

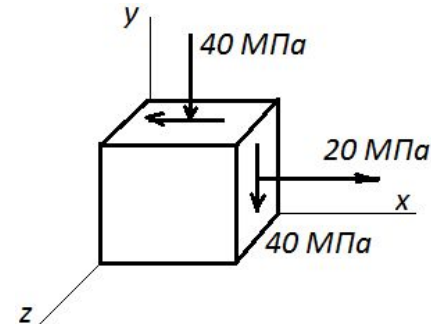
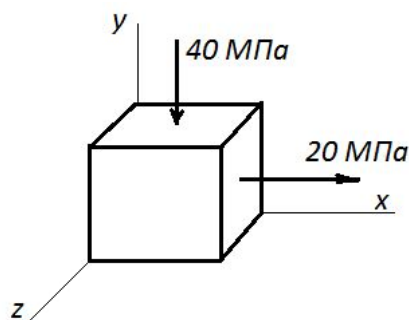
# Напряженное и деформированное состояния в точке

# Напряженное состояние в точке

- Напряженное состояние в точке
- Виды напряженного состояния
- Главные площадки и главные напряжения
- Плоское напряженное состояние
- Круги напряжений

# Напряженное состояние в точке

- Напряженное состояние в точке характеризуется компонентами напряжений, действующих на гранях выделенного элемента объема
- Касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и направлены от ребра или к ребру
- Главные напряжения действуют на главных площадках
- В главных площадках отсутствуют касательные напряжения



# Виды напряженного состояния

- **Одноосное** (линейное)

растяжение  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

сжатие  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$

- \* **Двухосное** (плоское)

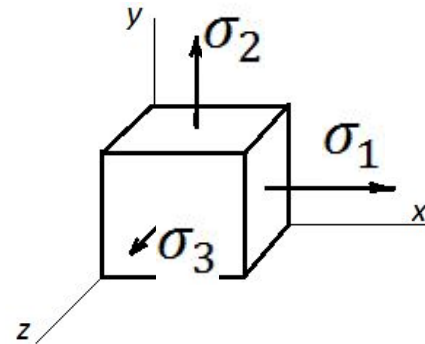
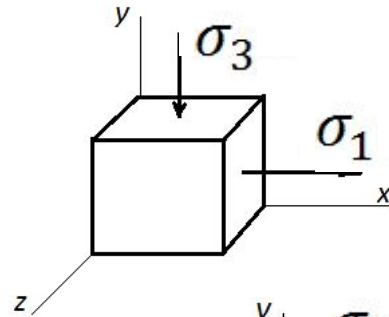
$\sigma_2 = 0, \sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0$

$\sigma_1 = 0, \sigma_2, \sigma_3 < 0$

$\sigma_3 = 0, \sigma_1, \sigma_2 > 0$

- \* **Трёхосное** (объемное)

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$



# Двухосное напряженное состояние в точке

Напряжения в наклонных площадках

$$\sigma_{max} = \sigma_x \quad \sigma_{min} = \sigma_y$$

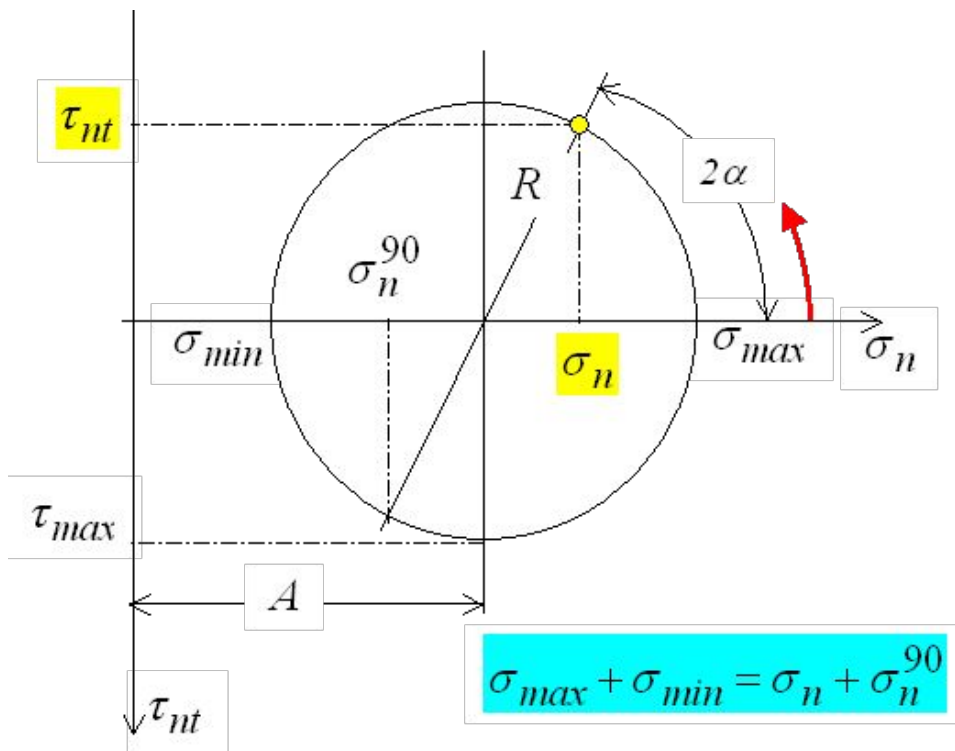
$$\sigma_n = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos(2\alpha)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \sin(2\alpha)$$

