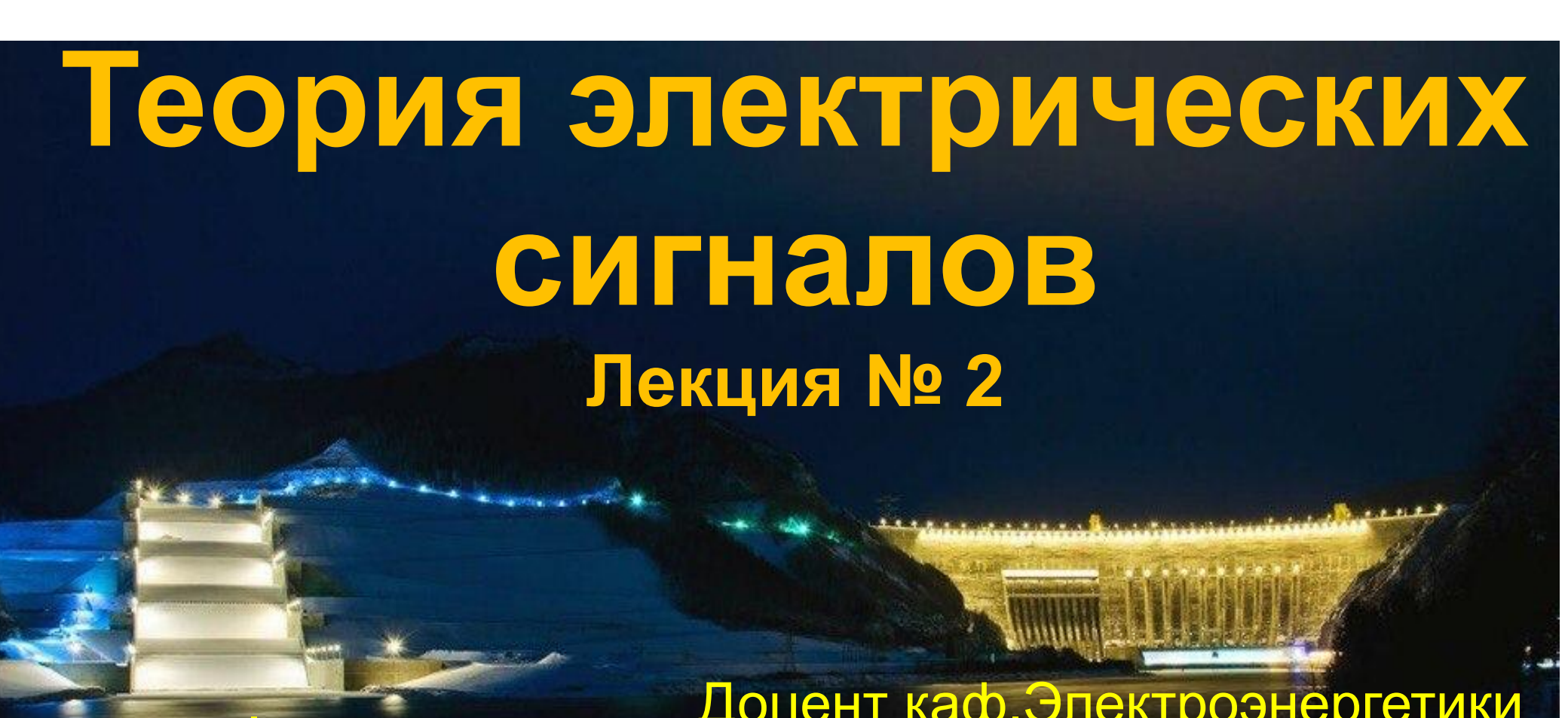
Теория электрических сигналов

Лекция № 2



.

Доцент каф.Электроэнергетики
и автоматики,
канд. техн. наук, доцент
Кочетков Максим
Владимирович
m-kochetkov@yandex.ru 8 9131763317

Лекция 2

2.4. Спектральное представление непериодических сигналов

Пусть $U(t)$ одиночный импульс конечной длительности. Создадим периодическую последовательность с периодом T и представим ее комплексным рядом Фурье (см.2.18).

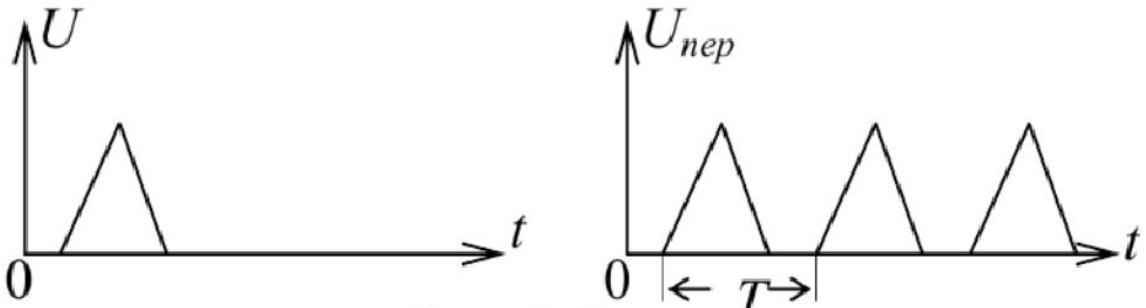


Рис. 2.7

$$\dot{U}_{пер}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \qquad (2.21)$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{U}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \qquad (2.22)$$

Для того, чтобы перейти к спектральному представлению единичного импульса, устремим $T \to \infty$.

