

# Теория электрических сигналов

## Лекция № 2

Доцент каф. Электроэнергетики  
и автоматики,

канд. техн. наук, доцент

**Кочетков Максим**

**Владимирович**

[m-kochetkov@yandex.ru](mailto:m-kochetkov@yandex.ru) 8 9131763317

# Лекция 2

## 2.4. Спектральное представление непериодических сигналов

Пусть  $U(t)$  одиночный импульс конечной длительности. Создадим периодическую последовательность с периодом  $T$  и представим ее комплексным рядом Фурье (см.2.18).

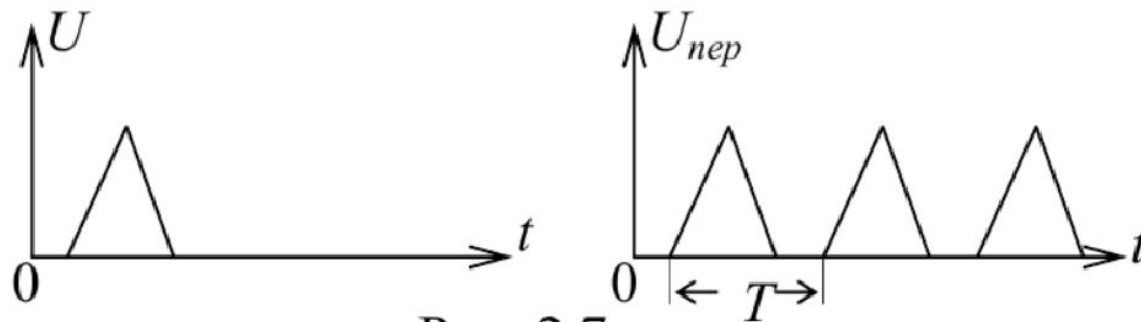


Рис. 2.7

$$\dot{U}_{nep}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2.21)$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{U}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.22)$$

Для того, чтобы перейти к спектральному представлению единичного импульса, устремим  $T \rightarrow \infty$ .

Из (2.22) видно, что при  $T \rightarrow \infty$  получаем:

- бесконечно-малые амплитудные коэффициенты  $C_n$  (из-за наличия  $T$  в знаменателе);
- частоты соседних гармоник  $n\omega_1$  и  $(n+1)\omega_1$  становятся сколь угодно близкими (т.к.  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ );
- число гармоник, входящих в ряд Фурье, становится бесконечно большим, т.к. при  $T \rightarrow \infty$ , основная частота  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ , т.е. спектр становится сплошным.

Подставив (2.22) в (2.21), получим:

$$\dot{U}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{U}(x) e^{-jn\omega_1 x} dx \right) e^{jn\omega_1 t} \frac{\omega_1}{2\pi},$$

т.к.  $T \rightarrow \infty$ , то  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ , поэтому в этом выражении можно заменить  $\omega_1 \rightarrow d\omega$ ;  $n\omega_1 \rightarrow \omega$ ;  $\sum \rightarrow \int$ . Таким образом, переходим к двойному интегралу Фурье:

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(x) e^{-j\omega x} dx \right] d\omega.$$

Здесь обозначим  $\int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(x) e^{-j\omega x} dx = \dot{S}(\omega)$

или

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.23).$$

$\dot{S}(\omega)$  - спектральная плотность сигнала  $\dot{U}(t)$  или прямое преобразование Фурье, или Фурье-образ сигнала.

Отсюда:

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.24)$$

Это обратное преобразование Фурье.

### Физический смысл $\dot{S}(\omega)$

Спектральная плотность – это отношение комплексной амплитуды малого интервала частот вблизи частоты, равной  $\pm f_0$ , к длине этого интервала. Причем вклад дают как положительные, так и отрицательные частоты, образующие окрестность  $\pm f_0$ .

Спектральная плотность — комплекснозначная функция частоты, одновременно несущая информацию об амплитуде и о фазе элементарных синусоид.

Таким образом, из (2.23) и (2.24) следует, что один и тот же сигнал допускает две совершенно равноправные математические модели — временную и частотную.

Условия существования  $S(\omega)$  - это абсолютная интегрируемость сигнала, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{U}(t)| dt < \infty. \quad (2.25)$$

Можно записать  $\dot{S}(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |\dot{S}(\omega)|e^{-j\Theta(\omega)}$ , где:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \cos \omega t \cdot dt;$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \sin \omega t \cdot dt.$$

Тогда амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) сигнала —

$$|S(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)};$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) сигнала -  $\Theta(\omega) = \text{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$ .

## 2.4.1. Основные свойства преобразований Фурье

Итак, между сигналом  $\dot{U}(t)$  и его спектральной плотностью  $\dot{S}(\omega)$  существует однозначное соответствие, устанавливаемое соотношениями (2.23) и (2.24). Для практических целей важна связь между различными преобразованиями сигнала и соответствующими изменениями спектра. Рассмотрим основные из этих преобразований.

1) Сложение сигналов.

