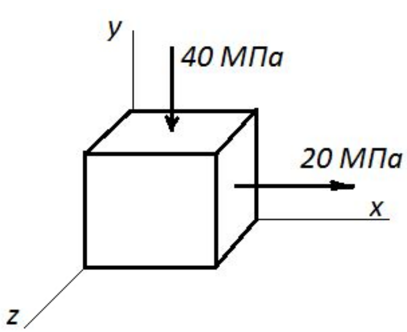
Напряженное и деформированное состояния в точке

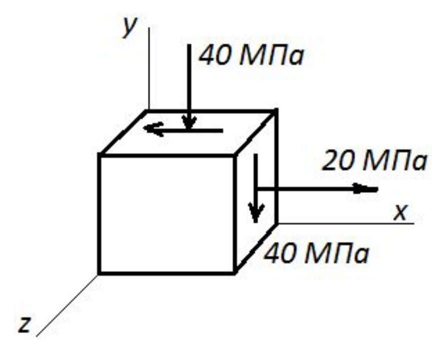
Напряженное состояние в точке

- Напряженное состояние в точке
- Виды напряженного состояния
- Главные площадки и главные напряжения
- Плоское напряженное состояние
- Круги напряжений

Напряженное состояние в точке

- Напряженное состояние в точке характеризуется компонентами напряжений, действующих на гранях выделенного элемента объема
- Касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и направлены от ребра или к ребру
- Главные напряжения действуют на главных площадках
- В главных площадках отсутствуют касательные напряже





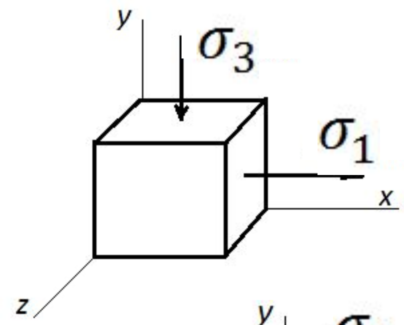
Виды напряженного состояния

- **Одноосное** (линейное)

растяжение $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

сжатие $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$

* **Двухосное** (плоское)

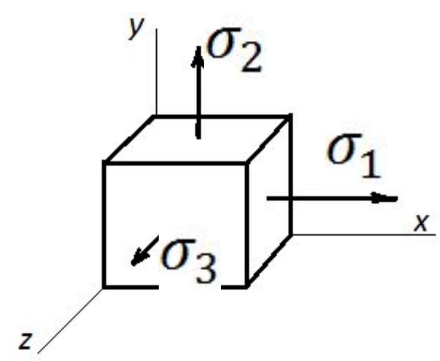


$\sigma_2 = 0, \sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0$

$\sigma_1 = 0, \sigma_2, \sigma_3 < 0$

$\sigma_3 = 0, \sigma_1, \sigma_2 > 0$

* **Трехосное** (объемное)



$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Двухосное напряженное состояние в точке

Напряжения в наклонных площадках

$$\sigma_{max} = \sigma_x \qquad \sigma_{min} = \sigma_y$$

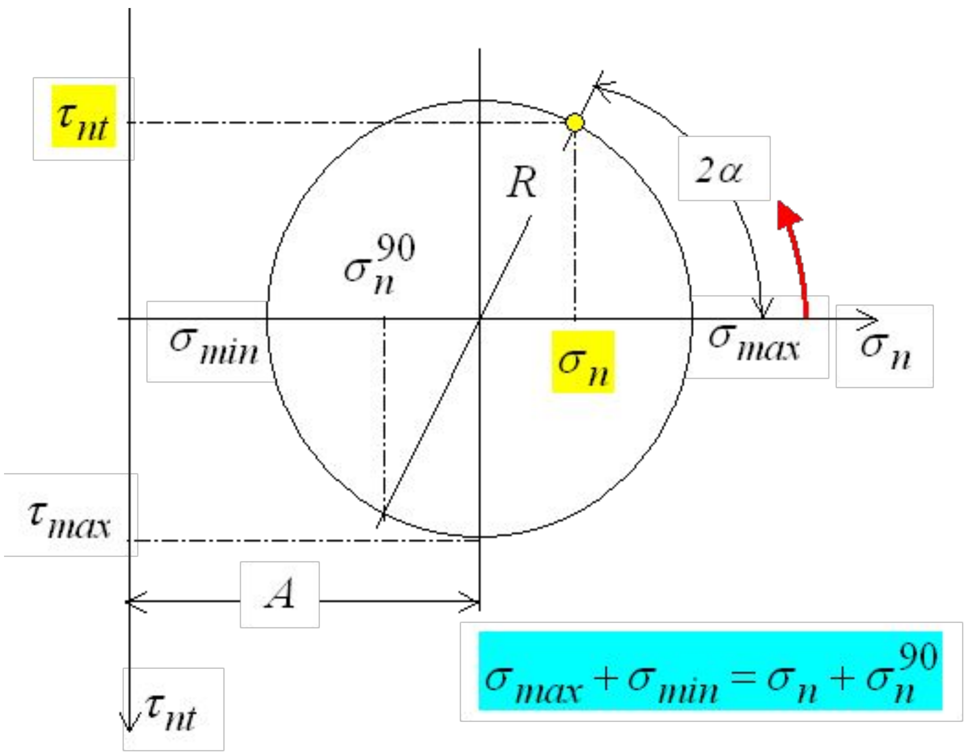
$$\sigma_n = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} cos(2\alpha)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} sin(2\alpha)$$

