

Теория электрических сигналов

Лекция № 2

Доцент каф. Электроэнергетики
и автоматики,

канд. техн. наук, доцент

Кочетков Максим

Владимирович

m-kochetkov@yandex.ru 8 9131763317

Лекция 2

2.4. Спектральное представление непериодических сигналов

Пусть $U(t)$ одиночный импульс конечной длительности. Создадим периодическую последовательность с периодом T и представим ее комплексным рядом Фурье (см.2.18).

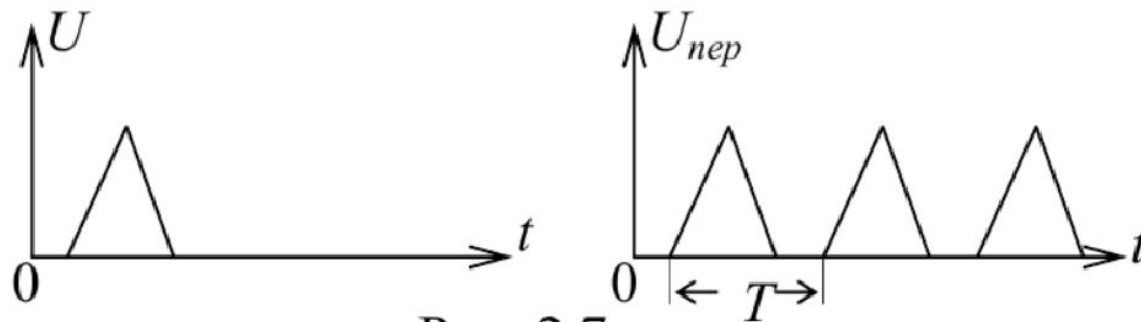


Рис. 2.7

$$\dot{U}_{nep}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2.21)$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{U}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.22)$$

Для того, чтобы перейти к спектральному представлению единичного импульса, устремим $T \rightarrow \infty$.

Из (2.22) видно, что при $T \rightarrow \infty$ получаем:

- бесконечно-малые амплитудные коэффициенты C_n (из-за наличия T в знаменателе);
- частоты соседних гармоник $n\omega_1$ и $(n+1)\omega_1$ становятся сколь угодно близкими (т.к. $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$);
- число гармоник, входящих в ряд Фурье, становится бесконечно большим, т.к. при $T \rightarrow \infty$, основная частота $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$, т.е. спектр становится сплошным.

Подставив (2.22) в (2.21), получим:

$$\dot{U}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{U}(x) e^{-jn\omega_1 x} dx \right) e^{jn\omega_1 t} \frac{\omega_1}{2\pi},$$

т.к. $T \rightarrow \infty$, то $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$, поэтому в этом выражении можно заменить $\omega_1 \rightarrow d\omega$; $n\omega_1 \rightarrow \omega$; $\sum \rightarrow \int$. Таким образом, переходим к двойному интегралу Фурье:

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(x) e^{-j\omega x} dx \right] d\omega.$$

Здесь обозначим $\int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(x) e^{-j\omega x} dx = \dot{S}(\omega)$

или

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) e^{-j\omega t} dt} \quad (2.23).$$

$\dot{S}(\omega)$ - спектральная плотность сигнала $\dot{U}(t)$ или прямое преобразование Фурье, или Фурье-образ сигнала.

Отсюда:

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.24)$$

Это обратное преобразование Фурье.

Физический смысл $\dot{S}(\omega)$

Спектральная плотность – это отношение комплексной амплитуды малого интервала частот вблизи частоты, равной $\pm f_0$, к длине этого интервала. Причем вклад дают как положительные, так и отрицательные частоты, образующие окрестность $\pm f_0$.

Спектральная плотность — комплекснозначная функция частоты, одновременно несущая информацию об амплитуде и о фазе элементарных синусоид.

Таким образом, из (2.23) и (2.24) следует, что один и тот же сигнал допускает две совершенно равноправные математические модели — временную и частотную.

Условия существования $S(\omega)$ - это абсолютная интегрируемость сигнала, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{U}(t)| dt < \infty. \quad (2.25)$$

Можно записать $\dot{S}(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |\dot{S}(\omega)|e^{-j\Theta(\omega)}$, где:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \cos \omega t \cdot dt;$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \sin \omega t \cdot dt.$$

Тогда амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) сигнала —

$$|S(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)};$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) сигнала - $\Theta(\omega) = \text{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$.

2.4.1. Основные свойства преобразований Фурье

Итак, между сигналом $\dot{U}(t)$ и его спектральной плотностью $\dot{S}(\omega)$ существует однозначное соответствие, устанавливаемое соотношениями (2.23) и (2.24). Для практических целей важна связь между различными преобразованиями сигнала и соответствующими изменениями спектра. Рассмотрим основные из этих преобразований.

1) Сложение сигналов.