Если

$$\dot{U}(t) = \dot{U}_1(t) + \dot{U}_2(t) + \dots + \dot{U}_n(t),$$

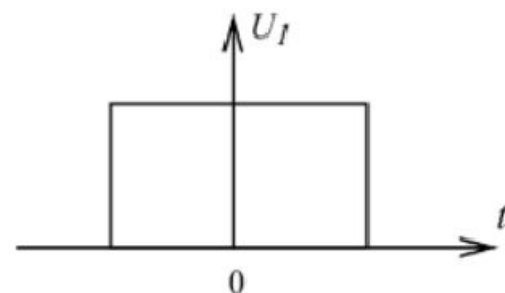
то

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) + \dot{S}_2(\omega) + \dots + \dot{S}_n(\omega), \quad (2.26)$$

т.е. преобразование Фурье линейно.

Пример: сигнал+помеха

2) Сдвиг сигналов во времени (теорема запаздывания).



$$\dot{U}_2(t) = \dot{U}_1(t - t_0).$$

$$\dot{S}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt =$$

обозначим  $\theta = t - t_0$ ,  $dt = d\theta$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(\theta) e^{-j\omega(\theta + t_0)} d\theta = e^{-j\omega t_0} \dot{S}_1(\omega);$$

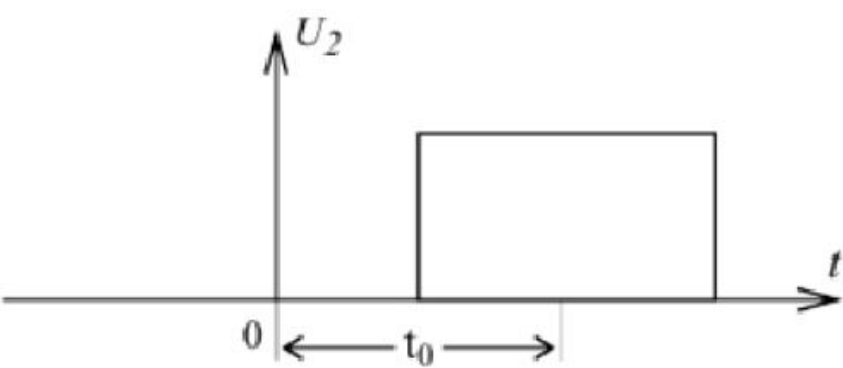


Рис.2.8

$$\dot{S}_2(\omega) = e^{-j\omega t_0} \dot{S}_1(\omega) \quad (2.27)$$

Отсюда видно, что АЧХ сигнала остается постоянной, но меняется его фазовая характеристика.

Пример: фильтрация РЛС сигналов.

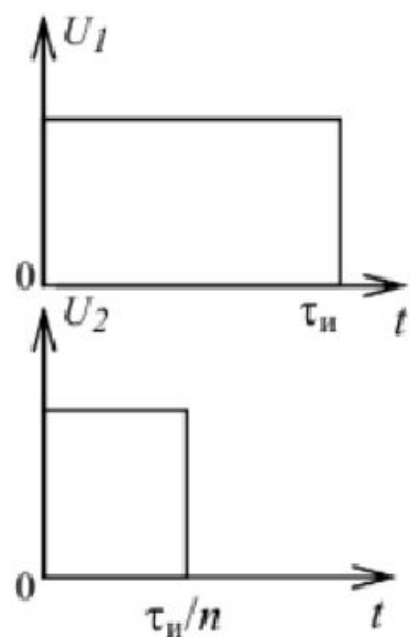


Рис.2.9

3) Изменение масштаба времени.

$$\dot{U}_2(t) = \dot{U}_1(nt),$$

$n > 1$  – сжатие сигнала,

$n < 1$  – расширение сигнала

$$\dot{S}_2(\omega) = \int_0^{\tau_u/n} \dot{U}_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau_u/n} \dot{U}_1(nt) e^{-j\omega t} dt.$$

После замены переменных  $nt = \theta$ ,  $dt = d\frac{\theta}{n}$  отсюда имеем



$$\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{n} \int_0^{\tau_u} \dot{U}_1(\theta) e^{-j\frac{\omega}{n}\theta} d\theta = \frac{1}{n} \dot{S}_1\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

$$\boxed{\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{n} \dot{S}_1\left(\frac{\omega}{n}\right)}, \quad (2.28)$$

т.е при сжатии сигнала в  $n$  раз на временной оси во столько же раз расширяется его спектр и уменьшается интенсивность спектральной плотности.

Из этого свойства и примеров по определению спектральных плотностей импульсов видно, что чем меньше длительность сигнала, тем шире его спектр.

Для установления количественных соотношений между указанными параметрами необходимо определиться с понятием длительности сигнала и ширины его спектра. В большинстве случаев выбор произвольный.

Например:

- для прямоугольного импульса ширина спектра принимается как основание главного лепестка  $f_s \tau_u = 1$ ;
- для колоколообразного импульса ширина берется на уровне 0,606 от максимального значения;
- можно также использовать энергетический критерий (например 90% энергии и т.д.). В результате  $f_s \tau_u = const$  и зависит от формы импульса. Минимальная  $f_s \tau_u = 0,5$  у колоколообразного (гауссового) импульса.