Из (2.22) видно, что при $T \to \infty$ получаем:

- бесконечно-малые амплитудные коэффициенты C_n (из-за наличия T в знаменателе);
- частоты соседних гармоник $n\omega_1$ и $(n+1)\omega_1$ становятся сколь угодно близкими (т.к. $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$);
- число гармоник, входящих в ряд Фурье, становится бесконечно большим, т.к. при $T \to \infty$, основная частота $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \to 0$, т.е. спектр становится сплошным.

Подставив (2.22) в (2.21), получим:

$$\dot{U}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\dot{U}(x)e^{-jn\omega_1 x}dx\right)e^{jn\omega_1 t}\,\frac{\omega_1}{2\pi},$$

т.к. $T\to\infty$, то $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}\to 0$, поэтому в этом выражении можно заменить $\omega_1\to d\omega$; $n\omega_1\to\omega$; $\sum\to\int$. Таким образом, переходим к двойному интегралу Фурье:

$$\dot{U}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(x)e^{-j\omega x}dx\right]d\omega\,.$$

Здесь обозначим $\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(x)e^{-j\omega x}dx=\dot{S}(\omega)$

или

$$\boxed{\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(t)e^{-j\omega t}dt} \qquad (2.23).$$

$\dot{S}(\omega)$ - спектральная плотность сигнала $\dot{U}(t)$ или прямое преобразование Фурье, или Фурье-образ сигнала.

Отсюда:

$$\dot{U}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (2.24)$$

Это обратное преобразование Фурье.

Физический смысл $\dot{S}(\omega)$

Спектральная плотность – это отношение комплексной амплитуды малого интервала частот вблизи частоты, равной $\pm f_0$, к длине этого интервала. Причем вклад дают как положительные, так и отрицательные частоты, образующие окрестность $\pm f_0$.

Спектральная плотность — комплекснозначная функция частоты, одновременно несущая информацию об амплитуде и о фазе элементарных синусоид.

Таким образом, из (2.23) и (2.24) следует, что один и тот же сигнал допускает две совершенно равноправные математические модели — временную и частотную.

Условия существования $S(\omega)$ - это абсолютная интегрируемость сигнала, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{U}(t)|dt < \infty. \qquad (2.25)$$

Можно записать $\dot{S}(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |\dot{S}(\omega)|e^{-j\Theta(\omega)}$, где:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t)\cos\omega t \cdot dt;$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t)\sin\omega t \cdot dt.$$

Тогда амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) сигнала – $|S(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$;

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) сигнала - $\Theta(\omega) = \text{arctg}\,\dfrac{B(\omega)}{A(\omega)}$.

2.4.1. Основные свойства преобразований Фурье

Итак, между сигналом $\dot{U}(t)$ и его спектральной плотностью $\dot{S}(\omega)$ существует однозначное соответствие, устанавливаемое соотношениями (2.23) и (2.24). Для практических целей важна связь между различными преобразованиями сигнала и соответствующими изменениями спектра. Рассмотрим основные из этих преобразований.

1) Сложение сигналов.

Если

$$\dot{U}(t)=\dot{U}_1(t)+\dot{U}_2(t)+\ldots+\dot{U}_n(t),$$

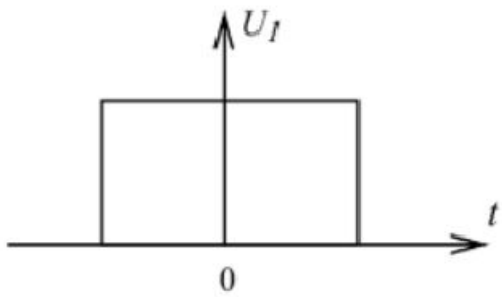
то

$$\dot{S}(\omega)=\dot{S}_1(\omega)+\dot{S}_2(\omega)+\ldots+\dot{S}_n(\omega), \qquad (2.26)$$

т.е. преобразование Фурье линейно.

Пример: сигнал+помеха

2) Сдвиг сигналов во времени (теорема запаздывания).



$$\dot{U}_2(t)=\dot{U}_1(t-t_0).$$

$$\dot{S}_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}_1(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=$$

обозначим $\theta=t-t_0$, $dt=d\theta$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}U_1(\theta)e^{-j\omega(\theta+t_0)}d\theta=e^{-j\omega t_0}\dot{S}_1(\omega);$$

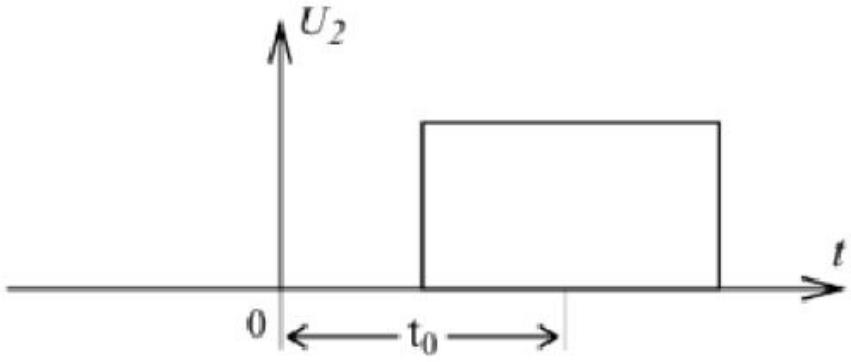


Рис.2.8

$$\dot{S}_2(\omega) = e^{-j\omega t_0}\,\dot{S}_1(\omega) \qquad (2.27)$$

Отсюда видно, что АЧХ сигнала остается постоянной, но меняется его фазовая характеристика.

Пример: фильтрация РЛС сигналов.

