Дистанционный курс высшей математики
НИЯУ МИФИ

3 семестр
Функциональные последовательности и ряды

08.09.21 Лекция 1

Знакопостоянные числовые ряды.

Лектор: Доцент НИЯУ МИФИ, к.ф.-м.н.
Иванова Татьяна Михайловна

Основные определения, примеры

П.1 Понятие числового ряда и его сходимости.

Пусть имеется числовая последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Символ

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

будем называть **числовым рядом**, а элементы последовательности – его **членами**. **Общий член ряда** u_n есть функция натурального аргумента. Рассмотрим теперь последовательность **частичных сумм** ряда (1):

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \ldots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ldots \quad = \{S_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Определение. Если существует конечный или нет предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то он называется **суммой ряда** (1), при этом пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$.

Если $|S| < +\infty$, то ряд (1) называют **сходящимся**, если же $|S| = +\infty$ или не существует, то ряд называют **расходящимся**.

Основные определения, примеры

Пример:

Доказать по определению, что ряд сходится, и вычислить его сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

Решение:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{(2k+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Основные определения, примеры

Пример:

Доказать по определению, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ расходится.

Решение:

Можно указать две подпоследовательности последовательности частичных сумм, имеющие различные пределы: $\begin{cases} S_{2m-1} = -1 \to -1, \\ S_{2m} = 0 \to 0. \end{cases}$ Следовательно, последовательность частичных сумм предела не имеет, и ряд расходится.

Основные определения, примеры

Понятия сходимости ряда и последовательности тесно связаны. Так сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ есть сходимость последовательности его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Верно и обратное. Для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно построить такой ряд, для которого члены этой последовательности являются частичными суммами:

$$
\begin{aligned}
&u_1 = a_1, \\
&u_2 = a_2 - a_1, \\
&\ldots \\
&u_n = a_n - a_{n-1}, \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Тогда частичными суммами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ будут элементы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_2, \ldots, S_n = a_n, \ldots$$

Критерий Коши

Теорема (Критерий Коши).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\Leftrightarrow$ $\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall m > n > N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon\right)$.

Доказательство: следует из связи сходимости ряда со сходимостью последовательности его частичных сумм. По Критерию Коши для последовательностей $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится $\Leftrightarrow$

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall m \geq n > N \Rightarrow \left|S_m - S_n\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall m > n > N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon\right).$$

Следствия критерия Коши

Следствие 1 (Необходимое условие сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \qquad (2)$$

Доказательство: если ряд сходится, то в частности из условия Коши при $m = n+1$ получим, что

$$\left(\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+1} u_k\right| < \varepsilon\right)$$

$$\left(\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow \left|u_{n+1}\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} u_n = 0\right).$$

Таким образом, невыполнение условия (2) гарантирует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Необходимое условие сходимости ряда

Однако выполнения условия $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ не достаточно для того, чтобы обеспечить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пример: гармонический ряд.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$. Для него выполнено необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0.$ Однако, согласно критерию Коши, этот ряд расходится. В самом деле, отрицание условия Коши имеет вид: $\exists\varepsilon>0:\forall N\ \ \exists m>n>N:\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}u_k\right|\geq\varepsilon.$ Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{2}$, рассмотрим любое N, и пусть $n=N+1,\ m=2N+2.$ Очевидно, $m>n>N.$ Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}\right|=\left|\sum_{k=N+2}^{2N+2}\frac{1}{k}\right|=\frac{1}{N+2}+\ldots+\frac{1}{2N+2}>\frac{1}{2N+2}+\ldots+\frac{1}{2N+2}=\frac{N+1}{2N+2}=\frac{1}{2}=\varepsilon.$$

Таким образом, $\exists\varepsilon=\frac{1}{2}:\forall N\ \ \exists m=2N+2>n=N+1>N:\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}\right|\geq\varepsilon.$ Ряд расходится.

Следствия критерия Коши

Определение. Ряд $r_n \overset{def}{=} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ называется ***n*-ым остатком ряда** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Следствие 2. Последовательность остатков $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ является бесконечно малой.

Доказательство: если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, то из условия Коши при переходе $m \to \infty$ получим, что

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |r_n| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} r_n = 0\right).$$

Следствия критерия Коши

Следствие 3. Изменение конечного числа членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ не меняет его сходимости.

Доказательство: Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ получен из $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ изменением конечного числа членов. Тогда найдется такой номер N_1, начиная с которого члены обоих рядов будут неразличимы. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, для него будет выполнено условие Коши, в котором $N = N(\varepsilon)$. Тогда и для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ оно точно будет выполнено, если $\tilde{N} = \max\left(N_1, N(\varepsilon)\right)$:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{N} = \max\left(N_1, N(\varepsilon)\right) : \forall m > n > \tilde{N} \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} \tilde{u}_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon\right) \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$$

сходится.