Если

$$\dot{U}(t) = \dot{U}_1(t) + \dot{U}_2(t) + \dots + \dot{U}_n(t),$$

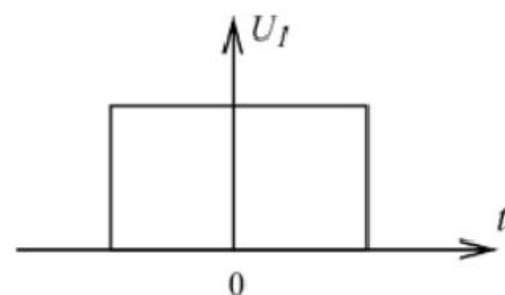
то

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) + \dot{S}_2(\omega) + \dots + \dot{S}_n(\omega), \quad (2.26)$$

т.е. преобразование Фурье линейно.

Пример: сигнал+помеха

2) Сдвиг сигналов во времени (теорема запаздывания).



$$\dot{U}_2(t) = \dot{U}_1(t - t_0).$$

$$\dot{S}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt =$$

обозначим $\theta = t - t_0$, $dt = d\theta$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(\theta) e^{-j\omega(\theta+t_0)} d\theta = e^{-j\omega t_0} \dot{S}_1(\omega);$$

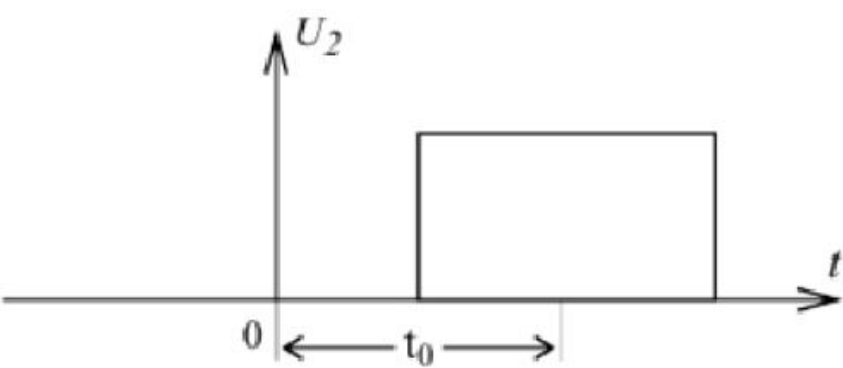


Рис.2.8

$$\dot{S}_2(\omega) = e^{-j\omega t_0} \dot{S}_1(\omega) \quad (2.27)$$

Отсюда видно, что АЧХ сигнала остается постоянной, но меняется его фазовая характеристика.

Пример: фильтрация РЛС сигналов.

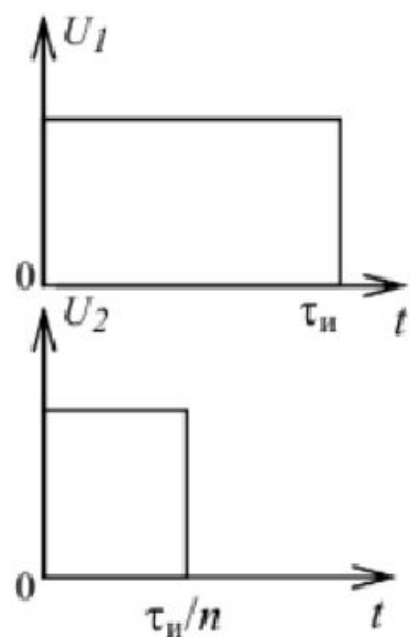


Рис.2.9

3) Изменение масштаба времени.

$$\dot{U}_2(t) = \dot{U}_1(nt),$$

$n > 1$ – сжатие сигнала,

$n < 1$ – расширение сигнала

$$\dot{S}_2(\omega) = \int_0^{\tau_u/n} \dot{U}_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau_u/n} \dot{U}_1(nt) e^{-j\omega t} dt.$$

После замены переменных $nt = \theta$, $dt = d\frac{\theta}{n}$ отсюда имеем

$$\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{n} \int_0^{\tau_u} \dot{U}_1(\theta) e^{-j\frac{\omega}{n}\theta} d\theta = \frac{1}{n} \dot{S}_1\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

$$\boxed{\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{n} \dot{S}_1\left(\frac{\omega}{n}\right)}, \quad (2.28)$$

т.е при сжатии сигнала в n раз на временной оси во столько же раз расширяется его спектр и уменьшается интенсивность спектральной плотности.

Из этого свойства и примеров по определению спектральных плотностей импульсов видно, что чем меньше длительность сигнала, тем шире его спектр.

Для установления количественных соотношений между указанными параметрами необходимо определиться с понятием длительности сигнала и ширины его спектра. В большинстве случаев выбор произвольный.

Например:

- для прямоугольного импульса ширина спектра принимается как основание главного лепестка $f_s \tau_u = 1$;
- для колоколообразного импульса ширина берется на уровне 0,606 от максимального значения;
- можно также использовать энергетический критерий (например 90% энергии и т.д.). В результате $f_s \tau_u = const$ и зависит от формы импульса. Минимальная $f_s \tau_u = 0,5$ у колоколообразного (гауссового) импульса.