Пример: спектральный анализ с временной компрессией.

4) Произведение двух сигналов.

$$U(t) = f(t) \cdot g(t),$$

где

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Найдем прямое преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) e^{jxt} dx \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega-x)t} dt \right] dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \dot{F}(\omega-x) dx, \end{aligned}$$

т.е.

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \dot{F}(\omega-x) dx} \quad (2.29)$$

- свертка спектров сомножителей.

Примеры: преобразование частоты; исследование флуктуаций; получение спектра радиоимпульса как произведение синусоидального сигнала  $\sin \omega t$  на прямоугольный импульс.

5) Спектральная плотность производной сигнала и его интеграла.

$$f(t) = \frac{dU}{dt},$$

$$\dot{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dt} e^{-j\omega t} dt.$$

Интегрируя по частям  $\int U'V dt = UV - \int UV' dt$ , получим

$$\dot{F}(\omega) = U(t) \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Если выполняется условие  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(t) = 0$ , то

$$\boxed{\dot{F}(\omega) = j\omega \dot{S}(\omega)}, \quad (2.30)$$

где  $j\omega = \omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$  (т.к. по формуле Эйлера  $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$ );

$\dot{S}(\omega) = |\dot{S}(\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$ ,  $|\dot{S}(\omega)|$  - амплитудный спектр и  $\varphi(\omega)$  - фазовый спектр исходного сигнала  $U(t)$ , или

$$\dot{F}(\omega) = |\omega \dot{S}(\omega)| e^{-j\left[\varphi(\omega) - \frac{\pi}{2}\right]}, \quad (2.31)$$

т.е. изменится амплитудный спектр, а фазовый спектр меняется на  $\frac{\pi}{2}$  на всех частотах.

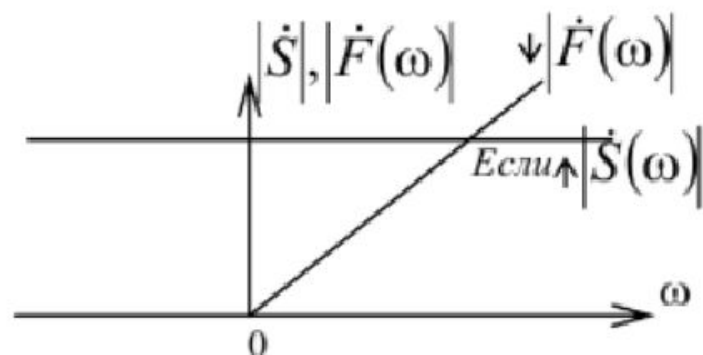


Рис. 2.10

Причем дифференцирование поднимает верхние частоты и занижает низкие частоты.

Аналогично можно найти спектр интеграла  $g(t) = \int U(t) dt$ .

Представив  $U(t) = \frac{dg}{dt}$ , следовательно,  $\dot{S}(\omega) = j\omega \dot{G}(\omega)$ , отсюда

$$\dot{G}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \dot{S}(\omega) = \frac{\dot{S}(\omega)}{\omega} e^{-j\left[\varphi(\omega) + \frac{\pi}{2}\right]} \quad (2.32)$$

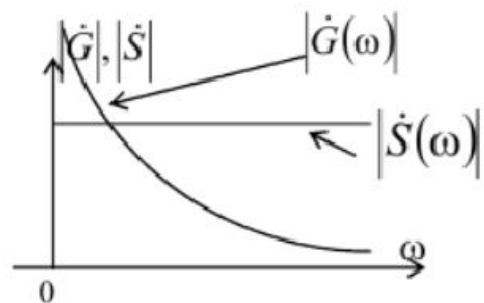


Рис. 2.11

б) Теорема Парсеваля.

Известно, что энергия колебания на единичном сопротивлении  $E = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt$ .

Найдем соотношение, позволяющее определить энергию колебания  $U(t)$  посредством использования его спектра. Для этого воспользуемся прямым преобразованием Фурье

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Умножим обе части данного равенства на  $U(t)$  и проинтегрируем в бесконечных пределах

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega,$$

НО

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{j\omega t} dt = \dot{S}^*(\omega),$$

таким образом  $E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \dot{S}^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega.$

Т.к. квадрат модуля есть четная функция  $\omega$ , то, удвоив значение интеграла, можно проводить интегрирование в пределах  $0 — \infty$ .

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.33)$$

Из этого соотношения следует, что на бесконечно малый участок частот  $d\omega$

приходится энергия  $\Delta E = \frac{|\dot{S}(\omega)|^2}{\pi} d\omega = dE \cdot d\omega,$

$|\dot{S}(\omega)|^2$  — энергетический спектр сигнала.

Величина  $dE = \frac{|\dot{S}(\omega)|^2}{\pi}$  — спектральная плотность энергии колебания  $U(t)$ .

Полная энергия сигнала равна сумме энергий всех его частотных составляющих.