$$(x - A)^2 + y^2 = R^2$$

Двухосное напряженное состояние в точке

- Круги напряжений



$$A = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$R = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

Напряженное состояние в точке

- Вычисление главных напряжений

$$\sigma_{max/min} = \frac{\left(\sigma_x + \sigma_y\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Определение положения главных площадок

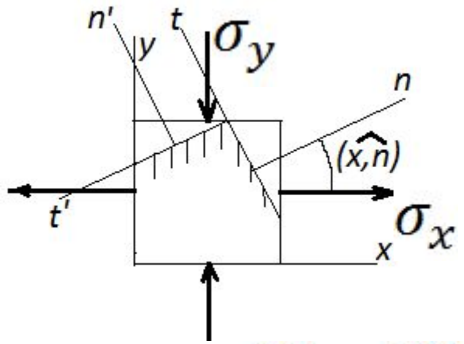
$$tan\left(2\alpha\right) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Задачи на плоское НС

- **Задача 1.** **Дано**:

$$\sigma_x = 60 \text{ МПа} \qquad \sigma_y = -20 \text{ МПа}$$

$$(x, n) = 30° \qquad (n, n') = 90°$$



- **Определить**: $\sigma_n, \sigma_{n'}, \tau_{nt}$

$$\sigma_n = \frac{60-20}{2} + \frac{60+20}{2} cos60° = 20 + 20 = 40$$

$$\sigma_{n'} = \frac{60-20}{2} + \frac{60+20}{2} cos240° = 20 - 20 = 0$$

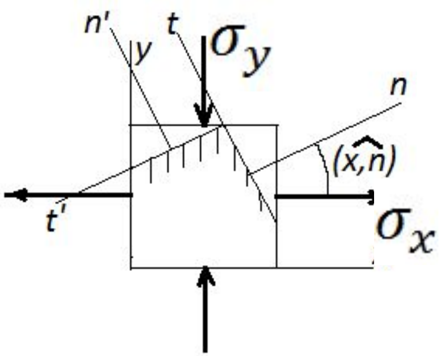
$$\tau_{nt} = -\frac{60+20}{2} sin60° = 20\sqrt{3} \qquad \sigma_x + \sigma_y = \sigma_n + \sigma_{n'}$$

Задачи на плоское НС

- **Задача 2.** **Дано:**

$$\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_3, \sigma_1 = -\sigma_3 \qquad \sigma_2 = 0$$

$$(x,n) = 45° \qquad (n,n') = 90°$$

- 

Определить: $\sigma_n, \sigma_{n'}, \tau_{nt}, \tau_{n't'}$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_1}{2} cos90° = 0$$

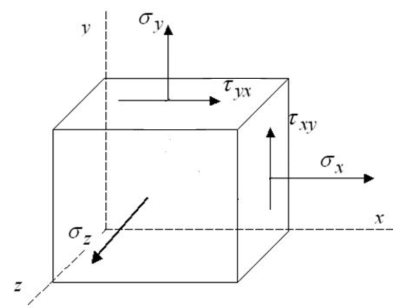
$$\sigma_{n'} = \frac{\sigma_1 - \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_1}{2} cos270° = 0$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_1}{2} sin90° = -\sigma_1 \quad \tau_{n't'} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_1}{2} sin270° = \sigma_1$$

- Напряженное состояние – ***чистый сдвиг***

Объемное напряженное состояние

- **Задача 3.** **Дано:**



$\sigma_x = 60$ МПа $\sigma_y = -40$ МПа

$\sigma_z = -50$ МПа $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 40$ МПа

- **Определить:** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha = (x, \sigma_{max})$

  σ_z - главное напряжение, остальные два находятся в плоскости x-y и определяются по формулам для плоского напряженного состояния

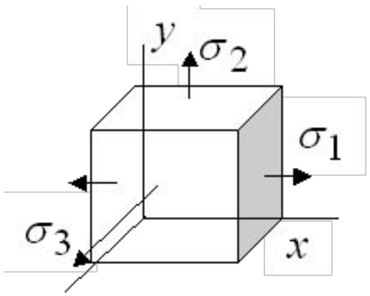
$$\sigma_{max/min} = \frac{60-40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60+40}{2}\right)^2 + 40^2} = 10 \pm 64{,}03$$

