Решение простейших тригонометрических уравнений

Чтобы решать простейшие тригонометрические уравнения, нужно уметь:

- Отмечать точки на числовой окружности
- Определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для табличных точек
- Знать понятие обратных тригонометрических функций и определять их значения

Повторите

arcsin a	Если $\lvert a\rvert \le 1$, то arcsina=t $\Leftrightarrow$ arcsin (-a)=-arcsin a	$\begin{cases} \sin t = a, \\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
arccos a	Если $\lvert a\rvert \le 1$, то arccos a=t $\Leftrightarrow$ arccos (-a)=π-arccos a	$\begin{cases} \cos t = a, \\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$
arctg a	arctg a=t $\Leftrightarrow$ arctg (-a)=-arctg a	$\begin{cases} tg\, t = a, \\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
arcctg a	arcctg a=t $\Leftrightarrow$ arcctg (-a)=π-arcctg a	$\begin{cases} ctg\, t = a, \\ 0 < t < \pi \end{cases}$

Повторите

Функция	Аргумент																
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$tg\ t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$cgt\ t$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Простейшие тригонометрические уравнения и шаблоны их решений

Уравнение	Шаблон для ответа
$sinx = a,$ $-1 \le a \le 1$	$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi \cdot k, \quad k \in Z$
$cosx = a,$ $-1 \le a \le 1$	$x = \pm arccosa + 2\pi \cdot k, \quad k \in Z$
$tgx = a,$	$x = arctga + \pi \cdot k, \quad k \in Z$
$ctgx = a,$	$x = arcctga + \pi \cdot k, \quad k \in Z$

Перепишите шаблоны в блокнот

Примеры решений уравнений с синусом

Пример	Ответ (смотри шаблон)	Комментарий
$sinx = \frac{1}{2},$	$x = (-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{2} + \pi \cdot k =$ $= (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, \quad k \in Z$	$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ по тригонометрический таблице! (слайд 4)
$sinx = \frac{-1}{2},$	$x = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi \cdot k$ $= (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k,$ $k \in Z$	$(-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = (-1)^k \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{6} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6}$ по тригонометрический таблице! (слайд 4)
$sinx = \frac{1}{3},$	$x = (-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{3} + \pi \cdot k,$ $k \in Z$	$\arcsin\frac{1}{3}$ не досчитываем, т.к. значение не табличное
$sinx = 1{,}3$	Решений нет	Решений нет, т.к. 1,3 >1

Примеры решений уравнений с косинусом

Пример	Ответ (смотри шаблон)	Комментарий
$cosx = \frac{1}{2},$	$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi \cdot k =$ $= \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k, \quad k \in Z$	$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ по тригонометрический таблице! (слайд 4)
$cosx = \frac{-1}{2},$	$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi \cdot k =$ $= \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k, \quad k \in Z$	$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ по тригонометрический таблице! (слайд 4)
$cosx = \frac{1}{3},$	$x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi \cdot k,$ $k \in Z$	$\arccos\frac{1}{3}$ не досчитываем, т.к. значение не табличное
$cosx = -1{,}7$	Решений нет	Решений нет, т.к. -1,7< -1

Решение уравнений с тангенсом и котангенсом

Пример	Ответ (смотри шаблон)	Комментарий
$tgx = 1$	$x = arctg1 + \pi \cdot k = = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k, \quad k \in Z$	$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ по тригонометрический таблице! (слайд 4)
$ctgx = -1,$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi \cdot k, \quad k \in Z$	$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ по тригонометрический таблице! (слайд 4)
$tgx = 3,$	$x = arctg3 + \pi \cdot k,$ $k \in Z$	На тангенс ограничений нет
$ctgx = -2$	$x = \pi - arcctg2 + \pi \cdot k,$ $k \in Z$	На котангенс ограничений нет И есть свойство $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg}(a)$ (слайд 3)

Частные случаи для синуса

Уравнение	Ответ
$sinx = 0$	$x = \pi k, k \in Z$
$sinx = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
$sinx = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Перепишите частные случаи в блокнот

Частные случаи для косинуса

Уравнение	Ответ
$cosx = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
$cosx = 1$	$x = 2\pi k, k \in Z$
$cosx = -1$	$x = \pi + 2\pi k, k \in Z$

Решение уравнений с синусом с использованием шаблона

Пример	Решение	Комментарий
$\sin(3x) = \frac{1}{2}$	$3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, \ \ k \in Z$ $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi \cdot k}{3}, \ \ k \in Z$	Сначала решаем по шаблону, потом делим обе части на 3

Решение уравнений с косинусом с использованием шаблона

Пример	Решение	Комментарий
$\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$	$2x+\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot k,\quad k\in Z$ 1) $2x_1+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot k,\quad k\in Z$ $2x_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot k,\quad k\in Z$ $2x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot k,\quad k\in Z$ $\boldsymbol{x_1=\frac{\pi}{12}+\pi\cdot k,\quad k\in Z}$ 2) $2x_2+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot k,\quad k\in Z$ $2x_2=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot k,\quad k\in Z$ $2x_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k,\quad k\in Z$ $\boldsymbol{x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in Z}$	Сначала решаем уравнение по шаблону, затем решаем как два уравнения (одно с плюсом, другое с минусом), ответом будет два семейства решений (выделены жирным шрифтом)

Решение уравнений с косинусом с использованием шаблона

Пример	Решение	Комментарий
$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$	$2x+\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi\cdot k,\quad k\in Z$ $2x=\pi-\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot k,\quad k\in Z$ $2x=\frac{3\pi}{4}+2\pi\cdot k,\quad k\in Z$ $x=\frac{3\pi}{8}+\pi\cdot k,\quad k\in Z$	Это частный случай (слайд 9). Записываем ответ по частному случаю относительно аргумента (то, что в скобках).переносим $\frac{\pi}{4}$ в правую часть, приводим к общему знаменателю и делим обе части на 2, чтобы найти x

Решение уравнений с тангенсом с использованием шаблона

Пример	**Решение**	**Комментарий**
$tg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$	$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+\pi\cdot k,\ \ k\in Z$ $2x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\pi\cdot k,\ \ k\in Z$ $2x=\frac{\pi}{12}+\pi\cdot k,\ \ k\in Z$ $x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi\cdot k}{2},\ \ k\in Z$	Сначала решаем по шаблону, потом переносим $\frac{\pi}{4}$ в правую часть, приводим к общему знаменателю и делим обе части на 2, чтобы найти x

Домашнее задание

- Закрепите тему, изучив с.103-105 учебника А.Г.Мордкович

(Не путайте с задачником!)