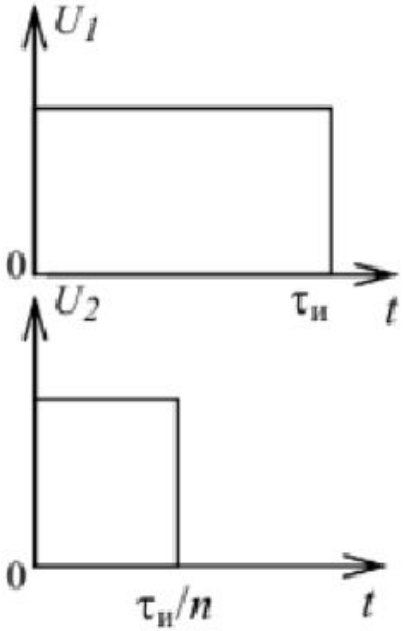


Рис.2.9

3) Изменение масштаба времени.

$\dot{U}_2(t) = \dot{U}_1(nt)$,

$n>1$ – сжатие сигнала,

$n<1$ – расширение сигнала

$$\dot{S}_2(\omega) = \int_0^{\tau_и/n} \dot{U}_2(t) e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^{\tau_и/n} \dot{U}_1(nt) e^{-j\omega t}\,dt.$$

После замены переменных $nt = \theta$, $dt = d\dfrac{\theta}{n}$ отсюда имеем

$$\dot{S}_2(\omega)=\frac{1}{n}\int_0^{\tau_u}\dot{U}_1(\theta)e^{-j\frac{\omega}{n}\theta}d\theta=\frac{1}{n}\dot{S}_1\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

$$\boxed{\dot{S}_2(\omega)=\frac{1}{n}\dot{S}_1\left(\frac{\omega}{n}\right)}, \qquad (2.28)$$

т.е при сжатии сигнала в n раз на временной оси во столько же раз расширяется его спектр и уменьшается интенсивность спектральной плотности.

Из этого свойства и примеров по определению спектральных плотностей импульсов видно, что чем меньше длительность сигнала, тем шире его спектр.

Для установления количественных соотношений между указанными параметрами необходимо определиться с понятием длительности сигнала и ширины его спектра. В большинстве случаев выбор произвольный.

Например:

- для прямоугольного импульса ширина спектра принимается как основание главного лепестка $f_в\tau_и=1$;
- для колоколообразного импульса ширина берется на уровне 0,606 от максимального значения;
- можно также использовать энергетический критерий (например 90% энергии и т.д.). В результате $f_в\tau_и=const$ и зависит от формы импульса. Минимальная $f_в\tau_и=0{,}5$ у колоколообразного (гауссового) импульса.

Пример: спектральный анализ с временной компрессией.

4) Произведение двух сигналов.

$$U(t)=f(t)\cdot g(t),$$

где

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{F}(\omega)e^{j\omega t}d\omega,$$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Найдем прямое преобразование Фурье:

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}U(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(x)e^{jxt}dx\right]e^{-j\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j(\omega-x)t}dt\right]dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(x)\dot{F}(\omega-x)dx,$$

т.е.

$$\boxed{\dot{S}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{G}(x)\dot{F}(\omega-x)dx} \qquad (2.29)$$

- свертка спектров сомножителей.

Примеры: преобразование частоты; исследование флуктуаций; получение спектра радиоимпульса как произведение синусоидального сигнала $\sin \omega t$ на прямоугольный импульс.

5) Спектральная плотность производной сигнала и его интеграла.

$$f(t)=\frac{dU}{dt},$$

$$\dot{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dU}{dt}e^{-j\omega t}dt\,.$$

Интегрируя по частям $\int U'Vdt = UV - \int UV'dt$, получим

$$\dot{F}(\omega)= U(t)\cdot e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega\int_{-\infty}^{\infty}U(t)e^{-j\omega t}dt\,.$$

Если выполняется условие $\lim\limits_{t\to\pm\infty} U(t)=0$, то

$$\boxed{\dot{F}(\omega)= j\omega\dot{S}(\omega)}, \qquad (2.30)$$

где $j\omega=\omega\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ (т.к. по формуле Эйлера $e^{j\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}=j$);

$\dot{S}(\omega)=\left|\dot{S}(\omega)\right|e^{-j\varphi(\omega)}$, $\left|\dot{S}(\omega)\right|$ - амплитудный спектр и $\varphi(\omega)$ – фазовый спектр исходного сигнала $U(t)$, или

$$\boxed{\dot{F}(\omega)=\left|\omega\dot{S}(\omega)\right|e^{-j\left[\varphi(\omega)-\frac{\pi}{2}\right]}}, \qquad (2.31)$$

т.е. изменится амплитудный спектр, а фазовый спектр меняется на $\frac{\pi}{2}$ на всех частотах.

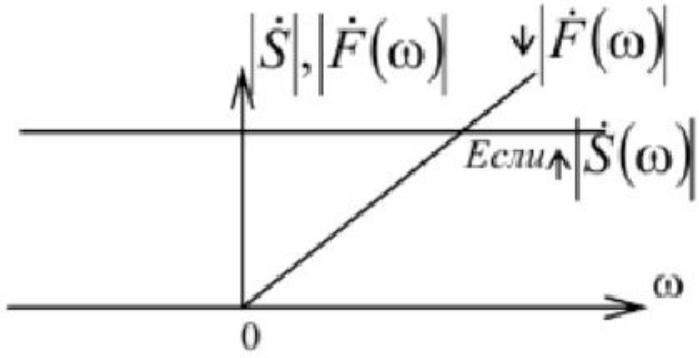


Рис. 2.10

Причем дифференцирование поднимает верхние частоты и занижает низкие частоты.

Аналогично можно найти спектр интеграла $g(t)=\int U(t)dt$.