$$(x - A)^2 + y^2 = R^2$$

# Двухосное напряженное состояние в точке

- Круги напряжений



$$A = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$R = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

# Напряженное состояние в точке

- Вычисление главных напряжений

$$\sigma_{max/min} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Определение положения главных площадок

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

# Задачи на плоское НС

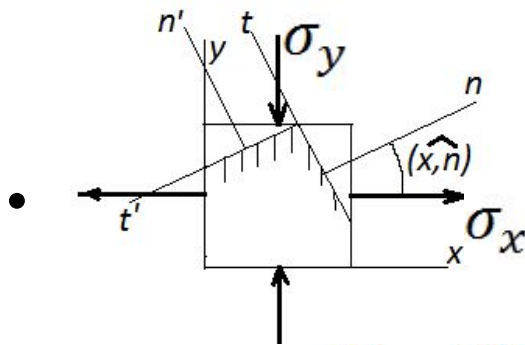
- **Задача 1.**

**Дано:**

$$\sigma_x = 60 \text{ МПа} \quad \sigma_y = -20 \text{ МПа}$$

$$(x, n) = 30^\circ \quad (n, n') = 90^\circ$$

**Определить:**  $\sigma_n, \sigma_{n'}, \tau_{nt}$



$$\sigma_n = \frac{60 - 20}{2} + \frac{60 + 20}{2} \cos 60^\circ = 20 + 20 = 40$$

$$\sigma_{n'} = \frac{60 - 20}{2} + \frac{60 + 20}{2} \cos 240^\circ = 20 - 20 = 0$$

$$\tau_{nt} = -\frac{60 + 20}{2} \sin 60^\circ = 20\sqrt{3} \quad \sigma_x + \sigma_y = \sigma_n + \sigma_{n'}$$



# Задачи на плоское НС

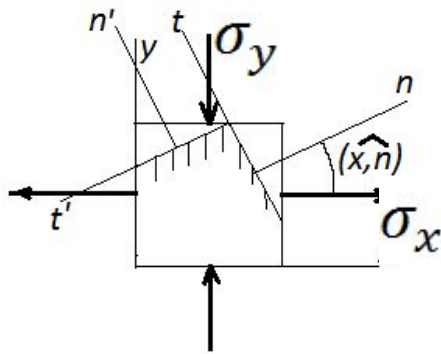
- **Задача 2.**

**Дано:**

$$\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_3, \sigma_1 = -\sigma_3 \quad \sigma_2 = 0$$

$$(x, n) = 45^\circ \quad (n, n') = 90^\circ$$

**Определить:**  $\sigma_n, \sigma_{n'}, \tau_{nt}, \tau_{n't'}$



$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_1}{2} \cos 90^\circ = 0$$

$$\sigma_{n'} = \frac{\sigma_1 - \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_1}{2} \cos 270^\circ = 0$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_1}{2} \sin 90^\circ = -\sigma_1 \quad \tau_{n't'} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_1}{2} \sin 270^\circ = \sigma_1$$

- Напряженное состояние – **чистый сдвиг**

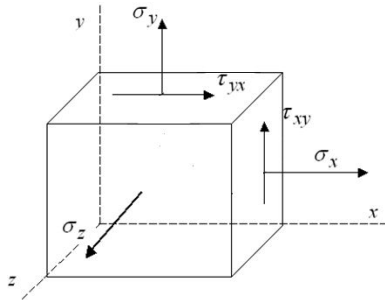
# Объемное напряженное состояние

## • Задача 3.

Дано:

$$\sigma_x = 60 \text{ МПа} \quad \sigma_y = -40 \text{ МПа}$$

$$\sigma_z = -50 \text{ МПа} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 40 \text{ МПа}$$



**Определить:**  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha = (x, \sigma_{max})$

$\sigma_z$  - главное напряжение, остальные два находятся в плоскости x-y и определяются по формулам для плоского напряженного состояния