тогда $\sigma_1 = 74$ МПа, $\sigma_2 = \sigma_z = -50$ МПа, $\sigma_3 = -54$ МПа

$$tg2\alpha = \frac{2 \cdot 40}{60+40} = 0{,}8 \qquad \alpha = 19{,}33°$$

Напряженно-деформированное состояние в точке

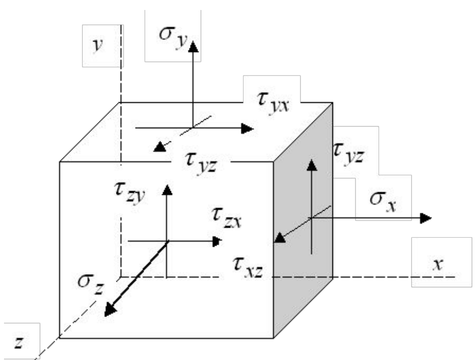
- **Обобщенный закон Гука**



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \mu\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right)$$



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right); \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right); \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right); \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}.$$

Напряженно-деформированное состояние в точке. Уравнения упругости

- **Относительное изменение объема** $\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)$$

- **Удельная потенциальная энергия деформации**

$$a = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right)$$

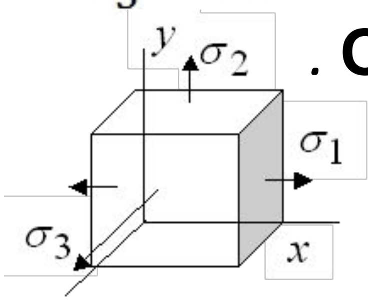
- **Удельная потенциальная энергия изменения объема и формы**

$$a_0 = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2$$

$$a_\phi = \frac{1+\mu}{6E}\left(\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2\right)$$

Напряженно-деформированное состояние в точке

- **Задача 4**. Объемное напряженное состояние в точке задано главными напряжениями $\sigma_1 = 80$ МПа $\sigma_2 = 40$ $\sigma_3 = 30$ $\varepsilon_n, \varepsilon_{n'}, a_\Phi,$



. **Определ** $(x, n) = 30°$ тельные дефор $(n, n') = 90°$ если угол в плоскости x-y, E=2·10^5 МI

Решение

$$\sigma_n = \frac{80+40}{2} + \frac{80-40}{2} cos60° = 70 \text{ МПа}$$

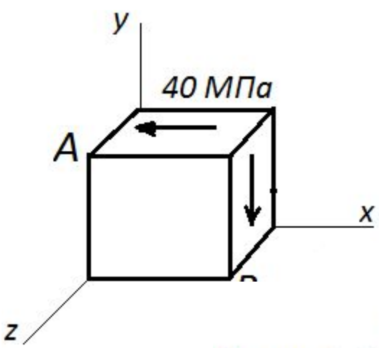
$$\sigma_{n'} = \frac{80+40}{2} + \frac{80-40}{2} cos240° = 50 \text{ МПа} \qquad \varepsilon_n = \frac{1}{E}\left(\sigma_n - \mu(\sigma_{n'} + \sigma_z)\right)$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2 \cdot 10^5}\left(70 - 0{,}3(50+30)\right) = 23 \cdot 10^{-5} \qquad \varepsilon_{n'} = \frac{1}{2 \cdot 10^5}\left(50 - 0{,}3(70+30)\right) = 10^{-4}$$

$$a_\Phi = \frac{1+0{,}3}{6 \cdot 2 \cdot 10^5}\left[(80-40)^2 + (40-30)^2 + (80-30)^2\right] = 4{,}55 \cdot 10^{-3}$$

Напряженно-деформированное состояние в точке

- **Задача 5.** Кубик со стороной 2 см находится под действием касательного напряжен $\tau_{xy} = -40$ МПа.



Определить: на сколько изменится

АВ, если Е=1·10^5, μ=0,3.

$$\Delta_{AB} = AB \cdot \varepsilon_{AB}$$

НС – чистый сдвиг

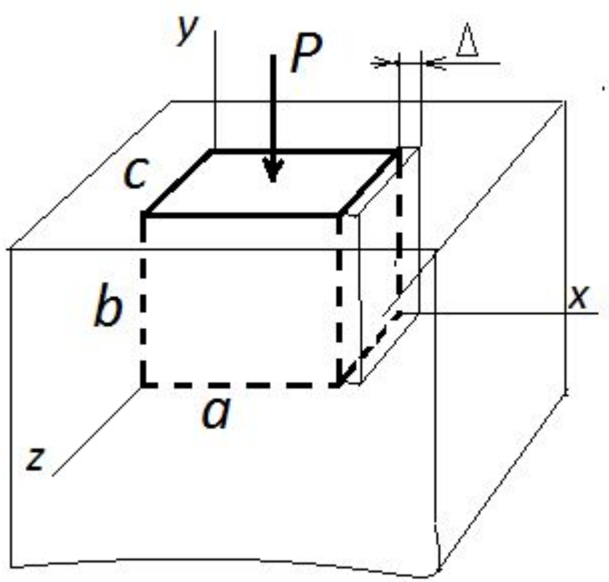
- $$\varepsilon_{AB} = \frac{1}{E}(\sigma_{AB} - \mu\sigma_{AC}) \qquad tg2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2\cdot 40}{0-0} = -\infty$$