Представив $U(t)=\frac{dg}{dt}$, следовательно, $\dot{S}(\omega)=j\omega\dot{G}(\omega)$, отсюда

$$\boxed{\dot{G}(\omega)=\frac{1}{j\omega}\dot{S}(\omega)}=\frac{\dot{S}(\omega)}{\omega}e^{-j\left[\varphi(\omega)+\frac{\pi}{2}\right]} \qquad (2.32)$$

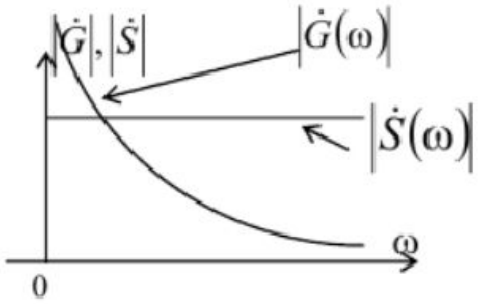


Рис. 2.11

6) Теорема Парсеваля.

Известно, что энергия колебания на единичном сопротивлении $E = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t)dt$.

Найдем соотношение, позволяющее определить энергию колебания $U(t)$ посредством использования его спектра. Для этого воспользуемся прямым преобразованием Фурье

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Умножим обе части данного равенства на $U(t)$ и проинтегрируем в бесконечных пределах

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{j\omega t}dt\right]d\omega,$$

но

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{j\omega t}dt = \dot{S}^*(\omega),$$

таким образом $E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega)\dot{S}^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot{S}(\omega)\right|^2 d\omega$.

Т.к. квадрат модуля есть четная функция ω, то, удвоив значение интеграла, можно проводить интегрирование в пределах 0 — ∞.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left|\dot{S}(\omega)\right|^2 d\omega \qquad (2.33)$$

Из этого соотношения следует, что на бесконечно малый участок частот $d\omega$ приходится энергия $\Delta E = \frac{\left|\dot{S}(\omega)\right|^2}{\pi} d\omega = dE \cdot d\omega$,

$\left|\dot{S}(\omega)\right|^2$ — энергетический спектр сигнала.

Величина $dE = \frac{\left|\dot{S}(\omega)\right|^2}{\pi}$ — спектральная плотность энергии колебания $U(t)$.

Полная энергия сигнала равна сумме энергий всех его частотных составляющих.

Пример - спектральный анализатор.

7) Обобщенная формула Рэлея.

Пусть два сигнала $U(t)$ и $V(t)$ (в общем случае комплексные) определены своими обратными преобразованиями Фурье:

$$\dot{V}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}_v(\omega)e^{j\omega t}d\omega;\qquad \dot{V}^*(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_v^*(\omega)e^{-j\omega t}d\omega,$$

$$\dot{U}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}_u(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Найдем скалярное произведение

$$\left(\dot{U},\dot{V}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(t)\dot{V}^*(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(t)\left[\dot{S}_v^*(\omega)e^{-j\omega t}d\omega\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}_v^*(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(t)e^{-j\omega t}dt\right]d\omega$$

Отсюда $\left(\dot{U},\dot{V}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}_u(\omega)\dot{S}_v^*(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\left(\dot{S}_u\dot{S}_v\right)$

Итак,

$$\boxed{\left(\dot{U},\dot{V}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\dot{S}_u\dot{S}_v\right)}$$ — Формула Рэлея (2.34)

Скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента $\frac{1}{2\pi}$ равно скалярному произведению их спектральных плотностей.

Пример - ортогональность неперекрывающихся по спектру сигналов.

2.4.2 Спектральная плотность некоторых неинтегрируемых сигналов

Математические модели многих сигналов не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости (2.25) и поэтому метод преобразований Фурье в обычном виде к ним не применим. Однако можно говорить о спектральных плотностях таких сигналов, если допустить, что эти плотности описываются обобщенными функциями.

1) Спектральная плотность δ функции.

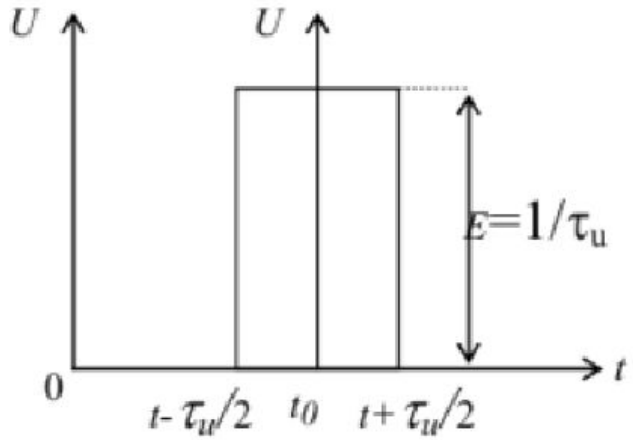


Рис. 2.12

$$U(t)=\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases}$$

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t_0}\ ,$$

$$\boxed{S(\omega)=1\cdot e^{-j\omega t_0}},\qquad (2.35)$$

$|S(\omega)|=1$. (см. рис. 2.13)

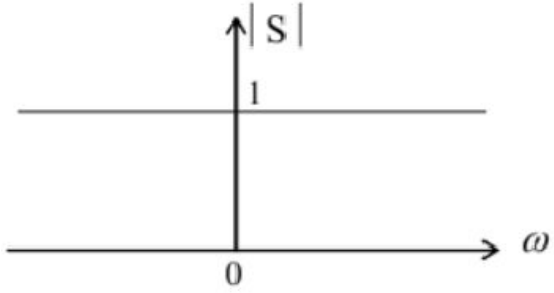


Рис. 2.13

По свойству преобразования Фурье о смещенном во времени сигнале можно представить δ-функцию:

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \text{ или } \delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm j\omega t}d\omega.$$

Качественно можно эту формулу обосновать следующим образом: воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t\ .$$

Мы можем представить приведенный выше интеграл в виде суммы большого числа синусоид и косинусоид различных частот.