Пример: спектральный анализ с временной компрессией.

4) Произведение двух сигналов.

$$U(t) = f(t) \cdot g(t),$$

где

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Найдем прямое преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) e^{jxt} dx \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega-x)t} dt \right] dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \dot{F}(\omega-x) dx, \end{aligned}$$

т.е.

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \dot{F}(\omega-x) dx} \quad (2.29)$$

- свертка спектров сомножителей.

Примеры: преобразование частоты; исследование флуктуаций; получение спектра радиоимпульса как произведение синусоидального сигнала $\sin \omega t$ на прямоугольный импульс.

5) Спектральная плотность производной сигнала и его интеграла.

$$f(t) = \frac{dU}{dt},$$

$$\dot{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dt} e^{-j\omega t} dt.$$

Интегрируя по частям $\int U'V dt = UV - \int UV' dt$, получим

$$\dot{F}(\omega) = U(t) \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Если выполняется условие $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(t) = 0$, то

$$\boxed{\dot{F}(\omega) = j\omega \dot{S}(\omega)}, \quad (2.30)$$

где $j\omega = \omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ (т.к. по формуле Эйлера $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$);

$\dot{S}(\omega) = |\dot{S}(\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$, $|\dot{S}(\omega)|$ - амплитудный спектр и $\varphi(\omega)$ - фазовый спектр исходного сигнала $U(t)$, или

$$\dot{F}(\omega) = |\omega \dot{S}(\omega)| e^{-j\left[\varphi(\omega) - \frac{\pi}{2}\right]}, \quad (2.31)$$

т.е. изменится амплитудный спектр, а фазовый спектр меняется на $\frac{\pi}{2}$ на всех частотах.

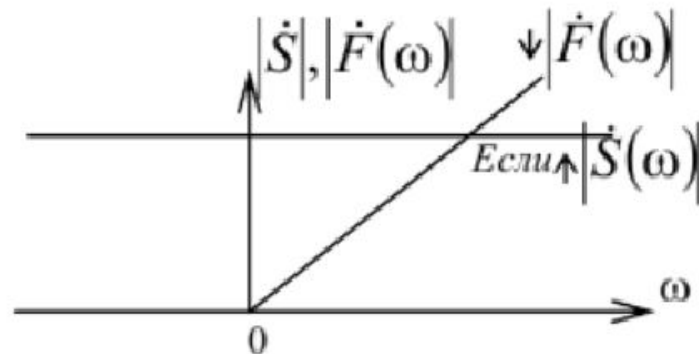


Рис. 2.10

Причем дифференцирование поднимает верхние частоты и занижает низкие частоты.

Аналогично можно найти спектр интеграла $g(t) = \int U(t) dt$.

Представив $U(t) = \frac{dg}{dt}$, следовательно, $\dot{S}(\omega) = j\omega \dot{G}(\omega)$, отсюда

$$\dot{G}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \dot{S}(\omega) = \frac{\dot{S}(\omega)}{\omega} e^{-j\left[\varphi(\omega) + \frac{\pi}{2}\right]} \quad (2.32)$$

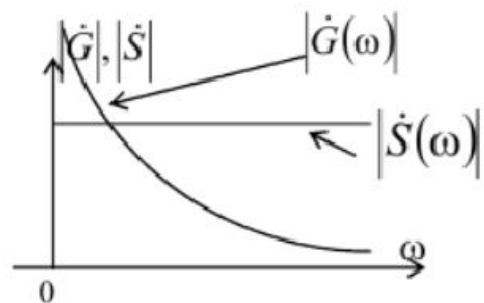


Рис. 2.11

б) Теорема Парсеваля.

Известно, что энергия колебания на единичном сопротивлении $E = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt$.

Найдем соотношение, позволяющее определить энергию колебания $U(t)$ посредством использования его спектра. Для этого воспользуемся прямым преобразованием Фурье

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Умножим обе части данного равенства на $U(t)$ и проинтегрируем в бесконечных пределах

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega,$$

НО

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{j\omega t} dt = \dot{S}^*(\omega),$$

таким образом $E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \dot{S}^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega.$

Т.к. квадрат модуля есть четная функция ω , то, удвоив значение интеграла, можно проводить интегрирование в пределах $0 — \infty$.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.33)$$

Из этого соотношения следует, что на бесконечно малый участок частот $d\omega$

приходится энергия $\Delta E = \frac{|\dot{S}(\omega)|^2}{\pi} d\omega = dE \cdot d\omega,$

$|\dot{S}(\omega)|^2$ — энергетический спектр сигнала.

Величина $dE = \frac{|\dot{S}(\omega)|^2}{\pi}$ — спектральная плотность энергии колебания $U(t)$.