Пример - спектральный анализатор.

## 7) Обобщенная формула Рэлея.

Пусть два сигнала  $U(t)$  и  $V(t)$  (в общем случае комплексные) определены своими обратными преобразованиями Фурье:

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v(\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad \dot{V}^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega,$$

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Найдем скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\dot{U}, \dot{V}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \dot{V}^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v^*(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } (\dot{U}, \dot{V}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega) \dot{S}_v^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u, \dot{S}_v)$$

Итак,

$$\boxed{(\dot{U}, \dot{V}) = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u, \dot{S}_v)} \quad \text{— Формула Рэлея} \quad (2.34)$$

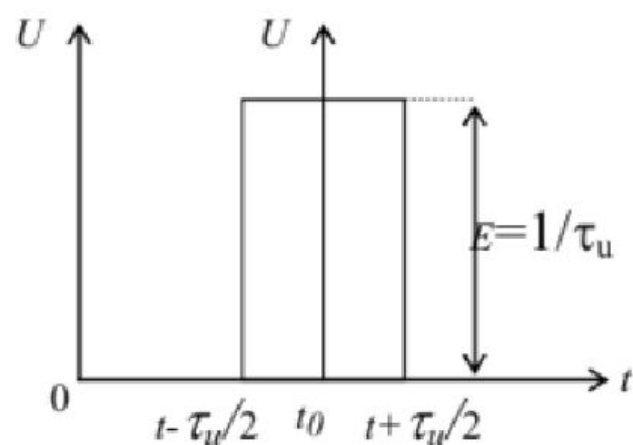
Скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента  $\frac{1}{2\pi}$  равно скалярному произведению их спектральных плотностей.

Пример - ортогональность неперекрывающихся по спектру сигналов.

## 2.4.2 Спектральная плотность некоторых неинтегрируемых сигналов

Математические модели многих сигналов не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости (2.25) и поэтому метод преобразований Фурье в обычном виде к ним не применим. Однако можно говорить о спектральных плотностях таких сигналов, если допустить, что эти плотности описываются обобщенными функциями.

1) Спектральная плотность  $\delta$  функции.



$$U(t) = \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

Рис. 2.12



$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0},$$

$$\boxed{S(\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega t_0}}, \quad (2.35)$$

$|S(\omega)| = 1$ . (см. рис. 2.13)

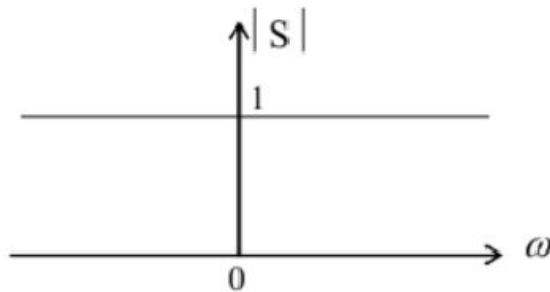


Рис. 2.13

По свойству преобразования Фурье о смещенном во времени сигнале можно представить  $\delta$ -функцию:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{или} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} d\omega.$$

Качественно можно эту формулу обосновать следующим образом: воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Мы можем представить приведенный выше интеграл в виде суммы большого числа синусоид и косинусоид различных частот.

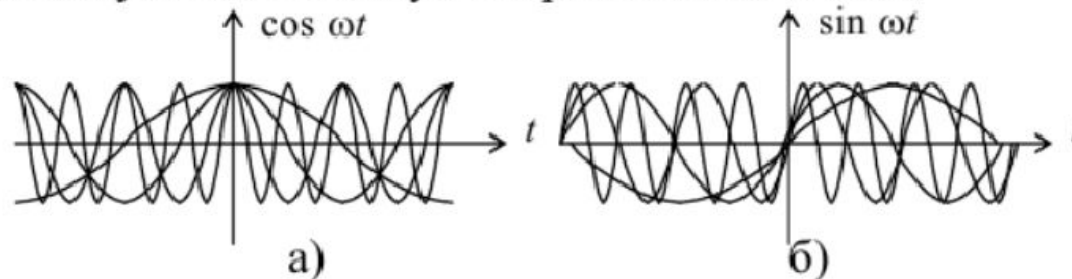


Рис. 2.14

Как видно из рисунка 2.14-б, в любой момент времени  $t$ , отличный от  $t=0$ , число положительных составляющих  $\sin \omega t$  будет равно числу отрицательных составляющих и, следовательно, их вклады могут привести к разрушительной интерференции или полной взаимной компенсации. При  $t=0$ , однако, все косинусоидальные составляющие равны  $+1$ ; их вклад суммируется, создавая в начале координат бесконечно большой пик (см. рис. 2-14-а).