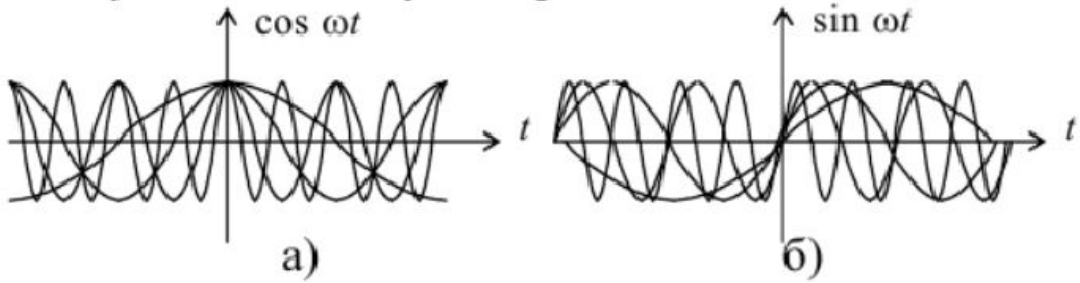


Рис. 2.14

Как видно из рисунка 2.14-б, в любой момент времени t, отличный от t=0, число положительных составляющих sin ωt будет равно числу отрицательных составляющих и, следовательно, их вклады могут привести к разрушительной интерференции или полной взаимной компенсации. При t=0, однако, все косинусоидальные составляющие равны +1; их вклад суммируется, создавая в начале координат бесконечно большой пик (см. рис. 2-14-а).

2) Спектральная плотность постоянного во времени сигнала.

$$U(t) = E = const,$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \delta(\omega),$$

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = 2\pi E \delta(\omega)}. \qquad (2.36)$$

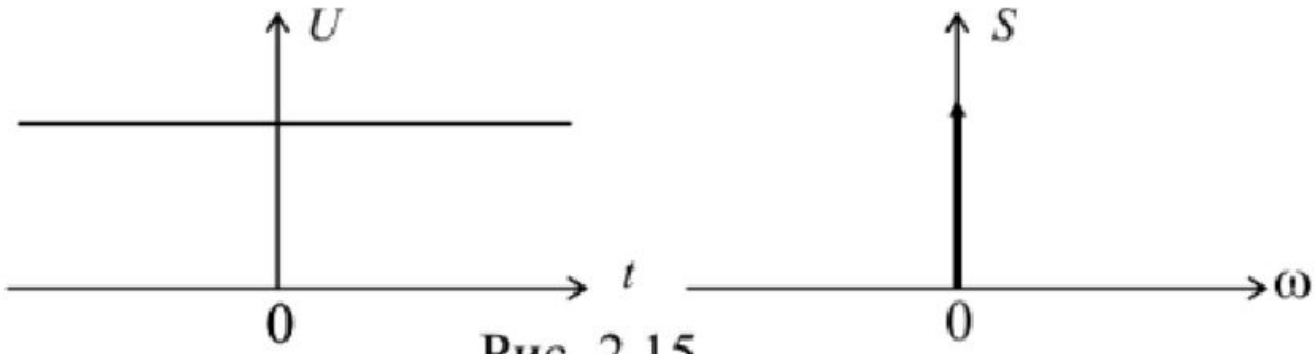


Рис. 2.15

3) Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала $U(t)=\exp(j\omega_0 t)$ может быть определена следующим образом:

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}U(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=2\pi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0),$$

$$\boxed{\dot{S}(\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)}. \qquad (2.37)$$

Спектр несимметричен относительно ω=0.

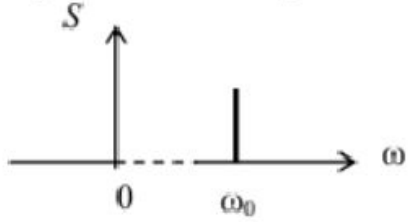


Рис. 2.16

4) Спектральную плотность гармонического сигнала $U(t)=\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)$ определим воспользовавшись линейностью преобразования Фурье и спектральной плотностью комплексной экспоненты.

$$\boxed{\dot{S}(\omega)=\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]}. \qquad (2.38)$$

Спектр симметричен относительно ω=0.

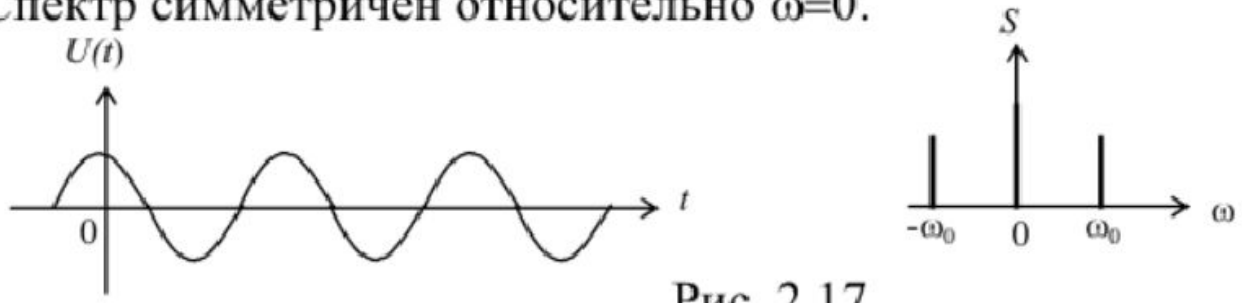


Рис. 2.17

2.5. Спектральная плотность периодического сигнала

Найдем спектральную плотность периодического $U(t)$ сигнала с периодом T — $U(t)=U(t\pm T)$.