Замечание. Аналогично можно показать, что изменение конечного числа членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ не меняет его расходимости. Рекомендуется выполнить в качестве упражнения.

Арифметические свойства сходящихся рядов

- Если $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, и его сумма равна S, то $\forall c \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(c \cdot u_k)$ также сходится, причем его сумма равна $c \cdot S$.
- Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся, и их суммы равны соответственно S_u и S_v, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)$ также сходится, и его сумма $S_{u+v} = S_u + S_v$.
- Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(c \cdot u_k)$, где $c \neq 0$, сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство этих утверждений основано на связи сходимости ряда со сходимостью последовательности (частичных сумм) и на арифметических свойствах предела последовательности. Рекомендуется выполнить в качестве упражнения.

П.2 Ряды с неотрицательными членами.

Рассмотрим ряд все члены которого неотрицательны: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n: \quad \forall n \Rightarrow u_n \geq 0$. Такой ряд называется **знакоположительным.** Аналогично можно рассмотреть **знакоотрицательный** ряд, все члены которого неположительны. Оба типа рядов носят название **знакопостоянных (знакоопределенных).** Для таких рядов можно сформулировать особые признаки сходимости. Поскольку конечное число членов ряда не влияет на его сходимость, то логично считать ряд знакопостоянным, если его члены становятся неотрицательными (неположительными) хотя бы начиная с некоторого конечного номера N_0. Далее будем рассматривать только знакоположительные ряды (знакоотрицательные сводятся к ним путем умножения на -1).

Для знакоположительных рядов имеется аналог теоремы о монотонных последовательностях.

Критерий сходимости знакоположительного ряда

Теорема. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами сходится $\Leftrightarrow$ последовательность его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху (т.е. $\exists M > 0 : \forall n \Rightarrow S_n \leq M$).

Доказательство:

$[\Rightarrow]$ Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\Rightarrow \exists$ конечный $\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

$[\Leftarrow]$ Поскольку члены ряда неотрицательны, то $\forall n \Rightarrow S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n \quad \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает и, по условию, ограничена сверху $\Rightarrow \exists$ конечный $\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Замечание.

Очевидно, что расходящийся знакоположительный числовой ряд всегда имеет сумму S, и $S = +\infty$.

Геометрическая прогрессия

Пример.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + \ldots + q^n + \ldots$, $q > 0$.

Замечание. Ради удобства нумерация членов ряда не всегда начинается с единицы, при этом $n -$ой частичной суммой все равно считается сумма всех членов ряда до u_n включительно.

В данном случае

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \; q \neq 1, \\ n + 1, \; q = 1. \end{cases}$$

Отсюда $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ (сходится) при $0 < q < 1$; $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$ (расходится) при $q \geq 1$.

Признаки сравнения

Теорема. Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причем $\forall n \Rightarrow u_n \geq v_n \geq 0$. Тогда

- из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (мажорантный признак)
- из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (минорантный признак)

Доказательство.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\Rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall m > n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| < \varepsilon \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\left| \sum_{k=n+1}^{m} v_k \right| = \sum_{k=n+1}^{m} v_k \leq \sum_{k=n+1}^{m} u_k = \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| < \varepsilon \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходится.}$$

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится $\Rightarrow \left(\exists \varepsilon > 0 : \forall N \ \ \exists m > n > N : \left| \sum_{k=n+1}^{m} v_k \right| \geq \varepsilon \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| = \sum_{k=n+1}^{m} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{m} v_k = \left| \sum_{k=n+1}^{m} v_k \right| \geq \varepsilon \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_n \text{ расходится.}$$

Замечания к признакам сравнения

Замечание 1. Признаки сравнения остаются верными, если соотношение $u_n \geq v_n \geq 0$ становится верным с некоторого конечного номера N_0.

Замечание 2. Признаки сравнения остаются верными, если соотношение $u_n \geq v_n \geq 0$ заменить на $c \cdot u_n \geq v_n \geq 0,\ c > 0.$

Признак сравнения в предельной форме

Теорема.