Полная энергия сигнала равна сумме энергий всех его частотных составляющих.

Пример - спектральный анализатор.

7) Обобщенная формула Рэлея.

Пусть два сигнала $U(t)$ и $V(t)$ (в общем случае комплексные) определены своими обратными преобразованиями Фурье:

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v(\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad \dot{V}^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega,$$

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Найдем скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\dot{U}, \dot{V}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \dot{V}^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } (\dot{U}, \dot{V}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega) \dot{S}_v^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u, \dot{S}_v)$$

Итак,

$$\boxed{(\dot{U}, \dot{V}) = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u, \dot{S}_v)} \quad \text{— Формула Рэлея} \quad (2.34)$$

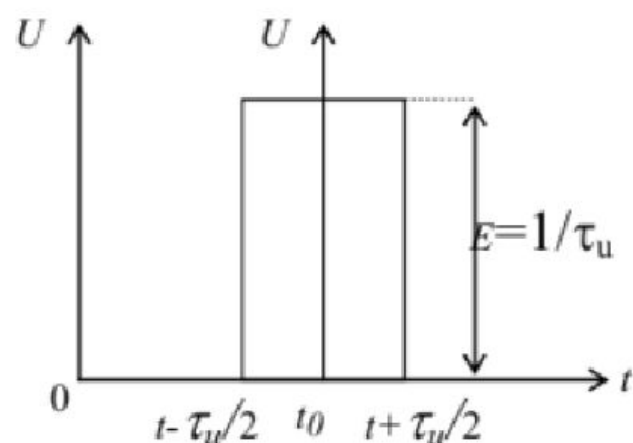
Скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента $\frac{1}{2\pi}$ равно скалярному произведению их спектральных плотностей.

Пример - ортогональность неперекрывающихся по спектру сигналов.

2.4.2 Спектральная плотность некоторых неинтегрируемых сигналов

Математические модели многих сигналов не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости (2.25) и поэтому метод преобразований Фурье в обычном виде к ним не применим. Однако можно говорить о спектральных плотностях таких сигналов, если допустить, что эти плотности описываются обобщенными функциями.

1) Спектральная плотность δ функции.



$$U(t) = \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

Рис. 2.12

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0},$$

$$\boxed{S(\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega t_0}}, \quad (2.35)$$

$|S(\omega)| = 1$. (см. рис. 2.13)

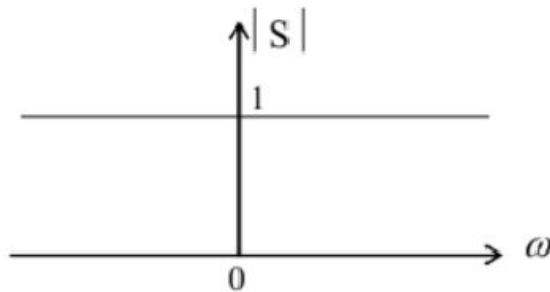


Рис. 2.13

По свойству преобразования Фурье о смещенном во времени сигнале можно представить δ -функцию:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{или} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} d\omega.$$

Качественно можно эту формулу обосновать следующим образом: воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Мы можем представить приведенный выше интеграл в виде суммы большого числа синусоид и косинусоид различных частот.

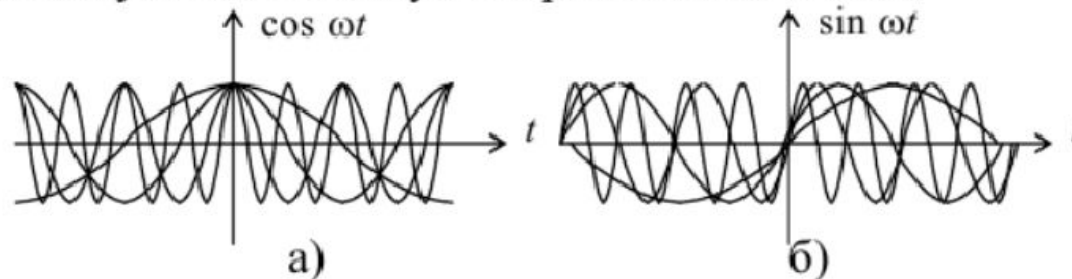


Рис. 2.14

Как видно из рисунка 2.14-б, в любой момент времени t , отличный от $t=0$, число положительных составляющих $\sin \omega t$ будет равно числу отрицательных составляющих и, следовательно, их вклады могут привести к разрушительной интерференции или полной взаимной компенсации. При $t=0$, однако, все косинусоидальные составляющие равны $+1$; их вклад суммируется, создавая в начале координат бесконечно большой пик (см. рис. 2-14-а).

