

**Пример 2.1.** Отрезок, соединяющий точки  $A(3,2,1)$  и  $B(15,6,-1)$ , разделен на пять равных частей (рис. 12). Найти координаты точки  $C_2$ .

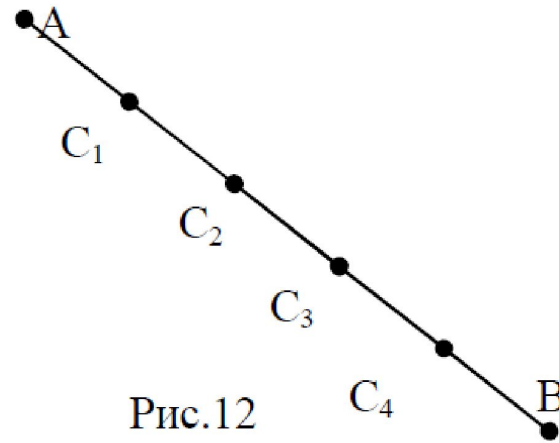


Рис.12

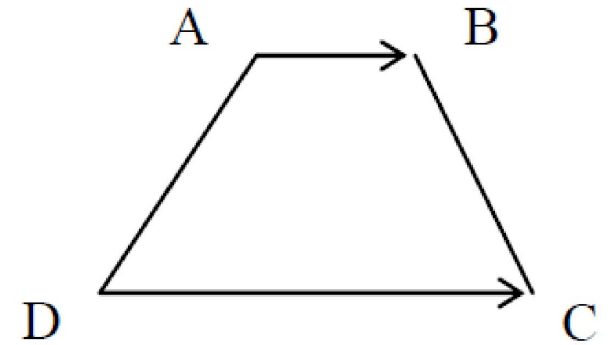


Рис.13

**Пример 2.2.** В трапеции  $ABCD$  (рис. 13) известны координаты трех её вершин  $A(1,1,-4)$ ,  $B(3,2,-1)$ ,  $C(4,3,4)$ . Найти координаты вершины  $D$ , если она лежит в плоскости  $yoz$ .

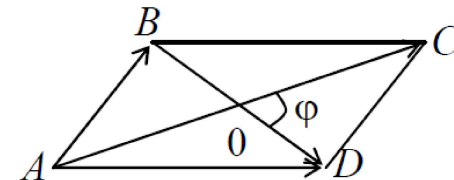
**Пример.** Проверить, что точки  $A(3,-1,2)$ ,  $B(1,2,-1)$ ,  $C(-1,1,-3)$ ,  $D(3,-5,3)$  служат вершинами трапеции.

**Указание:** проверить коллинеарность векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$ .

**Пример.** В треугольнике  $ABC$  даны векторы  $\overrightarrow{AB} = \{1,3,-2\}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \{4,2,-2\}$ . Найти вектор медианы  $\overrightarrow{BM}$ .

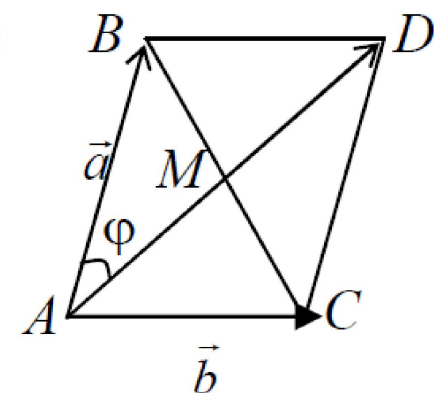
**Пример.** Даны точки  $A(8,-7,-5)$ ,  $B(-1,5,7)$ . Найти координаты точек  $C$  и  $D$ , делящих отрезок  $AB$  на три равные части.

**Пример 2.4.** Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма  $ABCD$ , если  $A(1,2,0)$ ,  $B(-2,1,1)$ ,  $D(3,-1,3)$ .



**Пример 2.5.** Найти вектор  $\vec{c}$ , коллинеарный вектору  $\vec{a} = \{1,3,2\}$ , если его проекция на вектор  $\vec{b} = \{2,1,0\}$  равна  $-2\sqrt{5}$ .

**Пример 2.6.** Найти длину медианы  $AM$  треугольника  $ABC$  и угол  $\varphi$  между медианой  $AM$  и стороной  $AB$ , если  $AB = 10$  см,  $AC = 6$  см и  $\angle BAC = 60^\circ$ .

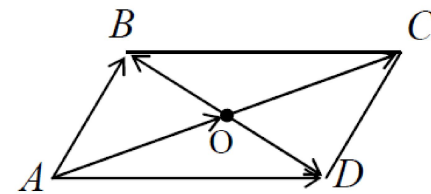


**Пример.** Даны векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ . Найти  $np_{\vec{a}}\vec{b}$ , угол  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Пример.** Найти вектор  $\vec{p}$ , если  $\vec{p} \updownarrow \vec{c}$ ,  $|\vec{p}| = 75$ ,  $\vec{c} = \{16, -15, 12\}$ .

**Пример 2.9.** Вычислить  $\vec{a} \times \vec{b}$ , если  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j}$ .

**Пример 2.11.** Вычислить площадь параллелограмма  $ABCD$ , если  $\overrightarrow{AC} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ,  $\overrightarrow{BD} = 4\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  — единичные векторы и  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{4}$ .



**Пример 2.12.** Найти вектор  $\vec{c}$ , перпендикулярный векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k}$ ,  $|\vec{c}| = 3\sqrt{41}$  и вектор  $\vec{c}$  образует тупой угол с осью  $oz$ .