2) Спектральная плотность постоянного во времени сигнала.

$$U(t) = E = \text{const},$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \delta(\omega),$$

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = 2\pi E \delta(\omega)}.$$

(2.36)

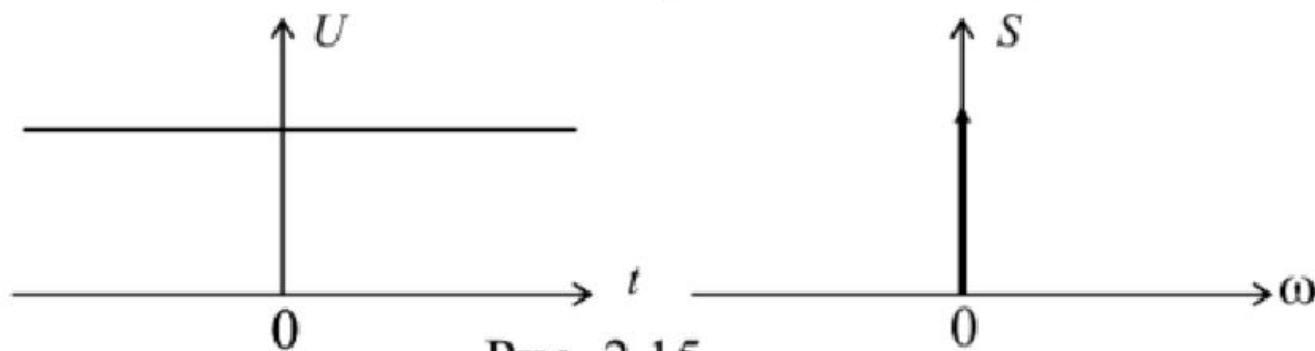


Рис. 2.15

3) Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала  $U(t) = \exp(j\omega_0 t)$  может быть определена следующим образом:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0),$$

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}. \quad (2.37)$$

Спектр несимметричен относительно  $\omega=0$ .

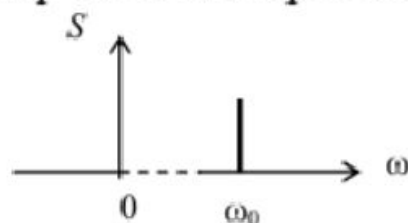


Рис. 2.16

4) Спектральную плотность гармонического сигнала  $U(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$  определим воспользовавшись линейностью преобразования Фурье и спектральной плотностью комплексной экспоненты.

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]}. \quad (2.38)$$

Спектр симметричен относительно  $\omega=0$ .

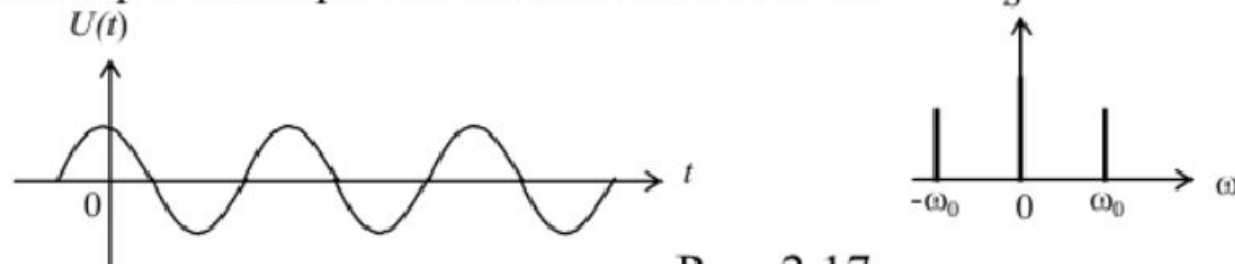


Рис. 2.17

## 2.5. Спектральная плотность периодического сигнала

Найдем спектральную плотность периодического  $U(t)$  сигнала с периодом  $T$  —  $U(t) = U(t \pm T)$ .

Экспоненциальный ряд Фурье для периодического сигнала  $U(t)$   
 $U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$ , где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  — основная частота,  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Коэффициенты

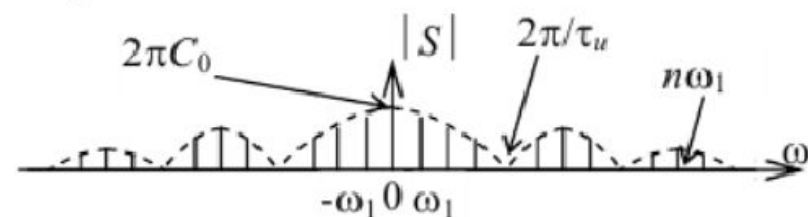
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Но при этом, по определению, спектральная плотность

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - n\omega_1)t} dt = \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1), \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \boxed{\dot{S}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1)}. \quad (2.39)$$

Таким образом, спектральная плотность периодического сигнала представляется на оси частот последовательностью  $\delta$  — функций, существующих на частотах  $\omega = n\omega_1$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), с интенсивностью (площадью)  $2\pi C_n$ , определяемой видом одиночного сигнала  $U(t)$ .



На рис. 2.18 показан спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов (пунктиром — спектр одиночного видеоимпульса)

Рис.2.18

Если сигнал — это периодическая последовательность  $\delta$  импульсов, то

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T}. \quad \text{Отсюда (из 2.39) спектр периодической}$$

последовательности  $\delta$  импульсов равен

$$\dot{S}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1). \quad (2.40)$$

Этот спектр изображен на рис. 2.19.