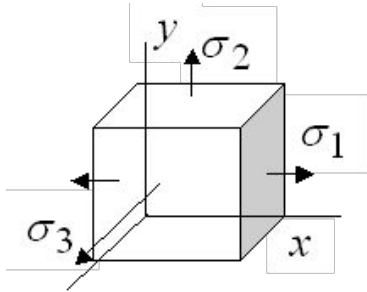
$$\sigma_{max/min} = \frac{60 - 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 + 40}{2}\right)^2 + 40^2} = 10 \pm 64,03$$

$$\sigma_1 = 74 \text{ МПа} \quad \sigma_2 = \sigma_z = -50 \text{ МПа} \quad \sigma_3 = -54 \text{ МПа}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 40}{60 + 40} = 0,8 \quad \alpha = 19,33^\circ$$

# Напряженно-деформированное состояние В ТОЧКЕ

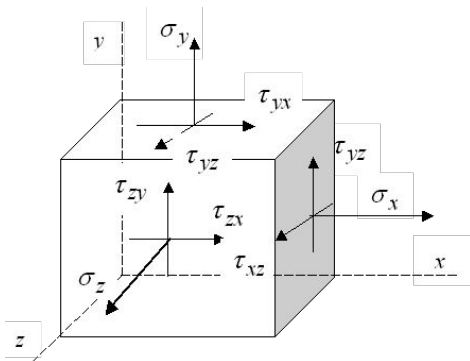
- **Обобщенный закон Гука**



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1))$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2))$$



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)) ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} ;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)) ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} ;$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)) ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} .$$

# Напряженно-деформированное состояние в точке. Уравнения упругости

- **Относительное изменение объема**  $\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

- **Удельная потенциальная энергия деформации**

$$a = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3))$$

- **Удельная потенциальная энергия изменения объема и формы**

$$a_0 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

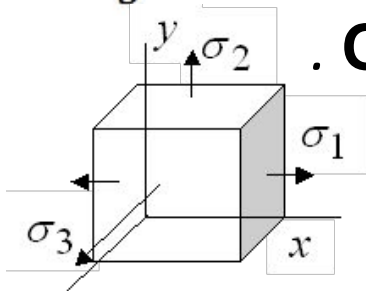
$$a_\phi = \frac{1+\mu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2)$$

# Напряженно-деформированное состояние в точке

- Задача 4.** Объемное напряженное состояние в точке задано главными напряжениями  $\sigma_1 = 80$  МПа  $\sigma_2 = 40$

$$\sigma_3 = 30$$

$$\varepsilon_n, \varepsilon_{n'}, a_\Phi,$$



**Определить** главные деформации  $(n, n') = 90^\circ$  если угол  $(x, n) = 30^\circ$  в плоскости x-y,

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

$$\sigma_n = \frac{80 + 40}{2} + \frac{80 - 40}{2} \cos 60^\circ = 70 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{n'} = \frac{80 + 40}{2} + \frac{80 - 40}{2} \cos 240^\circ = 50 \text{ МПа} \quad \varepsilon_n = \frac{1}{E} (\sigma_n - \mu(\sigma_{n'} + \sigma_z))$$

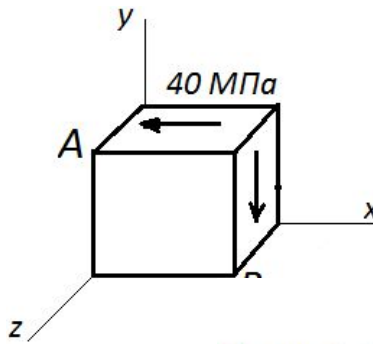
$$\varepsilon_n = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (70 - 0,3(50 + 30)) = 23 \cdot 10^{-5} \quad \varepsilon_{n'} = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (50 - 0,3(70 + 30)) = 10^{-4}$$

$$a_\Phi = \frac{1 + 0,3}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} [(80 - 40)^2 + (40 - 30)^2 + (80 - 30)^2] = 4,55 \cdot 10^{-3}$$

# Напряженно-деформированное состояние в точке

- Задача 5.** Кубик со стороной 2 см находится под действием касательного напряжен  $\tau_{xy} = -40$  МПа.

Определить: на сколько изменится



AB, если  $E=1 \cdot 10^5$ ,  $\mu=0,3$ .

