $B(-2,1,1)$, $D(3,-1,3)$.



Пример 2.5. Найти вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{1,3,2\}$, если его проекция на вектор $\vec{b} = \{2,1,0\}$ равна $-2\sqrt{5}$.

Пример 2.6. Найти длину медианы AM треугольника ABC и угол φ между медианой AM и стороной AB, если $AB = 10$ см, $AC = 6$ см и $\angle BAC = 60°$.

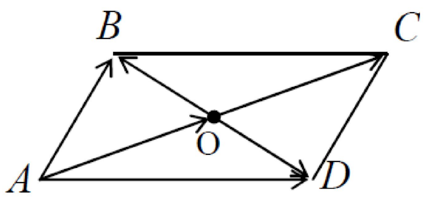


Пример. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти $np_{\vec{a}}\vec{b}$, угол $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Пример. Найти вектор $\vec{p}$, если $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{c}$, $|\vec{p}| = 75$, $\vec{c} = \{16, -15, 12\}$.

Пример 2.9. Вычислить $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j}.$

Пример 2.11. Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если $\overrightarrow{AC} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{BD} = 4\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2, \quad \vec{e}_1, \vec{e}_2$ – единичные векторы и $(\vec{e}_1 \hat{,} \vec{e}_2) = \frac{\pi}{4}.$



Пример 2.12. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k}, \quad |\vec{c}| = 3\sqrt{41}$ и вектор $\vec{c}$ образует тупой угол с осью oz.

Пример. Найти высоту AK и площадь треугольника с вершинами $A(2,2,2), \quad B(4,0,3), \quad C(0,1,0).$

Пример. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если он перпендикулярен векторам $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \ \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10.$

Пример 2.13. Вычислить смешанное произведение векторов

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} + 4\vec{k}.$$

Пример 2.14. Проверить, что векторы $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{k}$ некомпланарны. Найти объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, и высоту h_a, опущенную из конца вектора $\vec{a}$.

Пример. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$, $D(3,7,2)$. Найти длину высоты, опущенной на грань BCD.

Пример. Показать, что точки $A(5,7,-2)$, $B(3,1,-1)$, $C(9,4,-4)$, $D(1,5,0)$ лежат в одной плоскости.

Пример 3.1. Найти расстояние от точки $P_1(-1,4,5)$ до плоскости, проходящей через точку $P_0(3,-1,0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{N}=\{4,-2,1\}$.

Пример 3.2. Построить плоскости с уравнениями $2x+3y+4z=12$ и $3x+2y=6$. Найти угол между этими плоскостями.

Пример 3.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $A(1,2,3)$, $B(0,-2,1)$, $C(-4,-3,2)$.

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,1,1)$ параллельно плоскости $-2x+y-z+1=0$. Вычислить расстояние между этими плоскостями.

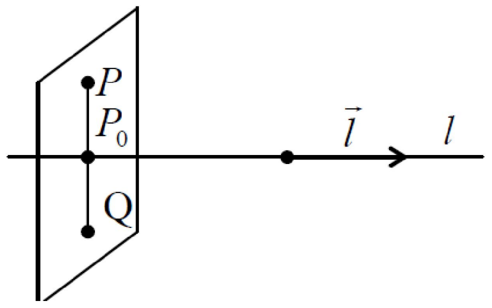
Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через заданные точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$ перпендикулярно плоскости $x-y+1=0$.

Указание: использовать компланарность векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и нормального вектора $\vec{N}$ заданной плоскости.

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(0,1,2)$ параллельно векторам $\vec{a}_1=\{2,0,1\}$, $\vec{a}_2=\{1,10\}$. Нарисовать эту плоскость.

Указание: использовать компланарность векторов $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Пример 3.4. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{2}$ и прямой $x=3t-4$, $y=4t+5$, $z=5t-1$. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямые.



Пример 3.5. Найти точку Q, симметричную точке $P(2,-5,7)$ относительно прямой $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{2}$.

Пример 3.6. Записать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями: $\begin{cases} 3x-2y+2z-3=0, \\ 2x+3y-z-4=0. \end{cases}$

Пример. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(0,-2,1)$, $M_2(1,2,3)$.

Пример. Убедиться, что прямые l_1: $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{4}$ и l_2: $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-11=0 \end{cases}$ параллельны. Написать уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

Указание: найти направляющий вектор прямой l_1, точку M_2 на прямой l_2 и использовать компланарность векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{l}_1$.

Пример. Найти проекцию точки $P(1,0,-2)$ на плоскость $6x+5y-7z+90=0$.

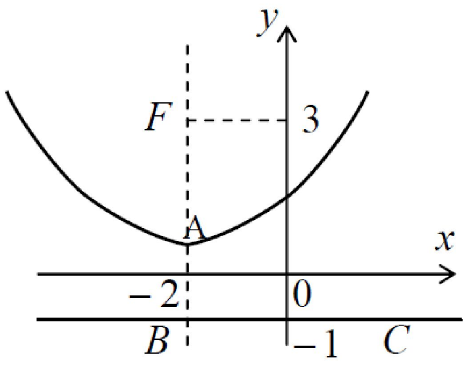
Указание: написать уравнение прямой, проходящей через точку P перпендикулярно заданной плоскости, и найти точку пересечения этой прямой и плоскости.

Пример. Убедиться, что прямая $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-8}$ параллельна плоскости $2x-2y+z+7=0$. Найти расстояние между прямой и плоскостью.

Пример 3.7. Установить, какая линия определяется уравнением $2x^2+3y^2-4x+18y+17=0$, и изобразить ее на чертеже.

Пример 3.8. Установить, какая линия определяется уравнением
$$x=-2-\frac{1}{2}\sqrt{y^2-2y+5}$$, и изобразить ее на чертеже.

Пример 3.9. Построить линию с уравнением $y=3-2\sqrt{2-x}$. Найти ее фокус.



Пример 3.10. Записать уравнение параболы, если ее фокус $F(-2{,}3)$, а уравнение директрисы $y=-1$.

Пример. Привести уравнение линии $9x^2-4y^2-36x-24y=36$ к каноническому виду и построить линию. Найти межфокусное расстояние. Записать уравнение асимптот.

Пример. Записать уравнение параболы, если ее фокус $F(-2{,}3)$, а уравнение директрисы $x=4$.