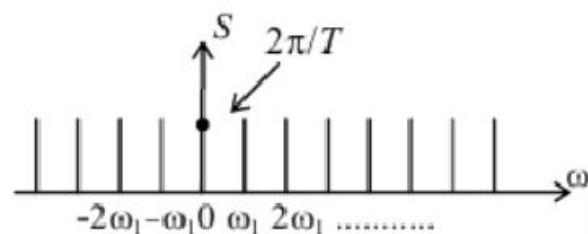


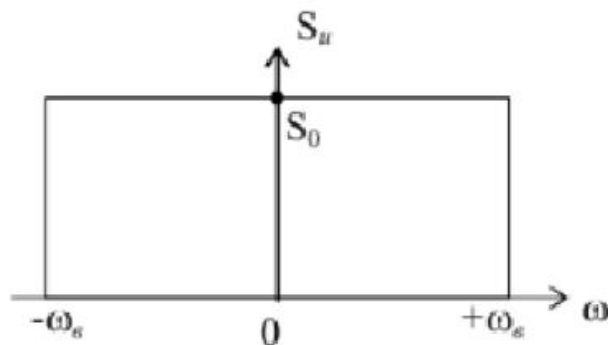
Рис. 2.19

### 3. Дискретизация сигнала

При переходе от аналогового сигнала к цифровому осуществляются три специфических преобразования: дискретизация по времени, квантование по уровню и кодирование. Под дискретизацией понимают процесс замены непрерывного сигнала дискретной последовательностью отсчетов через интервал  $\Delta t$ .

#### 3.1. Ортогональные сигналы с ограниченным спектром

Рассмотрим идеальный низкочастотный (НЧ) сигнал, т.е. сигнал  $U(t)$ , имеющий постоянную вещественную спектральную плотность в диапазоне  $-\omega_g, +\omega_g$ .



$$S_u(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_g, \\ S_0, & -\omega_g \leq \omega \leq \omega_g, \\ 0, & \omega > \omega_g. \end{cases} \quad (3.1)$$

Рис. 3.1

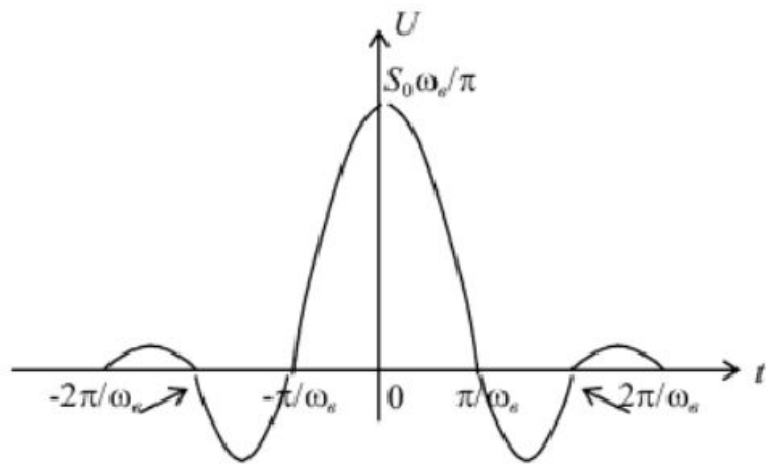


Рис. 3.2

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_s}^{+\omega_s} e^{j\omega t} d\omega;$$

т.к.  $\int_{-\omega_s}^{+\omega_s} e^{j\omega t} d\omega = 2 \frac{\sin \omega_s t}{t},$  то

$$U(t) = \frac{S_0 \omega_s}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s t}. \quad (3.2)$$

Если НЧ сигнал запаздывает на  $\Delta t$ , то  $V(t) = \frac{S_0 \omega_s}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_s (t - \Delta t)}{\omega_s (t - \Delta t)},$  (3.2')

тогда по свойству преобразования Фурье задержанного сигнала имеем

$$\dot{S}_v(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_s, \\ S_0 e^{-j\omega \Delta t}, & -\omega_s \leq \omega \leq \omega_s, \\ 0, & \omega > \omega_s. \end{cases} \quad (3.1')$$

Рассмотрим эти два идеальных НЧ сигнала  $\dot{U}(t)$  и  $\dot{V}(t)$ . Оба имеют одинаковые параметры  $S_0$  и  $\omega_s$ , однако сигнал  $\dot{V}(t)$  запаздывает по отношению к сигналу  $\dot{U}(t)$  на время  $\Delta t$ , так, что его спектральная плотность  $\dot{S}_v(\omega) = S_u(\omega) e^{-j\omega \Delta t}$ .

Скалярное произведение этих сигналов, полученное по обобщенной формуле

Рэлея (2.34),  $(\dot{U}\dot{V}) = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u \dot{S}_v^*),$   $(UV) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u \dot{S}_v^* d\omega = \frac{S_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_s}^{\omega_s} e^{j\omega \Delta t} d\omega = \frac{S_0^2 \omega_s}{\pi} \frac{\sin \omega_s \Delta t}{\omega_s \Delta t}.$

Обозначим  $\Delta t = t_k$ .