2) Спектральная плотность постоянного во времени сигнала.

$$U(t) = E = \text{const},$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \delta(\omega),$$

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = 2\pi E \delta(\omega)}.$$

(2.36)

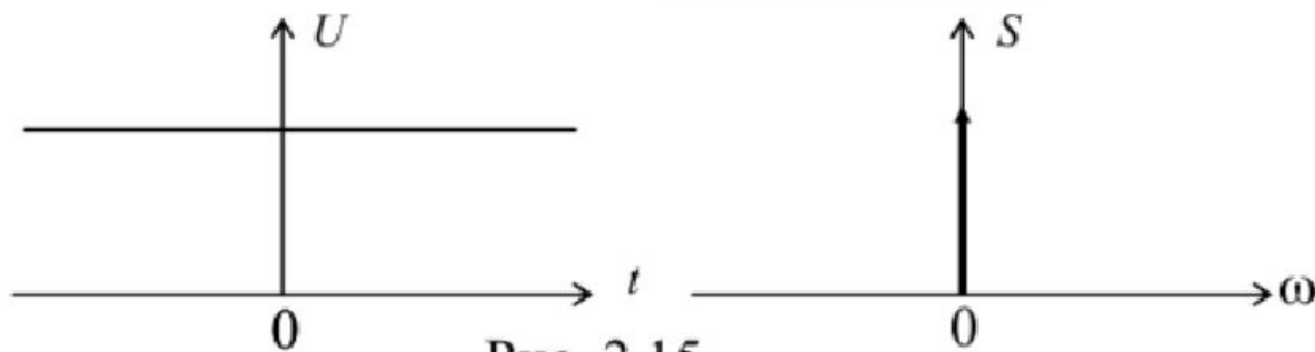


Рис. 2.15

3) Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала $U(t) = \exp(j\omega_0 t)$ может быть определена следующим образом:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0),$$

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}. \quad (2.37)$$

Спектр несимметричен относительно $\omega=0$.

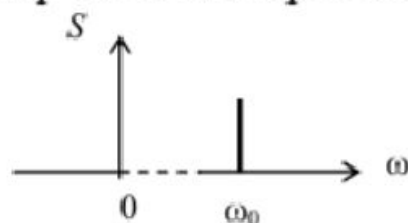


Рис. 2.16

4) Спектральную плотность гармонического сигнала $U(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ определим воспользовавшись линейностью преобразования Фурье и спектральной плотностью комплексной экспоненты.

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]}. \quad (2.38)$$

Спектр симметричен относительно $\omega=0$.

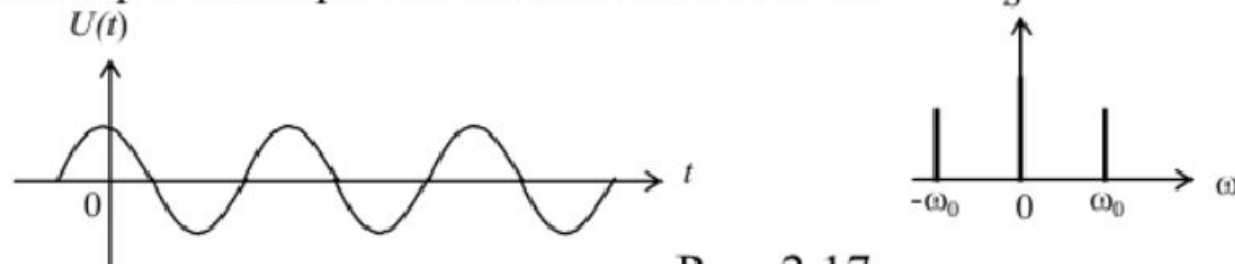


Рис. 2.17

2.5. Спектральная плотность периодического сигнала

Найдем спектральную плотность периодического $U(t)$ сигнала с периодом T — $U(t) = U(t \pm T)$.

Экспоненциальный ряд Фурье для периодического сигнала $U(t)$
 $U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$, где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ — основная частота, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Коэффициенты

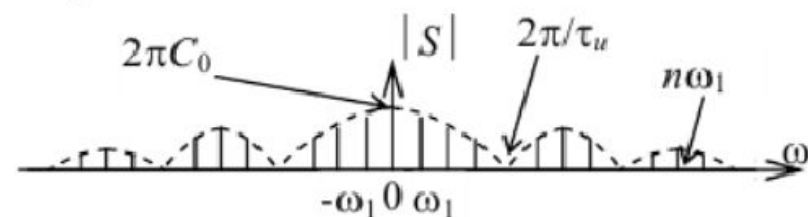
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Но при этом, по определению, спектральная плотность

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - n\omega_1)t} dt = \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1), \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \boxed{\dot{S}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1)}. \quad (2.39)$$

Таким образом, спектральная плотность периодического сигнала представляется на оси частот последовательностью δ — функций, существующих на частотах $\omega = n\omega_1$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), с интенсивностью (площадью) $2\pi C_n$, определяемой видом одиночного сигнала $U(t)$.



