# Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций

- Интегрирование тригонометрических функций
- Интегрирование иррациональных функций

# Интегрирование тригон. функций

## Универсальная тригонометрическая подстановка

Функцию с переменными sin x и cos x, над которыми выполняются рациональные действия принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$

Знак рациональной функции

Вычисление интегралов типа:

$$\int R(\sin x; \cos x)\, dx$$

сводится к вычислению интегралов от рациональной функции с помощью подстановки, которую называют универсальной:

$$tg\,\frac{x}{2} = t \quad \Rightarrow \quad x = 2arctg\ t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

# Интегрирование тригонометрических функций

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от вида подынтегральной функции $R(\sin x; \cos x)$

- Если функция нечетна относительно *sin x*, то есть:

$$R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$$

то применяется подстановка *cos x = t.*

- Если функция нечетна относительно *cos x*, то есть:

$$R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$$

то применяется подстановка *sin x = t.*

- Если функция четна относительно *cos x и sin x*, то есть:

$$R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$$ тогда:

$$\boxed{tgx = t \Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; dx = \frac{dt}{1+t^2}}$$

# Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \left| \begin{matrix} tg\,\dfrac{x}{2}=t; & \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}; & dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{\dfrac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}\cdot\left(1+t^2\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1|+C = \boxed{\ln\left|tg\,\frac{x}{2}+1\right|+C}$$

# Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы типа: $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

Используются следующие подстановки:

- Если $n$ – целое положительное нечетное число: $\sin x = t$
- Если $m$ – целое положительное нечетное число: $\cos x = t$

В этих двух случаях можно также произвести «отщепление» одной из нечетных степеней с последующим внесением под знак дифференциала.

- Если $m$ и $n$ - целые неотрицательные четные числа, то применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

- Если $m + n$ - отрицательное четное целое число, то применяется подстановка: $\mathrm{tg}\, x = t$

# Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin^7 x \cos^3 x dx = \int \sin^7 x \boxed{\cos^2 x} \cos x dx =$$

$$\int \sin^7 x(1-\sin^2 x)d(\sin x) = \int (\sin^7 x - \sin^9 x)d(\sin x) =$$

$$\boxed{1-\sin^2 x}$$

$$= \boxed{\frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + C}$$

$$\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx +$$

$$\frac{1}{8}\int \left(1+\cos 4x\right)dx = \boxed{\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 2x + C}$$

# Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы типа:

$$\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx; \quad \int \cos ax \cdot \cos bx\, dx; \quad \int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$$

Вычисляются с помощью формул тригонометрии:

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = 0.5(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = 0.5(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = 0.5(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\int \sin 8x \cos 2x dx = \ 0.5\int (\sin 10x + \sin 6x)\, dx =$$

$$0.5(-\frac{1}{10}\cos 10x - \frac{1}{6}\cos 6x) + C =$$

$$\boxed{-\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{12}\cos 6x + C}$$

# Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций, которые с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной.

- Интегралы вида: $\int R(x, \sqrt[m]{x^{\alpha}}, \sqrt[n]{x^{\beta}})dx$

сводятся к интегралу от рациональной функции подстановкой

$x = t^N$ где $N$ – наименьшее общее кратное *(НОК)* значений $m$ и $n$.

- Интегралы вида: $\int R\left(x, \sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}}, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}}\right)dx$

где $a, b, c, d$ – постоянные, приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки:

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$ где $N$ – наименьшее общее кратное $m$ и $n$.

# Интегрирование иррациональных функций

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+4} = \begin{bmatrix} НОК(2;4)=4 \\ x=t^4 \\ dx=4t^3dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3dt}{t^3+4} =$$

$$= 4\int \frac{t^5dt}{t^3+4} = \left( \begin{array}{r|l} -\ t^5 & t^3+4 \\ \underline{t^5+4t^2} & t^2 \\ -4t^2 & \end{array} \right) = 4\int \left( t^2 - \frac{4t^2}{t^3+4} \right) dt$$

$$= 4\int t^2dt - \frac{16}{3}\int \frac{d(t^3+4)}{t^3+4} = \frac{4}{3}t^3 - \frac{16}{3}\ln\left|t^3+4\right| + C =$$

$$= \boxed{\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{16}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+4\right| + C}$$

# Интегрирование иррациональных функций

- Иррациональные функции вида: $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

выделением полного квадрата сводятся к 3-м видам функций, для каждой, из которой применяется свой вид подстановки:

1) $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ подстановка: $x = a \cdot \sin t$

2) $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ подстановка: $x = a \cdot tg\ t$

3) $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ подстановка: $x = \dfrac{a}{\cos t}$

# Интегрирование иррациональных функций

$$\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{3-(x^2+2x)}\,dx=\int\sqrt{4-(x+1)^2}\,dx$$

$$=\begin{bmatrix}u=x+1\\du=dx\end{bmatrix}=\int\sqrt{4-u^2}\,du=\begin{bmatrix}u=2\sin t\\du=2\cos t\,dt\end{bmatrix}=$$

$$=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt=\int 2\sqrt{\cos^2 t}\cdot 2\cos t\,dt=$$

$$=4\int\cos^2 t\,dt=4\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=2t+\sin 2t+C=$$

$$\Bigg[\sin t=\frac{u}{2}\Rightarrow\sin 2t=2\sin t\cos t=u\sqrt{1-\frac{u^2}{4}}=\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}$$

$$t=\arcsin\frac{x+1}{2}\Bigg]=\boxed{2\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+C}$$

# Интегрирование иррациональных функций

- Интегралы вида: $\int x^m (ax^n + b)^p dx \quad m, n, p \in R$

Сводятся к интегралам от рациональных функций в трех случаях;:

**1)** $p \in Z$ получается интеграл, рассмотренный в первом пункте.

**2)** $\dfrac{m+1}{n} \in Z$ подстановка: $ax^n + b = t^s$

*Знаменатель дроби p*

**3)** $\dfrac{m+1}{n} + p \in Z$ подстановка: $a + bx^{-n} = t^s$

*Знаменатель дроби p*

# Интегрирование иррациональных функций

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} m = -\frac{2}{3};\ n = \frac{1}{3};\ p = \frac{1}{2}; \quad \frac{m+1}{n} = 1 \in Z \\ 1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2; \quad x = \left(t^2-1\right)^3;\ dx = 3\left(t^2-1\right)^2 \cdot 2tdt \end{array} \right] =$$

$$\int \left(\left(t^2-1\right)^3\right)^{-\frac{2}{3}}(t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 3(t^2-1)^2 \cdot 2tdt = 6\int t^2\, dt =$$

$$= 2t^3 + C = \boxed{2\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\right)^3 + C}$$