ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Векторы

Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и ***нулевой вектор*** – это вектор, начало и конец которого совпадают.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}|$$

Векторы называются ***коллинеарными***, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются ***компланарными***, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Векторы называются ***равными***, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Действия над векторами

1. Суммой двух векторов называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, удовлетворяющий условию: если начало вектора $\vec{b}$ перенести в точку, являющуюся концом вектора $\vec{a}$, начало вектора $\vec{c}$ совпадет с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$ (правило треугольника).

2. Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$;

2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3) вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$ и противоположно направлен ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Свойства векторов

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.
2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность
6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность
7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

Координаты вектора

Пусть точки A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2), заданы в прямоугольной декартовой системе координат.

Чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ нужно из координат его конца вычесть координаты начала т.е. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Если векторы заданы в прямоугольной декартовой системе координат своими координатами, то

1) при сложении двух и большего числа векторов их одноименные координаты складываются, т.е. если $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$, то $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2; y_1+y_2)$;

2) при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются, т.е. если $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$, то $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2; y_1-y_2)$;

3) при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, т.е. если $\vec{a}(x; y)$, то $k\vec{a}(kx; ky)$

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки на плоскости A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), то

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Если точка M(x; y) ***делит отрезок AB в соотношении*** λ/μ, то координаты этой точки определяются как:

$$x=\frac{\mu x_1+\lambda x_2}{\mu+\lambda}; \quad y=\frac{\mu y_1+\lambda y_2}{\mu+\lambda}$$

В частном случае координаты ***середины отрезка*** находятся как:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}; \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \cos\varphi$, где φ - угол между векторами $0 \le \varphi \le 180°$.

Углом между векторами называется угол между их направлениями.

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

Скалярное произведение векторов в координатной форме

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_1; y_1)$; $\vec{b}(x_2, y_2)$ в прямоугольной декартовой системе координат, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

<u>Пример.</u> Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13$,

т.к. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = (5; -3)$, $\vec{b} = (3; 5)$

$$cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + (-3)\cdot 5}{\sqrt{25+9}\sqrt{9+25}} = \frac{0}{34} = 0; \varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$, т.е. заданные векторы перпендикулярны.

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3$.

$$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} + 12\cdot 36 =$$
$$= 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Прямая на плоскости

Уравнение прямой на плоскости

Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ $\{ By + C = 0\}$- прямая параллельна оси Ох
- $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ $\{ Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Оу
- $B = C = 0$, $A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оу
- $A = C = 0$, $B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и нормальному вектору

Нормальным вектором прямой l называется любой ненулевой вектор $\vec{n} = (A; B)$, перпендикулярный этой прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Составим при A = 3 и B = -1 уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A.

Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$.

Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

Направляющим вектором прямой l называется всякий ненулевой вектор $\vec{a}(m,\ n)$, параллельный этой прямой.

Пусть заданы точка $M_1(x_1,\ y_1)$ и направляющий вектор $\vec{a}(m,\ n)$, тогда уравнение прямой, проходящей через точку M_1 в направлении вектора $\vec{a}$ имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1,\ -1)$ и проходящей через точку А(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$.

Запишем каноническое уравнение прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1}$, преобразуем его.

Получим $x + y - 3 = 0$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки имеет вид:

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

<u>Пример.</u> Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{4-2}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; *т.е.* $y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициент $C \neq 0$, то, разделив на С, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где } a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy.

<u>Пример.</u> Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$C = 1,\ -\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{1} = 1,\qquad a = -1,\ \ b = 1.$

<u>Пример.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0};\qquad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3};\qquad 3x - 2y = 0.$$

Взаимное расположение прямых на плоскости

Параллельность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, и l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны ($A_1/A_2 = B_1/B_2$) или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой ($k_1 = k_2$)

Перпендикулярность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, и l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны ($A_1/A_2 = B_1/B_2$) или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой ($k_1 = k_2$)

Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Пример. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны. Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Находим уравнение стороны AB: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$;

$4x = 6y - 6$; $2x - 3y + 3 = 0$; $y = \frac{2}{3}x + 1$.

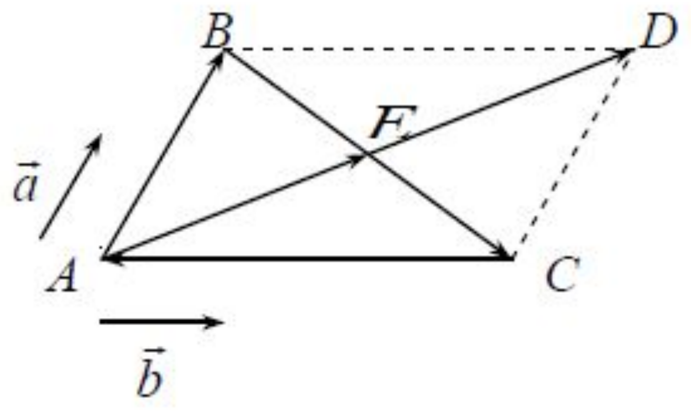
Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.