Скалярное произведение обращается в нуль, и эти сигналы оказываются ортогональными, если временной сдвиг между ними удовлетворяет условию

$$\omega_s t_k = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \Delta t = t_k = k \frac{\pi}{\omega_s}.$$

Минимально возможный сдвиг, приводящий к ортогонализации, получается при  $k = \pm 1$ . Причем, максимум одного сигнала всегда совпадает с нулем другого.

$$t_1 = \pm \frac{\pi}{\omega_s} = \pm \frac{1}{2F_s}. \quad (3.3)$$

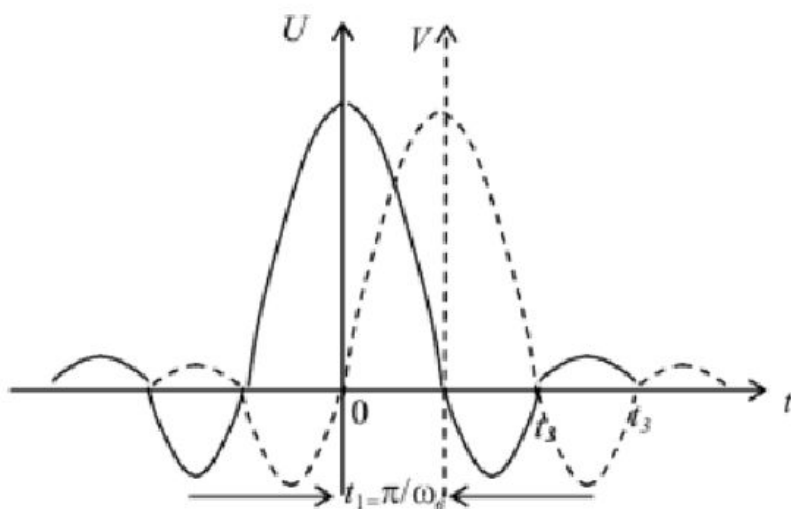


Рис. 3.3

Важно — удалось не просто добиться ортогональности двух сигналов. Указан путь построения бесконечного ортогонального базиса, который может служить координатной системой для разложения произвольного сигнала со спектром, ограниченным частотой  $\omega_s$ .



### 3.2. Теорема Котельникова для сигнала с ограниченным спектром

Для создания ортонормированного базиса достаточно рассмотреть функцию

$l_0(t) = A \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s t}$ , создающую ортогональный базис и определить амплитуду  $A$ ,

чтобы норма была единична. По определению, энергия сигнала равна квадрату

нормы  $E = \|l_0\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} l_0^2 dt = \frac{A^2}{\omega_s^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\omega_s t}{t^2} dt = \frac{A^2}{\omega_s^2} \pi \omega_s = \frac{\pi A^2}{\omega_s}$ .

Итак, функция  $l_0(t)$  будет ортонормированной, т.е. ( $E=1$ ), если  $A = \sqrt{\frac{\omega_s}{\pi}}$ .

Бесконечная совокупность функций

$$l_k(t, \omega_s) = \sqrt{\frac{\omega_s}{\pi}} \frac{\sin \omega_s (t - t_k)}{\omega_s (t - t_k)}, \quad (3.4)$$

где  $t_k = k \frac{\pi}{\omega_s} = k \frac{1}{2F_s}$ , образуют базис Котельникова в линейном пространстве НЧ

сигналов со спектрами, ограниченными сверху значением  $\omega_s$ . Отдельная функция

$l_k$  называется отсчетной функцией базиса Котельникова.

Если  $\dot{U}(t)$  — произвольный сигнал, спектральная плотность которого отлична

Если  $\dot{U}(t)$  — произвольный сигнал, спектральная плотность которого отлична от нуля лишь в полосе частот  $-\omega_g \leq \omega \leq \omega_g$ , то его можно разложить в обобщенный ряд Фурье по базису Котельникова

$$\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k l_k(t, \omega_g).$$

Коэффициентами ряда служат, как известно, скалярные произведения разлагаемого сигнала и  $k$ -ой отсчетной функции  $C_k = (\dot{U}(t) \cdot l_k)$ . По обобщенной формуле Рэлея (2.34)  $C_k = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u(\omega) \cdot \dot{S}_{l_k}(\omega))$ . Т.е.

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega) \dot{S}_{l_k}^*(\omega) d\omega \quad (3.5)$$

Коэффициенты  $C_k$  находим по аналогии с выражениями (3.2') и (3.1') т.к.

$$l_k(t) = \sqrt{\frac{\omega_g}{\pi}} \frac{\sin \omega_g(t - t_k)}{\omega_g(t - t_k)}, \text{ где } t_k = \frac{k}{2F_g},$$

то для  $k$ -ой отсчетной функции имеем  $\dot{S}_{l_k} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \exp\{-j\omega t_k\}$  (здесь, в

соответствии с теоремой запаздывания, экспонента показывает сдвиг отсчетной

функции во времени). Тогда из (3.5) имеем

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \dot{S}_u(\omega) \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \exp(j\omega t_k) d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \dot{S}_u(\omega) \cdot [\exp j\omega t_k] d\omega \right\}.$$

Т.к.  $t_k = \frac{k\pi}{\omega_g}$  —  $k$ -ая отсчетная точка, то фигурная скобка есть не что иное, как  $\dot{U}(t_k)$ .