Экспоненциальный ряд Фурье для периодического сигнала $U(t)$ $U(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$, где $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$ — основная частота, n=0,±1,±2,.... Коэффициенты

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} U(t)e^{-jn\omega_1 t}dt\,.$$

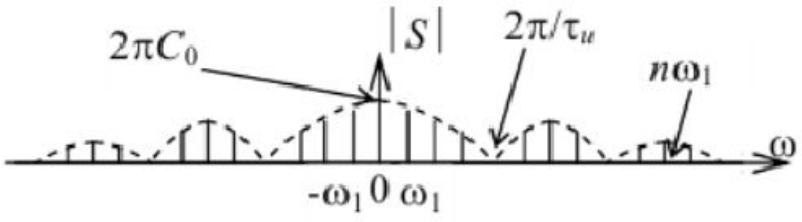
Но при этом, по определению, спектральная плотность

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}\cdot e^{-j\omega t}dt=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-n\omega_1)t}dt=$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\delta(\omega-n\omega_1),$$

т.е. $$\boxed{\dot{S}(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\delta(\omega-n\omega_1)}. \qquad (2.39)$$

Таким образом, спектральная плотность периодического сигнала представляется на оси частот последовательностью δ — функций, существующих на частотах $\omega=n\omega_1$ ($n=0,\pm1,\pm2,...$), с интенсивностью (площадью) $2\pi C_n$, определяемой видом одиночного сигнала $U(t)$.



На рис. 2.18 показан спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов (пунктиром – спектр одиночного видеоимпульса)

Рис.2.18

Если сигнал – это периодическая последовательность δ импульсов, то $C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{1}{T}$. Отсюда (из 2.39) спектр периодической последовательности δ импульсов равен

$$\dot{S}(\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1). \qquad (2.40)$$

Этот спектр изображен на рис. 2.19.

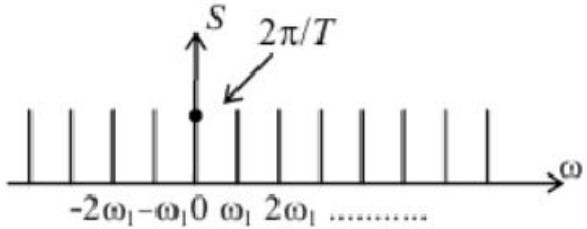


Рис. 2.19

3. Дискретизация сигнала

При переходе от аналогового сигнала к цифровому осуществляются три специфических преобразования: дискретизация по времени, квантование по уровню и кодирование. Под дискретизацией понимают процесс замены непрерывного сигнала дискретной последовательностью отсчетов через интервал Δt.

3.1. Ортогональные сигналы с ограниченным спектром

Рассмотрим идеальный низкочастотный (НЧ) сигнал, т.е. сигнал $U(t)$, имеющий постоянную вещественную спектральную плотность в диапазоне $-\omega_в$, $+\omega_в$.

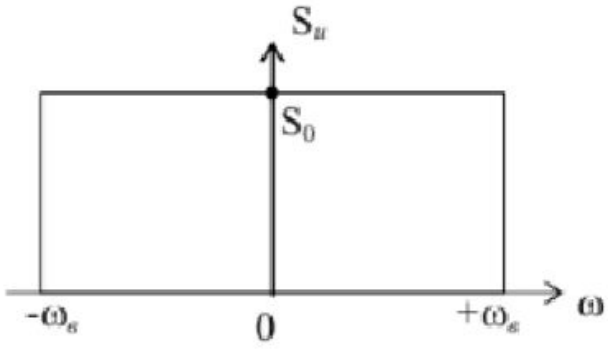


Рис. 3.1

$$S_u(\omega)=\begin{cases}0, & \omega<-\omega_в,\\ S_0, & -\omega_в\le\omega\le\omega_в,\\ 0, & \omega>\omega_в.\end{cases} \qquad (3.1)$$

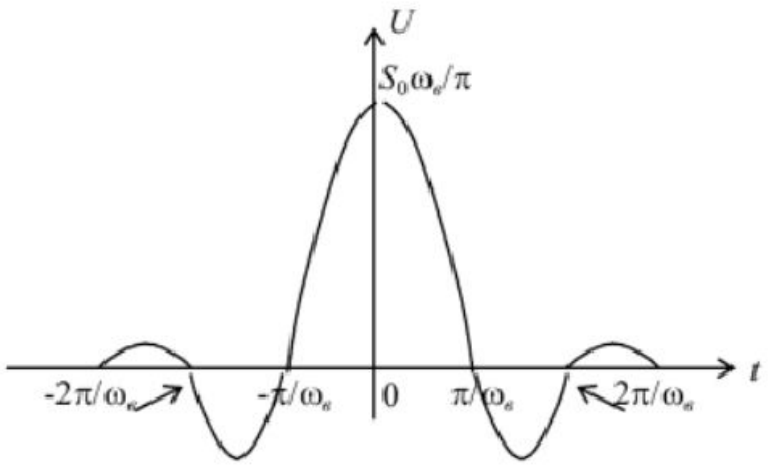


Рис. 3.2

$$U(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_и(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{S_0}{2\pi}\int_{-\omega_в}^{+\omega_в}e^{j\omega t}d\omega;$$

т.к. $\int_{-\omega_в}^{+\omega_в}e^{j\omega t}d\omega=2\frac{\sin\omega_в t}{t}$, то

$$U(t)=\frac{S_0\omega_в}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_в t}{\omega_в t}. \qquad (3.2)$$

