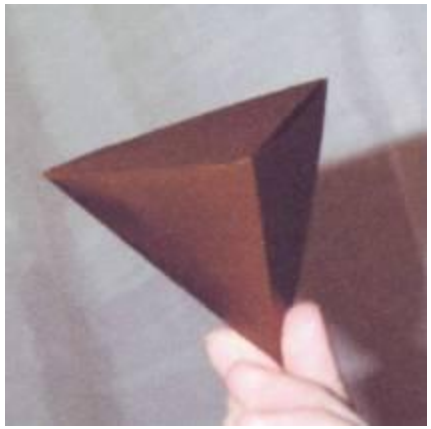
Содержательный подход к измерению количества информации в случае не равновероятностных событий

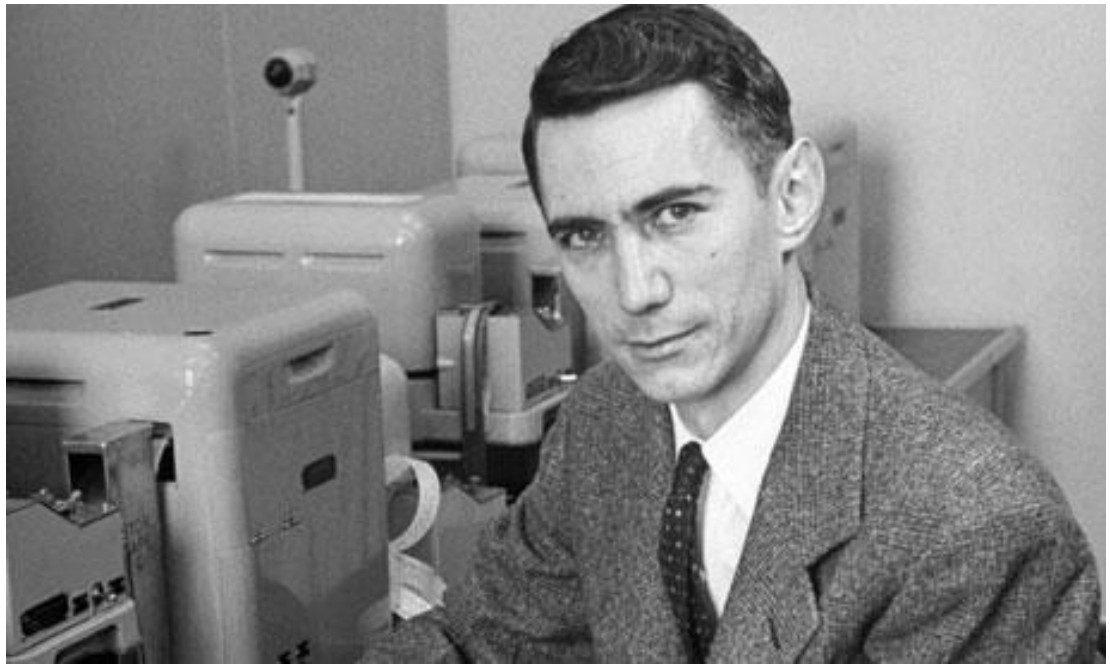
НЕРАВНОВЕРОЯТНЫЕ СОБЫТИЯ



При бросании неравносторонней (несимметричной) четырехгранной пирамиды существуют 4 различных события – выпадение каждой из граней с разной долей вероятности.

Использование формулы Хартли – неправомерно!

В 1948 году американский математик и инженер Клод Шеннон предложил свою формулу вычисления количества информации для событий с различными вероятностями.



Формула Шеннона

$$I = -\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \log_2 p_i$$

где **I** – количество информации, содержащееся в реализации одного из N возможных не равновероятных событий (в битах);

p_i – вероятность отдельных i-х событий;

N – общее количество возможных событий.

Формулы для частного события с номером i для случая не равновероятных событий :

$$N_i = 2^i \qquad N_i = \frac{1}{p_i}$$

N_i – количество возможных вариантов *i*-го события

При решении задач этого типа часто используется частная формула

$$i = \log_2(1/p)$$

где i - это количество информации в одном из *N* событий,

p - вероятность этого события.

Вероятность *i*-го события p_i выражается в долях единицы и вычисляется по формуле:

$$p_i = K / N$$

где К - величина, показывающая, сколько раз произошло интересующее нас событие,
N - общее число возможных исходов какого-то процесса.

Задача 1.

В корзине находятся 20 грибов. Из них 15 груздей и 5 волнушек. Какое количество информации несет сообщение о том, что достали:

а) груздь; б) волнушку.