$k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку C, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

Пример 2.1. В треугольнике ABC даны стороны $AB = 2$, $AC = 3$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены с векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ соответственно, и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Точка E – середина стороны BC. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Р е ш е н и е. По правилу треугольника имеем $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -3\vec{b} + 2\vec{a}$. Для того, чтобы выразить вектор $\overrightarrow{AE}$, построим параллелограмм $ABDC$ (рис.2.4). По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, имеем $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right) = \vec{a} + 1{,}5\vec{b}$.



Пример 2.2. При каком значении y векторы $\vec{a}(3;-2;5)$ и $\vec{b}(-6;y;-10)$ коллинеарны?

Р е ш е н и е. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если существует такое число λ, что выполняется равенство $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. Приравнивая соответствующие координаты векторов $\vec{a}$ и $\lambda\vec{b}(-6\lambda;\lambda y;-10\lambda)$, получим:

$$\begin{cases} 3=-6\lambda, \\ -2=\lambda y, \\ 5=-10\lambda, \end{cases}$$

откуда находим, что $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ и $y=4$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Изобразите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и постройте векторы: а) $\vec{a}+2\vec{b}$; б) $3\vec{a}-\vec{b}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}$.

2.2. Дан параллелограмм $ABCD$ и два вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ таких, что $\overrightarrow{AB}=4\vec{p}$, а $\overrightarrow{AD}=3\vec{q}$. Точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Выразить через векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$: а) векторы $\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$; б) векторы $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN},\overrightarrow{MN}$.

2.3. В треугольнике ABC отрезок AE – медиана, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AE}$. Разложить геометрически и аналитически: а) вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

2.4. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$.

2.5. В трапеции $ABCD$ имеем $BC\parallel AD$ и $BC:AD=1:3$. Выразить вектор $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

2.6. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O. Выразить векторы $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Проверить справедливость равенства $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

2.7. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразить векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{B_1D}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$.

2.8. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые AC и BD пересекаются в точке O. Выразить векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OD_1}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$.

2.9. При каком значении x векторы $\vec{a}(x;2;-4)$ и $\vec{b}(3;-6;12)$ коллинеарны?

2.10. Даны точки $M(0;3)$, $N(2;1)$, $P(5;-1)$, $Q(9;-3)$. Доказать, что четырехугольник $MNPQ$ является трапецией.

2.11. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(1;2)$, $B(3;7)$, $D(8;-1)$. Найти координаты вершины C.

2.12. Даны координаты двух вершин треугольника ABC: $A(1;2)$, $B(3;4)$. Отрезок AE – медиана треугольника, и $\overrightarrow{AE}(4;-1)$. Найти координаты вершины C.

2.13. Найти положительное значение координаты x вектора $\vec{a}(x;-3;4)$, если $|\vec{a}|=5\sqrt{2}$.

2.14. Найти диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m}(3;4;-2)$ и $\vec{n}(-1;2;5)$.

2.15. Найти длину стороны BC треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$, $\overrightarrow{AC}(7;2;4)$.

2.16. Даны точки $A(2;3;-1)$, $B(8;12;-4)$. Найти координаты: а) середины отрезка AB; б) точек, делящих отрезок AB на три равные части.

2.17. Даны вершины $A(4;-1)$, $B(5;5)$, $C(-3;1)$ треугольника ABC. Найти медиану, проведенную из вершины A.

2.18. На отрезке AB выбрана точка E так, что $AE:EB=1:4$. Найти координаты точки B, если $A(1;-2;5)$, $E(3;-1;1)$.

2.19. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если:
а) $\vec{a}(2;-5)$, $\vec{p}(1;3)$, $\vec{q}(2;5)$; б) $\vec{a}(4;5)$, $\vec{p}(3;2)$, $\vec{q}(2;1)$.

2.20. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$, если:
а) $\vec{a}(6;1;4)$, $\vec{p}(4;5;1)$, $\vec{q}(3;2;1)$, $\vec{r}(2;3;2)$;
б) $\vec{a}(10;-1;0)$, $\vec{p}(3;1;-1)$, $\vec{q}(2;-1;2)$, $\vec{r}(3;2;1)$.