На рис. 2.18 показан спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов (пунктиром — спектр одиночного видеоимпульса)

Рис.2.18

Если сигнал — это периодическая последовательность δ импульсов, то

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T}. \quad \text{Отсюда (из 2.39) спектр периодической}$$

последовательности δ импульсов равен

$$\dot{S}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1). \quad (2.40)$$

Этот спектр изображен на рис. 2.19.

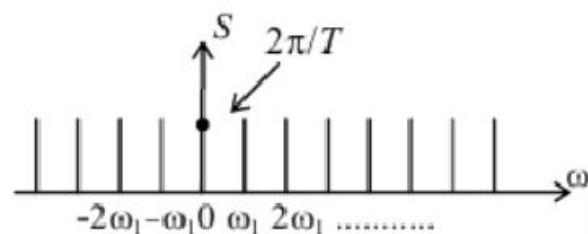


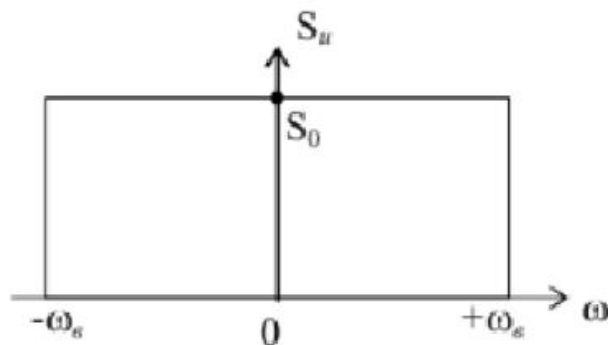
Рис. 2.19

3. Дискретизация сигнала

При переходе от аналогового сигнала к цифровому осуществляются три специфических преобразования: дискретизация по времени, квантование по уровню и кодирование. Под дискретизацией понимают процесс замены непрерывного сигнала дискретной последовательностью отсчетов через интервал Δt .

3.1. Ортогональные сигналы с ограниченным спектром

Рассмотрим идеальный низкочастотный (НЧ) сигнал, т.е. сигнал $U(t)$, имеющий постоянную вещественную спектральную плотность в диапазоне $-\omega_g, +\omega_g$.



$$S_u(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_g, \\ S_0, & -\omega_g \leq \omega \leq \omega_g, \\ 0, & \omega > \omega_g. \end{cases} \quad (3.1)$$

Рис. 3.1

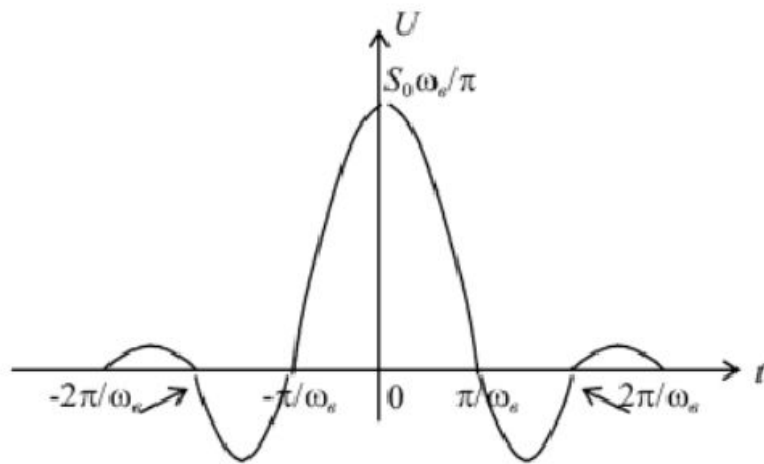


Рис. 3.2

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_s}^{+\omega_s} e^{j\omega t} d\omega;$$

т.к. $\int_{-\omega_s}^{+\omega_s} e^{j\omega t} d\omega = 2 \frac{\sin \omega_s t}{t},$ то

$$U(t) = \frac{S_0 \omega_s}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s t}. \quad (3.2)$$

Если НЧ сигнал запаздывает на Δt , то $V(t) = \frac{S_0 \omega_s}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_s (t - \Delta t)}{\omega_s (t - \Delta t)},$ (3.2')

тогда по свойству преобразования Фурье задержанного сигнала имеем

$$\dot{S}_v(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_s, \\ S_0 e^{-j\omega \Delta t}, & -\omega_s \leq \omega \leq \omega_s, \\ 0, & \omega > \omega_s. \end{cases} \quad (3.1')$$

Рассмотрим эти два идеальных НЧ сигнала $\dot{U}(t)$ и $\dot{V}(t)$. Оба имеют одинаковые параметры S_0 и ω_s , однако сигнал $\dot{V}(t)$ запаздывает по отношению к сигналу $\dot{U}(t)$ на время Δt , так, что его спектральная плотность $\dot{S}_v(\omega) = S_u(\omega) e^{-j\omega \Delta t}$.