Если НЧ сигнал запаздывает на Δt, то $V(t)=\frac{S_0\omega_в}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_в(t-\Delta t)}{\omega_в(t-\Delta t)}$, (3.2')

тогда по свойству преобразования Фурье задержанного сигнала имеем

$$\dot S_v(\omega)=\begin{cases}0, & \omega<-\omega_в,\\ S_0e^{-j\omega\Delta t}, & -\omega_в\le\omega\le\omega_в,\\ 0, & \omega>\omega_в.\end{cases} \qquad (3.1')$$

Рассмотрим эти два идеальных НЧ сигнала $\dot U(t)$ и $\dot V(t)$. Оба имеют одинаковые параметры S_0 и $\omega_в$, однако сигнал $\dot V(t)$ запаздывает по отношению к сигналу $\dot U(t)$ на время Δt, так, что его спектральная плотность $\dot S_v(\omega)=S_и(\omega)e^{-j\omega\Delta t}$.

Скалярное произведение этих сигналов, полученное по обобщенной формуле Рэлея (2.34), $(\dot U\dot V)=\frac{1}{2\pi}(\dot S_и\dot S_v)$, $(UV)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot S_и\dot S_v^*d\omega=\frac{S_0^2}{2\pi}\int_{-\omega_в}^{\omega_в}e^{j\omega\Delta t}d\omega=\frac{S_0^2\omega_в}{\pi}\frac{\sin\omega_в\Delta t}{\omega_в\Delta t}$.

Обозначим $\Delta t = t_k$.

Скалярное произведение обращается в нуль, и эти сигналы оказываются ортогональными, если временной сдвиг между ними удовлетворяет условию

$$\omega_в t_k = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots),\ \Delta t = t_k = k\frac{\pi}{\omega_в}.$$

Минимально возможный сдвиг, приводящий к ортогонализации, получается при $k=\pm 1$. Причем, максимум одного сигнала всегда совпадает с нулем другого.

$$t_1 = \pm\frac{\pi}{\omega_в} = \pm\frac{1}{2F_в}. \qquad (3.3)$$

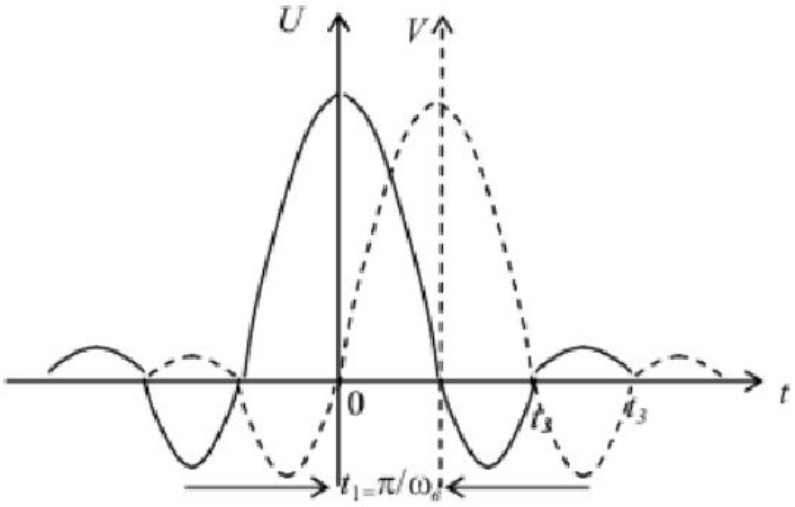


Рис. 3.3

Важно — удалось не просто добиться ортогональности двух сигналов. Указан путь построения бесконечного ортогонального базиса, который может служить координатной системой для разложения произвольного сигнала со спектром, ограниченным частотой $\omega_в$.

3.2. Теорема Котельникова для сигнала с ограниченным спектром

Для создания ортонормированного базиса достаточно рассмотреть функцию $l_0(t)=A\frac{\sin\omega_в t}{\omega_в t}$, создающую ортогональный базис и определить амплитуду A, чтобы норма была единична. По определению, энергия сигнала равна квадрату нормы $E=|l_0|^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}l_0^2dt=\frac{A^2}{\omega_в^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\omega_в t}{t^2}dt=\frac{A^2}{\omega_в^2}\pi\omega_в=\frac{\pi A^2}{\omega_в}$.

Итак, функция $l_0(t)$ будет ортонормированной, т.е. (E=1), если $A=\sqrt{\frac{\omega_в}{\pi}}$.

Бесконечная совокупность функций

$$l_k(t,\omega_в)=\sqrt{\frac{\omega_в}{\pi}}\frac{\sin\omega_в(t-t_k)}{\omega_в(t-t_k)}, \qquad (3.4)$$

где $t_k=k\frac{\pi}{\omega_в}=k\frac{1}{2F_в}$, образуют базис Котельникова в линейном пространстве НЧ сигналов со спектрами, ограниченными сверху значением $\omega_в$. Отдельная функция l_k называется отсчетной функцией базиса Котельникова.

Если $\dot{U}(t)$ — произвольный сигнал, спектральная плотность которого отлична

Если $\dot{U}(t)$ — произвольный сигнал, спектральная плотность которого отлична от нуля лишь в полосе частот $-\omega_в \le \omega \le \omega_в$, то его можно разложить в обобщенный ряд Фурье по базису Котельникова

$$\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k l_k(t, \omega_в).$$

Коэффициентами ряда служат, как известно, скалярные произведения разлагаемого сигнала и k-ой отсчетной функции $C_k = (U(t) \cdot l_k)$. По обобщенной формуле Рэлея (2.34) $C_k = \frac{1}{2\pi}\left(\dot{S}_u(\omega) \cdot \dot{S}_{l_k}(\omega)\right)$. Т.е.