Таким образом,  $C_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \dot{U}(t_k)$ . Следовательно, т.к.  $\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k l_k(t)$ , используя (3.4),

имеем ряд Котельникова

$$\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \frac{\sin \omega_g(t-t_k)}{\omega_g(t-t_k)}. \quad (3.6)$$

Теорема: Произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше  $F_g$  (Гц), может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени  $\Delta t = 1/2 F_g$  (с).

### 3.3. Спектр дискретизированного сигнала

Дискретизированный сигнал можно рассматривать как результат умножения первоначального непрерывного сигнала  $U(t)$  на сигнал  $i(t)$ , состоящий из бесконечного числа единичных  $\delta$ -импульсов

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{\delta}),$$

где  $T_{\delta}$  – период дискретизации.

Эта операция дает дискретизированный сигнал

$$U_i(t) = U(t) \cdot i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(nT_{\delta}) \cdot \delta(t - nT_{\delta}).$$

Воспользовавшись теоремой о свертке

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega - g) \cdot S_i(g) dg,$$

где  $S_u(\dots)$  – преобразование Фурье от функции  $U(t)$ ,  $S_i(\dots)$  – преобразование Фурье от функции  $i(t)$ .

Преобразование Фурье ряда, состоящего из  $\delta$ -импульсов, как было показано выше (см. (2.38)),

$$S_i(g) = \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(g - n\omega_1) = \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(g - \frac{2\pi n}{T_\delta}\right),$$

отсюда

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega - g) \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(g - \frac{2\pi n}{T_\delta}\right) dg = \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_u\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_\delta}\right).$$

Следовательно, дискретизированный, или импульсно-модулированный сигнал  $U_i(t)$  имеет периодическое с периодом  $F_\delta = \frac{1}{T_\delta}$  преобразование Фурье  $S(\omega)$ ,

интенсивность которого уменьшается в  $T_d$  раз. Если спектр  $S_u(\omega)$  при  $F > F_s$ , обращается в ноль и  $T_d \leq \frac{1}{2F_s}$  или  $F_d \geq 2F_s$ , то  $S(\omega)$  является просто периодически повторяемой функцией  $S_u(\omega)$  (рис.3.5). Если  $T_d > \frac{1}{2F_s}$ , то имеет место эффект наложения частот (рис. 3.6).

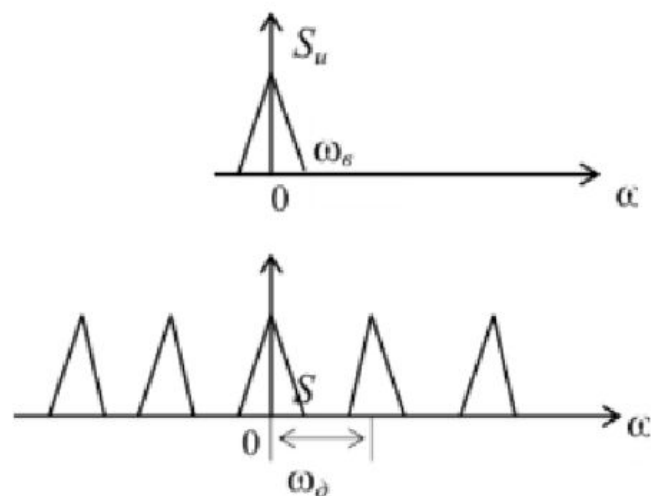


Рис. 3.5

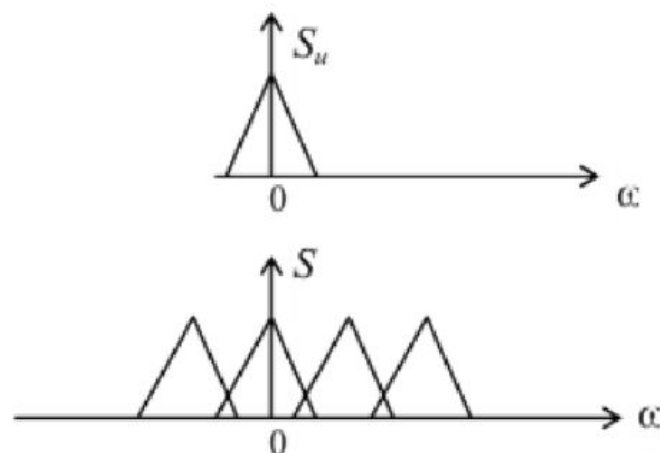


Рис. 3.6



**Успешного усвоения**