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причем $\forall n \Rightarrow v_n > 0$, и существует **конечный**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = L > 0. \qquad (3)$$

Тогда оба ряда сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится. Тогда из (3) $\Rightarrow$ для $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - L\right| < \frac{L}{2}$ или

$\frac{L}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3L}{2}$. Значит, $u_n < \left(\frac{3L}{2}\right) \cdot v_n = c \cdot v_n$, $c \neq 0$. По предыдущей теореме и замечанию

2 получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится. Тогда $\left(\frac{2}{L}\right) \cdot u_n = c \cdot u_n > v_n$, $c \neq 0$. По предыдущей теореме и

замечанию 2 получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Теорема (Признак Даламбера в допредельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны: $\forall n \Rightarrow u_n > 0$. Тогда

- если $\forall n \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится,
- если $\forall n \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Доказательство. Пусть $\forall n \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le q < 1$, тогда $\dfrac{u_{n+1}}{u_1} \le q^n \Rightarrow u_{n+1} < q^n \cdot u_1$, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_1 \cdot q^n = u_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $q < 1$. По мажорантному признаку $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Пусть теперь $\forall n \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$, тогда $u_n \ge u_1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n \ge u_1 > 0 \Rightarrow$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Признак Даламбера

Теорема (Признак Даламбера в предельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны: $\forall n \Rightarrow u_n > 0$, и $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$. Тогда

- если $q < 1$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если $q > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится,
- существуют сходящиеся и расходящиеся ряды при $q = 1$.

Доказательство.

Пусть $q < 1$, возьмем ε : $q + \varepsilon < 1$. Для такого ε $\exists N : \forall n > N \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - q \right| < \varepsilon$ или

$q - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q + \varepsilon$. Поскольку выполнено условие $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q + \varepsilon < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по предыдущей теореме (в допредельной форме).

Пусть теперь $q > 1$, возьмем ε : $q - \varepsilon > 1$. Для него $\exists N : \forall n > N \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - q \right| < \varepsilon$ или

$q - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q + \varepsilon$. Поскольку выполнено условие $\frac{u_{n+1}}{u_n} > q - \varepsilon > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится по предыдущей теореме (в допредельной форме).

Признак Даламбера

Пример:

Можно привести примеры сходящихся и расходящихся рядов для случая $q=1$.

Так гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ сходится (см. выше).

При этом $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1}=1.$$

Пример:

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(n^3+1\right)}{n!}$ сходится по признаку Даламбера, т.к.

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\left((n+1)^3+1\right)}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n\left(n^3+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1.$$

Радикальный признак Коши

Теорема (Признак Коши в допредельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ неотрицательны, N_0 – некоторый номер. Тогда

- если $\forall n > N_0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \le q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится,
- если $\forall n > N_0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \ge 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Доказательство. Пусть $\forall n > N_0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \le q < 1$, тогда начиная с N_0 $u_n \le q^n$, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $q < 1$. По мажорантному признаку $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Пусть теперь $\forall n > N_0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \ge 1$, тогда $u_n \ge 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u_n \ge 1 > 0 \Rightarrow$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Радикальный признак Коши

Теорема (Признак Коши в предельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ неотрицательны и $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$. Тогда

- если $q<1$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если $q>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится,
- существуют сходящиеся и расходящиеся ряды при $q=1$.

Доказательство.

Пусть $q<1$, возьмем $\varepsilon:\ q+\varepsilon<1$. Для такого ε $\exists N: \forall n>N \Rightarrow \left|\sqrt[n]{u_n}-q\right|<\varepsilon$ или

$q-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<q+\varepsilon$. Поскольку выполнено условие $\sqrt[n]{u_n}<q+\varepsilon<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по предыдущей теореме (в допредельной форме).

Пусть теперь $q>1$, возьмем $\varepsilon:\ q-\varepsilon>1$. Для него $\exists N: \forall n>N \Rightarrow \left|\sqrt[n]{u_n}-q\right|<\varepsilon$ или

$q-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<q+\varepsilon$. Поскольку выполнено условие $\sqrt[n]{u_n}>q-\varepsilon>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится по предыдущей теореме (в допредельной форме).

Признак Коши

Пример:

Можно привести примеры сходящихся и расходящихся рядов для случая $q = 1$.

Так гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ сходится (см. выше).

При этом $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4n^2-1}} = 1.$

Пример:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(\frac{2n}{3n+4}\right)^n$ сходится по признаку Коши, т.к.

$$q = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4\left(\frac{2n}{3n+4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+4} = \frac{2}{3} < 1.$$

Интегральный признак Коши-Маклорена

Теорема (Признак Коши-Маклорена).

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и не возрастает на $[1;+\infty)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство.