**Пример.** Найти высоту  $AK$  и площадь треугольника с вершинами  $A(2,2,2)$ ,  $B(4,0,3)$ ,  $C(0,1,0)$ .

**Пример.** Найти координаты вектора  $\vec{x}$ , если он перпендикулярен векторам  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$  и удовлетворяет условию  $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$ .



**Пример 2.13.** Вычислить смешанное произведение векторов

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} + 4\vec{k}.$$

**Пример 2.14.** Проверить, что векторы  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{k}$  некопланарны. Найти объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, и высоту  $h_a$ , опущенную из конца вектора  $\vec{a}$ .

*Пример.* Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами  $A(0,0,1)$ ,  $B(2,3,5)$ ,  $C(6,2,3)$ ,  $D(3,7,2)$ . Найти длину высоты, опущенной на грань  $B CD$ .

*Пример.* Показать, что точки  $A(5,7,-2)$ ,  $B(3,1,-1)$ ,  $C(9,4,-4)$ ,  $D(1,5,0)$  лежат в одной плоскости.

**Пример 3.1.** Найти расстояние от точки  $P_1(-1,4,5)$  до плоскости, проходящей через точку  $P_0(3,-1,0)$  и перпендикулярной вектору  $\vec{N} = \{4,-2,1\}$ .

**Пример 3.2.** Построить плоскости с уравнениями  $2x + 3y + 4z = 12$  и  $3x + 2y = 6$ . Найти угол между этими плоскостями.

**Пример 3.3.** Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки:  $A(1,2,3)$ ,  $B(0,-2,1)$ ,  $C(-4,-3,2)$ .

*Пример.* Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(1,1,1)$  параллельно плоскости  $-2x + y - z + 1 = 0$ . Вычислить расстояние между этими плоскостями.

*Пример.* Написать уравнение плоскости, проходящей через заданные точки  $M_1(1,2,0)$ ,  $M_2(2,1,1)$  перпендикулярно плоскости  $x - y + 1 = 0$ .

*Указание:* использовать компланарность векторов  $\overrightarrow{M_1M}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}$  и нормального вектора  $\vec{N}$  заданной плоскости.

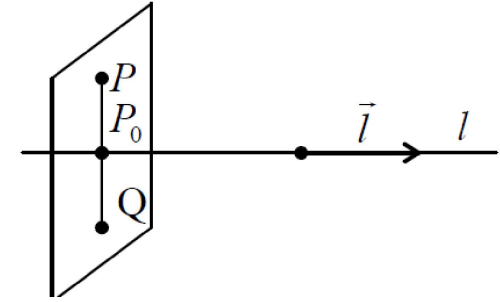
*Пример.* Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(0,1,2)$  параллельно векторам  $\vec{a}_1 = \{2,0,1\}$ ,  $\vec{a}_2 = \{1,1,0\}$ . Нарисовать эту плоскость.

*Указание:* использовать компланарность векторов  $\overrightarrow{M_0M}$ ,  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ .



**Пример 3.4.** Найти угол между прямой  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$  и прямой  $x = 3t - 4$ ,  $y = 4t + 5$ ,  $z = 5t - 1$ . Записать уравнение плоскости, проходящей через прямые.

**Пример 3.5.** Найти точку  $Q$ , симметричную точке  $P(2, -5, 7)$  относительно прямой  $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{2}$ .



**Пример 3.6.** Записать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями: 
$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z - 3 = 0, \\ 2x + 3y - z - 4 = 0. \end{cases}$$

**Пример.** Записать уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1(0, -2, 1)$ ,  $M_2(1, 2, 3)$ .

**Пример.** Убедиться, что прямые  $l_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{4}$  и  $l_2: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 11 = 0 \end{cases}$  параллельны. Написать уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

**Указание:** найти направляющий вектор прямой  $l_1$ , точку  $M_2$  на прямой  $l_2$  и использовать компланарность векторов  $\overrightarrow{M_1M}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}$  и  $\vec{l}_1$ .

**Пример.** Найти проекцию точки  $P(1, 0, -2)$  на плоскость  $6x + 5y - 7z + 90 = 0$ .

**Указание:** написать уравнение прямой, проходящей через точку  $P$  перпендикулярно заданной плоскости, и найти точку пересечения этой прямой и плоскости.

**Пример.** Убедиться, что прямая  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-8}$  параллельна плоскости  $2x - 2y + z + 7 = 0$ . Найти расстояние между прямой и плоскостью.

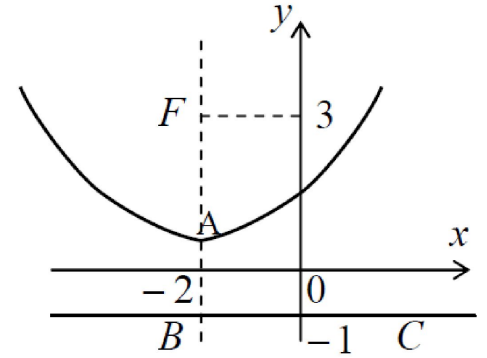
**Пример 3.7.** Установить, какая линия определяется уравнением  $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 17 = 0$ , и изобразить ее на чертеже.

**Пример 3.8.** Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 2y + 5}, \text{ и изобразить ее на чертеже.}$$

**Пример 3.9.** Построить линию с уравнением  $y = 3 - 2\sqrt{2 - x}$ . Найти ее фокус.

**Пример 3.10.** Записать уравнение параболы, если ее фокус  $F(-2,3)$ , а уравнение директрисы  $y = -1$ .



**Пример.** Привести уравнение линии  $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y = 36$  к каноническому виду и построить линию. Найти межфокусное расстояние. Записать уравнение асимптот.

**Пример.** Записать уравнение параболы, если ее фокус  $F(-2,3)$ , а уравнение директрисы  $x = 4$ .