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega) \dot{S}^*_{l_k}(\omega) d\omega \qquad (3.5)$$

Коэффициенты C_k находим по аналогии с выражениями (3.2') и (3.1') т.к. $l_k(t) = \sqrt{\frac{\omega_в}{\pi}} \frac{\sin \omega_в (t - t_k)}{\omega_в (t - t_k)}$, где $t_k = \frac{k}{2F_в}$,

то для k - ой отсчетной функции имеем $\dot{S}_{l_k} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_в}} \exp\{-j\omega t_k\}$ (здесь, в соответствии с теоремой запаздывания, экспонента показывает сдвиг отсчетной

функции во времени). Тогда из (3.5) имеем

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_в}^{\omega_в} \dot{S}_u(\omega)\sqrt{\frac{\pi}{\omega_в}}\exp(j\omega t_k)d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_в}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_в}^{\omega_в}\dot{S}_u(\omega)\cdot[\exp j\omega t_k]d\omega\right\}.$$

Т.к. $t_k = \frac{k\pi}{\omega_в}$ — k-ая отсчетная точка, то фигурная скобка есть не что иное, как $\dot{U}(t_k)$.

Таким образом, $C_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_в}}\dot{U}(t_k)$. Следовательно, т.к. $\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k l_k(t)$, используя (3.4), имеем ряд Котельникова

$$\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \frac{\sin\omega_в(t-t_k)}{\omega_в(t-t_k)}. \qquad (3.6)$$

Теорема: Произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше $F_в$ (Гц), может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени Δt=1/2 $F_в$ (с).

3.3. Спектр дискретизированного сигнала

Дискретизированный сигнал можно рассматривать как результат умножения первоначального непрерывного сигнала $U(t)$ на сигнал $i(t)$, состоящий из бесконечного числа единичных δ-импульсов

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_д),$$

где $T_д$ – период дискретизации.
Эта операция дает дискретизированный сигнал

$$U_i(t) = U(t) \cdot i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(nT_д) \cdot \delta(t - T_д).$$

Воспользовавшись теоремой о свертке

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega - g) \cdot S_i(g) dg,$$

где $S_u(...)$– преобразование Фурье от функции $U(t)$, $S_i(...)$– преобразование Фурье от функции $i(t)$.

Преобразование Фурье ряда, состоящего из δ-импульсов, как было показано выше (см. (2.38)),

$$S_i(g) = \frac{2\pi}{T_\partial} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(g - n\omega_1) = \frac{2\pi}{T_\partial} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(g - \frac{2\pi n}{T_\partial} \right),$$

отсюда

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega - g) \frac{2\pi}{T_\partial} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(g - \frac{2\pi n}{T_\partial} \right) dg = \frac{2\pi}{T_\partial} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_u\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_\partial} \right).$$

Следовательно, дискретизированный, или импульсно-модулированный сигнал $U_i(t)$ имеет периодическое с периодом $F_\partial = \frac{1}{T_\partial}$ преобразование Фурье $S(\omega)$,

интенсивность которого уменьшается в $T_д$ раз. Если спектр $S_и(\omega)$ при $F>F_в$, обращается в ноль и $T_д \le \frac{1}{2Fв}$ или $F_д \ge 2F_в$, то $S(\omega)$ является просто периодически повторяемой функцией $S_и(\omega)$ (рис.3.5). Если $T_д > \frac{1}{2Fв}$, то имеет место эффект наложения частот (рис. 3.6).

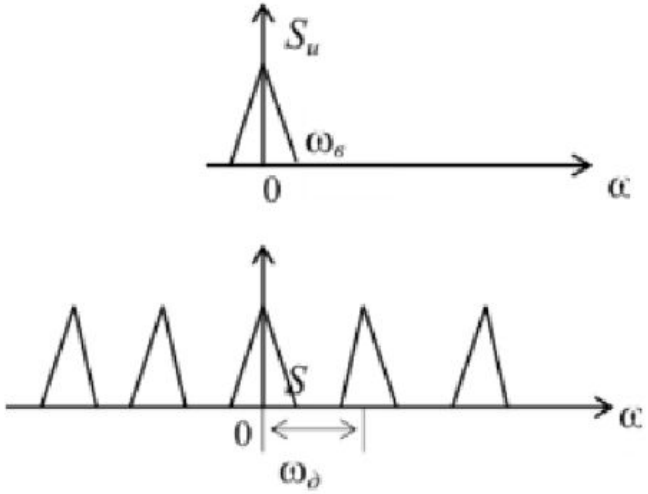


Рис. 3.5

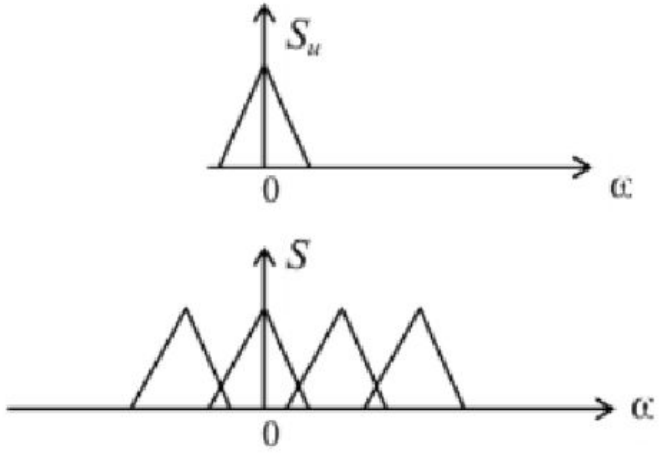


Рис. 3.6

Успешного усвоения