Рассм. $f(x)$ на сегменте $[k-1;k]$. Поскольку $f(x)$ не возрастает $\Rightarrow f(k) \le f(x) \le f(k-1) \Rightarrow f(x)$ ограничена и монотонна (по условию) на $[k-1;k] \Rightarrow$ интегрируема на нем. Имеем $\int_{k-1}^{k} f(k)\,dx \le \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx$ или

$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le f(k-1)$. Просуммируем это неравенство от $k=n+1$ до $k=m$:

$$\sum_{k=n+1}^{m} f(k) \le \int_n^m f(x)\,dx \le \sum_{k=n+1}^{m} f(k-1) = \sum_{k=n}^{m-1} f(k). \qquad (4)$$

Интегральный признак Коши-Маклорена

Напомним, что $$\sum_{k=n+1}^{m} f(k) \le \int_{n}^{m} f(x)\,dx \le \sum_{k=n}^{m-1} f(k). \qquad (4)$$

Пусть $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists A = A(\varepsilon) > 1 : \forall R_2 > R_1 > A \Rightarrow \left| \int_{R_1}^{R_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$

Тогда $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \left[A(\varepsilon) \right] : \forall m > n > N \Rightarrow \left| \int_{n}^{m} f(x)\,dx \right| < \varepsilon. \quad (5)$$

Из (4) и (5) $\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \right| = \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \le \int_{n}^{m} f(x)\,dx = \left| \int_{n}^{m} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

Пусть теперь $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$. Положим в (4) $n = 1$, тогда $S_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} f(k) \ge \int_{1}^{m} f(x)\,dx.$

Перейдем к пределу $m \to +\infty : S = \lim\limits_{m \to +\infty} S_m \ge \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится.

Интегральный признак Коши-Маклорена

Пример: обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ сходится и расходится одновременно с $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}+\infty, & \alpha\le 1,\\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1.\end{cases}$

Таким образом, он сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Пример:

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ сходится и расходится одновременно с $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha}x}=\begin{cases}+\infty, & \alpha\le 1,\\ \frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha>1.\end{cases}$

Таким образом, он сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Пример: Применение признака сравнения в предельной форме.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(e^{1/n}+e^{-1/n}-2\right)$.

Имеем $\sqrt{n}\left(e^{1/n}+e^{-1/n}-2\right)=\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-2\right)\sim\frac{1}{n^{3/2}}$.

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится $\left(\alpha=3/2>1\right)$, то по признаку сравнения исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(e^{1/n}+e^{-1/n}-2\right) \text{ сходится.}$$

Признаки Раабе и Гаусса

Теорема (Признак Раабе в допредельной форме)

Если существует число $r>1$, такое что, начиная с некоторого номера n_0 выполнено неравенство $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geq r$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если же для $n>n_0 \Rightarrow$ $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\leq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится.

Теорема (Признак Раабе в предельной форме)

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right)=r$, то при $r>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если же $r<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится.

Теорема (Признак Гаусса)

Если существуют числа $\alpha,\lambda,\mu>0$ и ограниченная последовательность $\{\vartheta_n\}$, такие что, начиная с некоторого номера n_0 выполнено равенство $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\vartheta_n}{n^{1+\alpha}}$, то при $\lambda>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а при $\lambda<1$, он расходится, если же $\lambda=1$, то при $\mu>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а при $\mu\leq 1$, он расходится.

Применение признаков Раабе и Гаусса

Пример: Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)}\right)^{\beta},\ p,q>0.$$

Решение : Поскольку имеет место

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\frac{q+n}{p+n}\right)^{\beta}=\left(1+\frac{q-p}{p+n}\right)^{\beta}=1+\frac{\beta(q-p)}{p+n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\beta(q-p)$, и ряд по признаку Раабе сходится

при $\beta(q-p)>1$ и расходится при $\beta(q-p)<1$, если же $\beta(q-p)=1$,

то $$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\frac{q+n}{p+n}\right)^{\beta}=\left(1+\frac{q-p}{p+n}\right)^{\beta}=1+\frac{\beta(q-p)}{p+n}+\frac{\theta_n}{n^2}=1+\frac{1}{p+n}+\frac{\theta_n}{n^2}=$$

$$=1+\frac{1}{n\left(1+\frac{p}{n}\right)}+\frac{\theta_n}{n^2}=1+\frac{1}{n}-\frac{p}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\theta_n}{n^2}=1+\frac{1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

и ряд расходится по признаку Гаусса.

Вопросы к экзамену

1) Понятие числового ряда, его сходимости, суммы.
2) Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости.
3) Арифметические свойства сходящихся рядов.
4) Ряды с неотрицательными членами. Критерий сходимости.
5) Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения.
6) Признак Даламбера в допредельной и предельной форме.
7) Признак Коши в допредельной и предельной форме.
8) Признаки Раабе и Гаусса.
9) Интегральный признак Коши-Маклорена.

Лекция 1
«Знакопостоянные числовые ряды»
Завершена.

Спасибо за внимание!