$$\Delta_{AB} = AB \cdot \varepsilon_{AB}$$

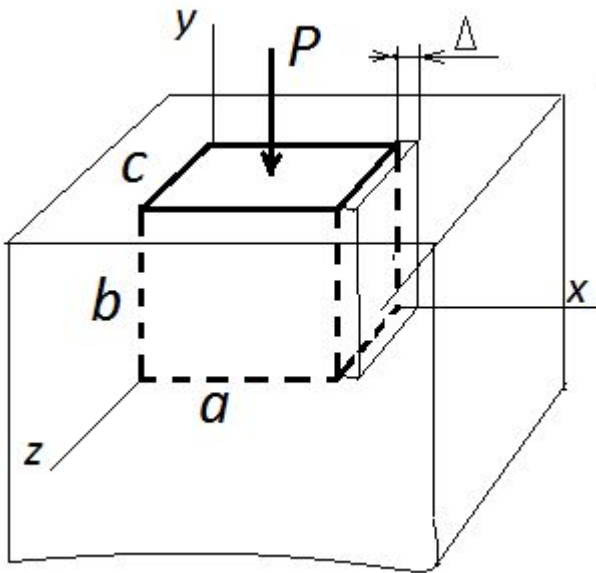
•  $\varepsilon_{AB} = \frac{1}{E} (\sigma_{AB} - \mu \sigma_{AC})$  используем сдвиг  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot 40}{0 - 0} = -\infty$

$$\alpha = (x, \sigma_1) = -45^\circ \quad \sigma_1 = \sigma_{AB} = -\sigma_3 = 40 \text{ МПа}$$

$$\Delta_{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{10^5} (40 + 0,3 \cdot 40) = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ см}$$

# Напряженно-деформированное состояние в точке

**Задача 6.** В жесткой недеформируемой плите изготовлен паз с размерами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . При установке в паз прямоугольного параллелепипеда тех же размеров образовался зазор  $\Delta$  по направлению оси  $x$ .



**Определить, какую силу  $P$**

приложить к

чтобы зазор был выбран за

его упругой деформации.

Известны  $E$ ,  $\mu$  материала,  $a$ ,  $b$ ,  $c$   
размеры параллелепипеда и

# Напряженно-деформированное состояние в точке (продолжение)

Посмотрим, что известно.  $P = \sigma_y a c$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta}{a} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \sigma_x = 0$$

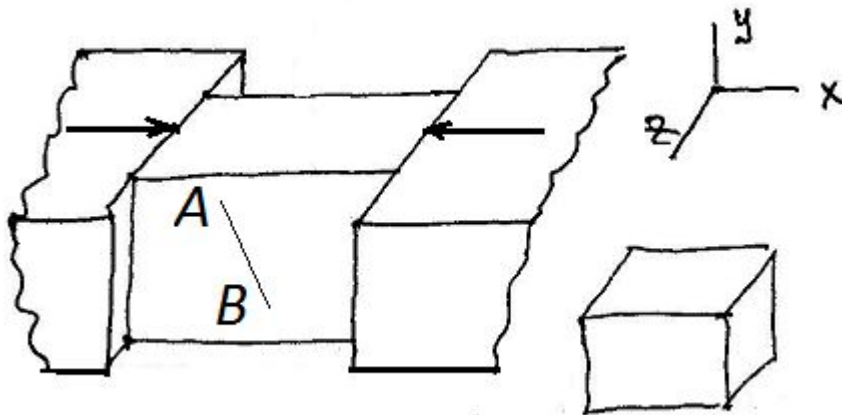
$$\Delta E = -a\mu(\sigma_y + \sigma_z) \quad \sigma_z = \mu\sigma_y$$

$$\sigma_y = -\frac{E\Delta}{a\mu(1+\mu)} \quad P = -\frac{cE\Delta}{\mu(1+\mu)}$$



# Напряженно-деформированное состояние в точке (продолжение)

**Задача 7.** Кубик из литого олова сжимается в тисках напряжением 20 МПа. Определить направление волокон олова АВ в плоскости x-y, относительная деформация которых равна 0. Коэффициент



**Решение**

$$\varepsilon_{AB} = \frac{1}{E} (\sigma_{AB} - \mu \sigma_{AC})$$

Направление AC считать перпендикулярным направлению AB в плоскости x-y.

# Напряженно-деформированное состояние в точке (продолжение)

$$\sigma_{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \pm \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_{max} = 0 \quad \sigma_{min} = -20 \text{ МПа}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= \frac{0 - 20}{2} + \frac{0 + 20}{2} \cos 2\alpha \\ &= -10 + 10 \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$\sigma_{AC} = -10 - 10 \cos 2\alpha$$

# Напряженно-деформированное состояние в точке (продолжение)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{AB} &= \frac{1}{E} (-10 + 10 \cos 2\alpha \\ &\quad - \mu(-10 - 10 \cos 2\alpha)) \\ &= \frac{1}{E} (-10(1 - \mu) + 10 \cos 2\alpha(1 + \mu)) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} = \frac{1}{2} \quad 2\alpha = 60^\circ, \quad \alpha = 30^\circ$$

# Напряженно-деформированное состояние в точке (продолжение)

- **Задача 8.** В каком случае объемная деформация стержня, нагруженного одинаковой продольной силой, будет больше, когда стержень свободно стоит на опоре, или, когда он предварительно заключен в жесткую недеформируемую обойму?
- **Ответ** на этот вопрос дает анализ формулы объемной деформации:

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$