Скалярное произведение этих сигналов, полученное по обобщенной формуле

Рэлея (2.34), $(\dot{U}\dot{V}) = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u \dot{S}_v^*),$ $(UV) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u \dot{S}_v^* d\omega = \frac{S_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_s}^{\omega_s} e^{j\omega \Delta t} d\omega = \frac{S_0^2 \omega_s}{\pi} \frac{\sin \omega_s \Delta t}{\omega_s \Delta t}.$

Обозначим $\Delta t = t_k$.

Скалярное произведение обращается в нуль, и эти сигналы оказываются ортогональными, если временной сдвиг между ними удовлетворяет условию

$$\omega_s t_k = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \Delta t = t_k = k \frac{\pi}{\omega_s}.$$

Минимально возможный сдвиг, приводящий к ортогонализации, получается при $k = \pm 1$. Причем, максимум одного сигнала всегда совпадает с нулем другого.

$$t_1 = \pm \frac{\pi}{\omega_s} = \pm \frac{1}{2F_s}. \quad (3.3)$$

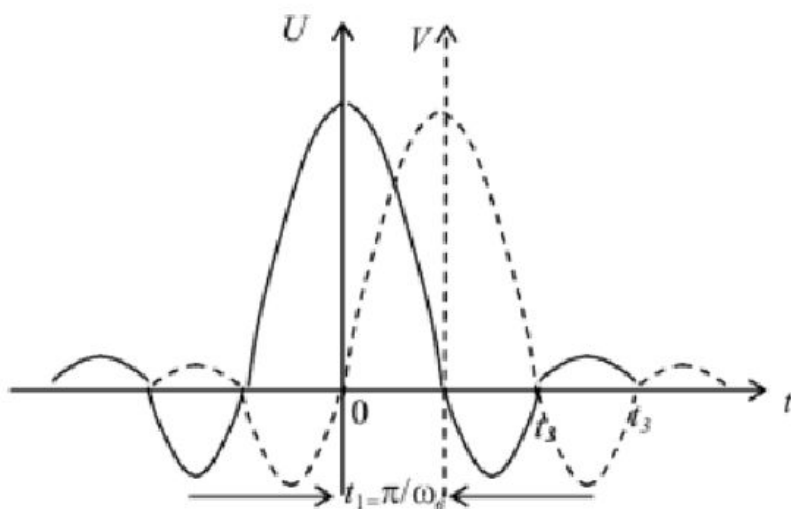


Рис. 3.3

Важно — удалось не просто добиться ортогональности двух сигналов. Указан путь построения бесконечного ортогонального базиса, который может служить координатной системой для разложения произвольного сигнала со спектром, ограниченным частотой ω_s .

3.2. Теорема Котельникова для сигнала с ограниченным спектром

Для создания ортонормированного базиса достаточно рассмотреть функцию

$l_0(t) = A \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s t}$, создающую ортогональный базис и определить амплитуду A ,

чтобы норма была единична. По определению, энергия сигнала равна квадрату

нормы $E = \|l_0\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} l_0^2 dt = \frac{A^2}{\omega_s^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\omega_s t}{t^2} dt = \frac{A^2}{\omega_s^2} \pi \omega_s = \frac{\pi A^2}{\omega_s}$.

Итак, функция $l_0(t)$ будет ортонормированной, т.е. ($E=1$), если $A = \sqrt{\frac{\omega_s}{\pi}}$.

Бесконечная совокупность функций

$$l_k(t, \omega_s) = \sqrt{\frac{\omega_s}{\pi}} \frac{\sin \omega_s (t - t_k)}{\omega_s (t - t_k)}, \quad (3.4)$$

где $t_k = k \frac{\pi}{\omega_s} = k \frac{1}{2F_s}$, образуют базис Котельникова в линейном пространстве НЧ

сигналов со спектрами, ограниченными сверху значением ω_s . Отдельная функция

l_k называется отсчетной функцией базиса Котельникова.

Если $\dot{U}(t)$ — произвольный сигнал, спектральная плотность которого отлична

Если $\dot{U}(t)$ — произвольный сигнал, спектральная плотность которого отлична от нуля лишь в полосе частот $-\omega_g \leq \omega \leq \omega_g$, то его можно разложить в обобщенный ряд Фурье по базису Котельникова

$$\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k l_k(t, \omega_g).$$

Коэффициентами ряда служат, как известно, скалярные произведения разлагаемого сигнала и k -ой отсчетной функции $C_k = (\dot{U}(t) \cdot l_k)$. По обобщенной формуле Рэлея (2.34) $C_k = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u(\omega) \cdot \dot{S}_{l_k}(\omega))$. Т.е.