$$\alpha = (x, \sigma_1) = -45° \qquad \sigma_1 = \sigma_{AB} = -\sigma_3 = 40 \text{ МПа}$$

$$\Delta_{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{10^5}(40 + 0{,}3 \cdot 40) = 1{,}47 \cdot 10^{-3} \text{ см}$$

Напряженно-деформированное состояние в точке

Задача 6. В жесткой недеформируемой плите изготовлен паз с размерами *a, b, c*. При установке в паз прямоугольного параллелепипеда тех же размеров образовался зазор Δ по направлению оси x.



Определить, какую силу *P*

приложить к

чтобы зазор был выбран за

его упругой деформации.

Известны *E*, μ материала, *a, b, c*

размеры параллелепипеда и

Напряженно-деформированное состояние в точке (продолжение)

Посмотрим, что известно. $P = \sigma_y a c$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta}{a} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

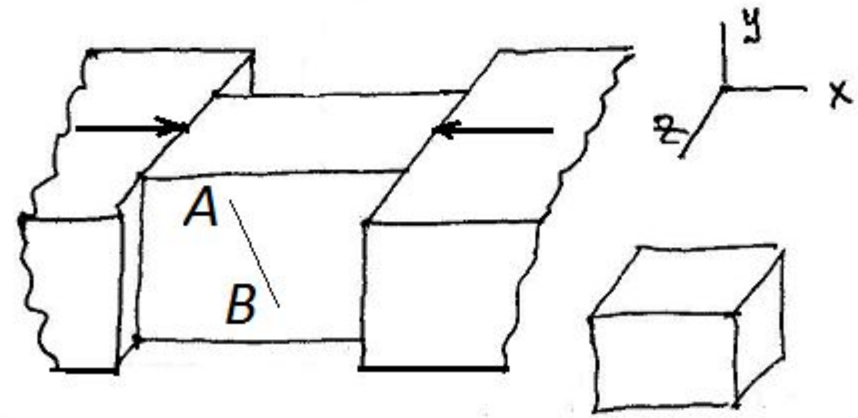
$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \qquad \sigma_x = 0$$

$$\Delta E = -a\mu(\sigma_y + \sigma_z) \qquad \sigma_z = \mu\sigma_y$$

$$\sigma_y = -\frac{E\Delta}{a\mu(1+\mu)} \qquad P = -\frac{cE\Delta}{\mu(1+\mu)}$$

Напряженно-деформированное состояние в точке (продолжение)

Задача 7. Кубик из литого олова сжимается в тисках напряжением 20 МПа. Определить направление волокон олова АВ в плоскости x-y, относительная деформация которых равна 0. Коэффициент Пуассона олова $\mu = 0{,}33$



Решение

$$\varepsilon_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{E}(\sigma_{AB} - \mu\sigma_{AC})$$

Направление *AC* считать перпендикулярным направлению *AB* в плоскости x-y.

Напряженно-деформированное состояние в точке (продолжение)

$$\sigma_{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2} \pm \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2} cos2\alpha$$

$$\sigma_{max} = 0 \qquad \sigma_{min} = -20 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{0-20}{2} + \frac{0+20}{2} cos2\alpha$$
$$= -10 + 10cos2\alpha$$

$$\sigma_{AC} = -10 - 10cos2\alpha$$

Напряженно-деформированное состояние в точке (продолжение)

$$\varepsilon_{AB} = \frac{1}{E}(-10 + 10cos2\alpha$$
$$- \mu(-10 - 10cos2\alpha))$$
$$= \frac{1}{E}\left(-10(1-\mu) + 10cos2\alpha(1+\mu)\right)$$
$$= 0$$

$$cos2\alpha = \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{1}{2} \quad 2\alpha = 60°, \qquad \alpha = 30°$$

Напряженно-деформированное состояние в точке (продолжение)

- **Задача 8.** В каком случае объемная деформация стержня, нагруженного одинаковой продольной силой, будет больше, когда стержень свободно стоит на опоре, или, когда он предварительно заключен в жесткую недеформируемую обойму?
- **Ответ** на этот вопрос дает анализ формулы объемной деформации:

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)$$