Решение:

1. Найдем вероятность того, что достали груздь: $\mathbf{p_{гр} = 15 / 20 = 0,75}$;
2. Найдем вероятность того, что достали волнушку: $\mathbf{p_{в} = 5 / 20 = 0,25}$.
3. Найдем количество информации в сообщении о вытаскивании груздя:

$i_{гр} = \log(1/ p_{гр}) = \log(1/0,75) = \log_2 1,3 = 1,15470$ бит.

4. Найдем количество информации в сообщении о вытаскивании волнушки:

$i_{в} = \log(1/ p_{в}) = \log(1/0,25) = 1og_2 4 = 2$ бит

Ответ: количество информации в сообщении о том, что из корзины достали груздь, равно 1,1547 бит. Количество информации в сообщении о том, что достали волнушку, равно 2

Задача 1.
В корзине находятся 20 грибов. Из них 15 груздей и 5 волнушек. Какое количество информации несет сообщение о том, что достали:
а) груздь; б) волнушку.

Ответ: количество информации в сообщении о том, что из корзины достали груздь, равно 1,1547 бит. Количество информации в сообщении о том, что достали волнушку, равно 2 бит.

Проанализировав решение задачи, можно сделать вывод: чем меньше вероятность свершения события (волнушек в корзине меньше, чем груздей), тем больше количество информации содержится в этом событии.

Задача 2. В озере обитает 1250 окуней, пескарей – в 2 раза больше, а карасей и щук поровну и в 2 раза меньше, чем окуней. Сколько информации мы получим, когда поймаем какую-нибудь рыбу.

Решение:

1. Найдем общее количество рыб в озере:

$$K = 1250 + 2500 + 2 \cdot 625 = 5000.$$

2. Найдем вероятность попадания на удочку каждого вида рыб:

$$p_о = 1250/5000 = 0,25$$

$$p_к = 2500/5000 = 0,5$$

$$p_п = 625/5000 = 0,125$$

$$p_щ = 625/5000 = 0,125$$

3. Найдем количество информации:

$$I = -(0,25 \cdot \log_2 0,25 + 0,5 \cdot \log_2 0,5 + 0,125 \cdot \log_2 0,125 + 0,125 \cdot \log_2 0,125) = 1,75 \text{ бит.}$$

Ответ: мы получим 1,75 бит информации.

Задача 3. (работа в парах самостоятельно, затем проверка ответа и разбор решения)

В корзине лежат шары: синие, красные, белые, зеленые, всего 32 шара. Сообщение о том, что вынули синий шар, несет 2 бит информации. Синих шаров было в 2 раза меньше, чем красных, белых и зеленых – поровну. Сколько шаров каждого цвета было в корзине?

Решение:

В задаче имеют место события не равновероятностные. Используем следующие формулы: $\mathbf{N_i = 2^i}$ $\mathbf{N_i = \mathit{1} / p_i}$

Из условия задачи $i_c = 2$ бит. Находим p_c.

$p_c = 1 / N_c$ $N_c = 2^{ic}$ $N_c = 2^2 = 4$ $p_c = 1 /4$

С другой стороны вероятность того, что вынули синий шар, равна $p_c = k_c / N$ (k_c – количество синих шаров, N – всего шаров в корзине).

Находим k_c. Затем определяем количества остальных шаров.

$k_c / 32 = 1 / 4$ $k_c = 8$ $k_{кр} = 2 * k_c = 16$ $k_з = k_б = (32 – 16 – 8) / 2 = 4$

Ответ: в корзине синих шаров – 8, красных – 16, белых и зеленых – по 4 шт.

Задача 4. (работа в парах самостоятельно, затем проверка ответа и разбор решения)

На уроке математики Незнайку вызывают к доске в 4 раза реже, чем Винтика. Определить количество информации в сообщении о том, что к доске вызвали Винтика, если сообщение о том, что вызвали Незнайку, несет 8 бит информации.

Решение.

По условию задачи дано: $i_н = 8$ бит $P_в = 4 * p_н$

Находим вероятность того, что к доске вызвали Незнайку:

$N_н = 2^{iн}$ $N_н = 2^8 = 256$ $p_н = 1 / 256$

Находим вероятность того, что к доске вызвали Винтика, а затем - количество информации в сообщении о том, что к доске вызвали Винтика:

$P_в = 4 * p_н$ $P_в = 4 * 1 / 256 = 1 / 64$

$N_в = 1 / P_в$ $N_в = 1 / (1 / 64) = 64 = 2^6$ $i_в = 6$ (бит)

Ответ: количество информации в сообщении о том, что к доске вызвали Винтика, равно 6 бит.

Домашнее задание

За четверть ученик получил 100 оценок. Сообщение о том, что он получил «пять», несет 2 бита информации. Сколько пятерок получил ученик за четверть?