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega) \dot{S}_{l_k}^*(\omega) d\omega \quad (3.5)$$

Коэффициенты C_k находим по аналогии с выражениями (3.2') и (3.1') т.к.

$$l_k(t) = \sqrt{\frac{\omega_g}{\pi}} \frac{\sin \omega_g(t - t_k)}{\omega_g(t - t_k)}, \text{ где } t_k = \frac{k}{2F_g},$$

то для k -ой отсчетной функции имеем $\dot{S}_{l_k} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \exp\{-j\omega t_k\}$ (здесь, в

соответствии с теоремой запаздывания, экспонента показывает сдвиг отсчетной

функции во времени). Тогда из (3.5) имеем

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \dot{S}_u(\omega) \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \exp(j\omega t_k) d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \dot{S}_u(\omega) \cdot [\exp j\omega t_k] d\omega \right\}.$$

Т.к. $t_k = \frac{k\pi}{\omega_g}$ — k -ая отсчетная точка, то фигурная скобка есть не что иное, как $\dot{U}(t_k)$.

Таким образом, $C_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \dot{U}(t_k)$. Следовательно, т.к. $\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k l_k(t)$, используя (3.4),

имеем ряд Котельникова

$$\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \frac{\sin \omega_g(t-t_k)}{\omega_g(t-t_k)}. \quad (3.6)$$

Теорема: Произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше F_g (Гц), может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени $\Delta t = 1/2 F_g$ (с).

3.3. Спектр дискретизированного сигнала

Дискретизированный сигнал можно рассматривать как результат умножения первоначального непрерывного сигнала $U(t)$ на сигнал $i(t)$, состоящий из бесконечного числа единичных δ -импульсов

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{\delta}),$$

где T_{δ} – период дискретизации.

Эта операция дает дискретизированный сигнал

$$U_i(t) = U(t) \cdot i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(nT_{\delta}) \cdot \delta(t - nT_{\delta}).$$

Воспользовавшись теоремой о свертке

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega - g) \cdot S_i(g) dg,$$

где $S_u(\dots)$ – преобразование Фурье от функции $U(t)$, $S_i(\dots)$ – преобразование Фурье от функции $i(t)$.

Преобразование Фурье ряда, состоящего из δ -импульсов, как было показано выше (см. (2.38)),

$$S_i(g) = \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(g - n\omega_1) = \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(g - \frac{2\pi n}{T_\delta}\right),$$

отсюда

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega - g) \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(g - \frac{2\pi n}{T_\delta}\right) dg = \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_u\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_\delta}\right).$$

Следовательно, дискретизированный, или импульсно-модулированный сигнал $U_i(t)$ имеет периодическое с периодом $F_\delta = \frac{1}{T_\delta}$ преобразование Фурье $S(\omega)$,

интенсивность которого уменьшается в T_d раз. Если спектр $S_u(\omega)$ при $F > F_0$, обращается в ноль и $T_d \leq \frac{1}{2F_0}$ или $F_d \geq 2F_0$, то $S(\omega)$ является просто периодически повторяемой функцией $S_u(\omega)$ (рис.3.5). Если $T_d > \frac{1}{2F_0}$, то имеет место эффект наложения частот (рис. 3.6).

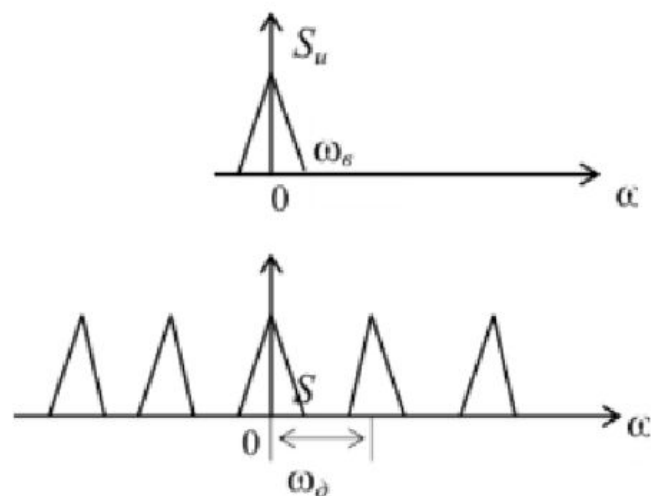


Рис. 3.5

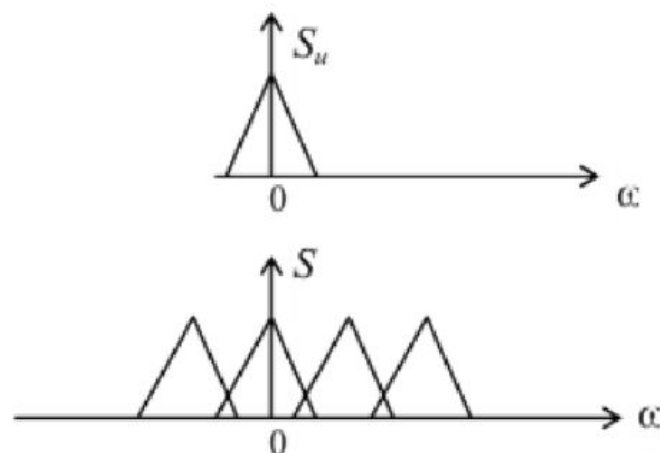


Рис. 3.6



Успешного усвоения

