

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Векторы

Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и *нулевой вектор* – это вектор, начало и конец которого совпадают.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$|\vec{AB}| = |a|$$

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Действия над векторами

1. Суммой двух векторов называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, удовлетворяющий условию: если начало вектора \vec{b} перенести в точку, являющуюся концом вектора \vec{a} , начало вектора \vec{c} совпадет с началом вектора \vec{a} , а конец – с концом вектора \vec{b} (правило треугольника).

2. Произведением вектора \vec{a} на число α называется вектор $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$;

2) вектор \vec{b} коллинеарен вектору \vec{a} ;

3) вектор \vec{a} сонаправлен с вектором \vec{b} ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$), если $\alpha > 0$ и противоположно направлен ($\vec{a} \downarrow \vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Свойства векторов

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.
- 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- 4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
- 5) $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность
- 6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность
- 7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
- 8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Координаты вектора

Пусть точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, заданы в прямоугольной декартовой системе координат.

Чтобы найти координаты вектора \overrightarrow{AB} нужно из координат его конца вычесть координаты начала т.е. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Если векторы заданы в прямоугольной декартовой системе координат своими координатами, то

1) при сложении двух и большего числа векторов их одноименные координаты складываются, т.е. если $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$;

2) при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются, т.е. если $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$, то $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$;

3) при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, т.е. если $\vec{a}(x; y)$, то $k\vec{a}(kx; ky)$

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки на плоскости $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если точка $M(x; y)$ *делит отрезок AB в соотношении λ/μ* , то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}$$

В частном случае координаты *середины отрезка* находятся как:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ где } \varphi - \text{ угол между векторами } 0 \leq \varphi \leq 180^\circ.$$

Углом между векторами называется угол между их направлениями.

Свойства скалярного произведения:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
- 3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- 5) $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

Скалярное произведение векторов в координатной форме

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_1; y_1)$; $\vec{b}(x_2, y_2)$ в прямоугольной декартовой системе координат, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

или в координатной форме

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

$$\text{т.к. } \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Пример. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = (5; -3)$, $\vec{b} = (3; 5)$

$$\cos \varphi = \frac{5 \cdot 3 + (-3) \cdot 5}{\sqrt{25+9}\sqrt{9+25}} = \frac{0}{34} = 0; \varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \text{ т.е. заданные векторы перпендикулярны.}$$

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \pi/3$.

$$\begin{aligned} 15\vec{a} \cdot \vec{a} - 18\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{b} &= 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15 \cdot 16 - 28 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 36 = \\ &= 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336. \end{aligned}$$

Прямая на плоскости

Уравнение прямой на плоскости

Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные A , B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой**.

В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ { $By + C = 0$ } - прямая параллельна оси Ox
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ { $Ax + C = 0$ } – прямая параллельна оси Oy
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и нормальному вектору

Нормальным вектором прямой l называется любой ненулевой вектор $\vec{n} = (A; B)$, перпендикулярный этой прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Составим при $A = 3$ и $B = -1$ уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A .

Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$.

Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

Направляющим вектором прямой l называется всякий ненулевой вектор $\vec{a}(m, n)$, параллельный этой прямой.

Пусть заданы точка $M_1(x_1, y_1)$ и направляющий вектор $\vec{a}(m, n)$, тогда уравнение прямой, проходящей через точку M_1 в направлении вектора \vec{a} имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку $A(1, 2)$.

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$.

Запишем каноническое уравнение прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1}$, преобразуем его.

Получим $x + y - 3 = 0$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки имеет вид:

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{4-2}$$
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; т.е. $y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k** .

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициент $C \neq 0$, то, разделив на C , получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где } a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox , а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy .

Пример. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C = 1, \quad -\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, -3)$ и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 0}{-3 - 0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x - 2y = 0.$$

Взаимное расположение прямых на плоскости

Параллельность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, и $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны ($A_1/A_2 = B_1/B_2$) или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой ($k_1 = k_2$)

Перпендикулярность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, и $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны ($A_1/A_2 = B_1/B_2$) или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой ($k_1 = k_2$)

Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Пример. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.
Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C .

Находим уравнение стороны AB : $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$;

$$4x = 6y - 6; 2x - 3y + 3 = 0; y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.

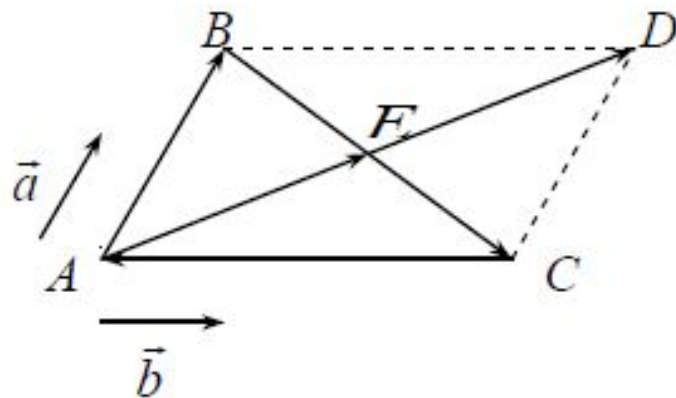
$k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку C , то ее координаты

удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

Пример 2.1. В треугольнике ABC даны стороны $AB = 2$, $AC = 3$. Векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены с векторами \overline{AB} и \overline{AC} соответственно, и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Точка E – середина стороны BC . Выразить векторы \overline{BC} и \overline{AE} через векторы \vec{a} и \vec{b} .

Решение. По правилу треугольника имеем $\overline{BC} = \overline{CA} + \overline{AB} = -3\vec{b} + 2\vec{a}$. Для того, чтобы выразить вектор \overline{AE} , построим параллелограмм $ABDC$ (рис.2.4). По правилу параллелограмма $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, имеем $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}(2\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{a} + 1,5\vec{b}$.



Пример 2.2. При каком значении y векторы $\vec{a}(3; -2; 5)$ и $\vec{b}(-6; y; -10)$ коллинеарны?

Решение. Векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, если существует такое число λ , что выполняется равенство $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Приравнивая соответствующие координаты векторов \vec{a} и $\lambda\vec{b}(-6\lambda; \lambda y; -10\lambda)$, получим:

$$\begin{cases} 3 = -6\lambda, \\ -2 = \lambda y, \\ 5 = -10\lambda, \end{cases}$$

откуда находим, что $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $y = 4$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Изобразите два неколлинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} и постройте векторы:

а) $\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $3\vec{a} - \vec{b}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$.

2.2. Дан параллелограмм $ABCD$ и два вектора \vec{p} и \vec{q} таких, что $\overline{AB} = 4\vec{p}$, а $\overline{AD} = 3\vec{q}$. Точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Выразить через векторы \vec{p} и \vec{q} : а) векторы $\overline{CB}, \overline{CD}, \overline{AC}, \overline{BD}$; б) векторы $\overline{AM}, \overline{AN}, \overline{MN}$.

2.3. В треугольнике ABC отрезок AE – медиана, $\vec{a} = \overline{AB}, \vec{b} = \overline{AC}, \vec{c} = \overline{AE}$. Разложить геометрически и аналитически: а) вектор \vec{c} по векторам \vec{a} и \vec{b} ; б) вектор \vec{a} по векторам \vec{b} и \vec{c} .

2.4. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overline{AC} = \vec{c}$ по векторам $\vec{a} = \overline{AM}$ и $\vec{b} = \overline{AN}$.

2.5. В трапеции $ABCD$ имеем $BC \parallel AD$ и $BC : AD = 1 : 3$. Выразить вектор $\vec{c} = \overline{CD}$ через векторы $\vec{a} = \overline{AB}$ и $\vec{b} = \overline{AD}$.

2.6. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O . Выразить векторы $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ через векторы $\vec{a} = \overline{AB}$ и $\vec{b} = \overline{AC}$. Проверить справедливость равенства $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$.

2.7. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Выразить векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1 C}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{B_1 D}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$.

2.8. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Прямые AC и BD пересекаются в точке O . Выразить векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OD_1}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$.

2.9. При каком значении x векторы $\vec{a}(x; 2; -4)$ и $\vec{b}(3; -6; 12)$ коллинеарны?

2.10. Даны точки $M(0; 3)$, $N(2; 1)$, $P(5; -1)$, $Q(9; -3)$. Доказать, что четырехугольник $MNPQ$ является трапецией.

2.11. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(1;2)$, $B(3;7)$, $D(8;-1)$. Найти координаты вершины C .

2.12. Даны координаты двух вершин треугольника ABC : $A(1;2)$, $B(3;4)$. Отрезок AE – медиана треугольника, и $\overline{AE}(4;-1)$. Найти координаты вершины C .

2.13. Найти положительное значение координаты x вектора $\vec{a}(x;-3;4)$, если $|\vec{a}|=5\sqrt{2}$.

2.14. Найти диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m}(3;4;-2)$ и $\vec{n}(-1;2;5)$.

2.15. Найти длину стороны BC треугольника ABC , если $\overline{AB}(1;-1;2)$, $\overline{AC}(7;2;4)$.

2.16. Даны точки $A(2;3;-1)$, $B(8;12;-4)$. Найти координаты: а) середины отрезка AB ; б) точек, делящих отрезок AB на три равные части.

2.17. Даны вершины $A(4;-1)$, $B(5;5)$, $C(-3;1)$ треугольника ABC . Найти медиану, проведенную из вершины A .

2.18. На отрезке AB выбрана точка E так, что $AE:EB=1:4$. Найти координаты точки B , если $A(1;-2;5)$, $E(3;-1;1)$.

2.19. Разложить вектор \vec{a} по векторам \vec{p} и \vec{q} , если:

а) $\vec{a}(2;-5)$, $\vec{p}(1;3)$, $\vec{q}(2;5)$; б) $\vec{a}(4;5)$, $\vec{p}(3;2)$, $\vec{q}(2;1)$.

2.20. Разложить вектор \vec{a} по векторам \vec{p} , \vec{q} и \vec{r} , если:

а) $\vec{a}(6;1;4)$, $\vec{p}(4;5;1)$, $\vec{q}(3;2;1)$, $\vec{r}(2;3;2)$;

б) $\vec{a}(10;-1;0)$, $\vec{p}(3;1;-1)$, $\vec{q}(2;-1;2)$, $\vec{r}(3;2;1)$.