ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 1. **МАТРИЦЫ.**
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД
МАТРИЦАМИ. СВОЙСТВА
ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

1. Система $m \times n$ чисел a_{ij} ($i = \overline{1, m} = 1, 2, 3, \dots, m$; $j = \overline{1, n} = 1, 2, 3, \dots, n$) расположенных в прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов, называется матрицей A размера $m \times n$ (читается «эм на эн»).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|, \quad A = \|a_{ij}\|_{m \times n}.$$

Число a_{ij} называется элементом матрицы (индекс i показывает номер строки, а индекс j – номер столбца).

2. Если все a_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) равны нулю, то матрица – нулевая; обозначение O .

Если $m = n$, то матрица называется квадратной; в этом случае число m называется порядком матрицы.

Матрицу размером $m \times 1$ (при $m > 1$) называют матрицей-столбцом, матрицу размером $1 \times n$ (при $n > 1$) – матрицей-строкой.

В случае $m = n = 1$ матрица состоит из одного числа: $A = \left\| a_{11} \right\|$.

Если в квадратной матрице все $a_{ij} = 0$ при $i > j$ или при $i < j$, то матрица называется треугольной;

если все a_{ij} при $i \neq j$ равны нулю, а при $i = j$ $a_{ij} \neq 0$,

то матрица – диагональная;

если при этом все a_{ij} равны единице, то матрица называется единичной (обозначение E).

Симметрическая матрица – квадратная матрица, у которой $a_{ij} = a_{ji}$.

3. Две матрицы $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$ и $B = \left\| b_{ij} \right\|_{m \times n}$ одинаковой размерности считаются равными, если все $a_{ij} = b_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец}, \quad B = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n) - \text{вектор-строка}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Линейные операции над матрицами.

Складывать можно матрицы одинаковой размерности по правилу:

$$A + B = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n} + \left\| b_{ij} \right\|_{m \times n} = \left\| a_{ij} + b_{ij} \right\|_{m \times n}.$$

Произведение матрицы на постоянное число $k \cdot \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n} = \left\| k \cdot a_{ij} \right\|_{m \times n}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ а } \lambda = 3, \text{ то } \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -6 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

5. Линейные операции обладают следующими свойствами:

$$1. A + B = B + A. \quad 2. (k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$$

$$3. (A + B) + C = A + (B + C). \quad 4. A + O = A.$$

$$5. k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B. \quad 6. (k_1 \cdot k_2)A = (k_1 \cdot A) \cdot k_2.$$

$$7. 0 \cdot A = O.$$

6. Транспонированием A^T матрицы A называется такое преобразование этой матрицы, при котором ее строки делаются ее столбцами

$$\text{Например, если } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $(A^T)^T = A$; $A = A^T$ для симметрической матрицы.

7. Произведением матрицы $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ на матрицу $B = \|b_{ij}\|_{n \times p}$ называется матрица $C = \|c_{ij}\|_{m \times p}$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Чтобы определить элемент c_{ij} матрицы C , необходимо найти сумму произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие (по номеру) элементы j -го столбца матрицы B .

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & -3 \\ 15 & 15 & -9 \end{pmatrix}$$

Произведение матриц не коммутативно: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -7 & -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad AB + 2C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Элементарные преобразования матрицы.**
- Под элементарными преобразованиями матрицы в дальнейшем будем понимать следующие операции:
 - 1. перестановку двух параллельных строк или столбцов;
 - 2. умножение всех элементов строки или столбца на число, отличное от нуля;
 - 3. прибавление к элементам строки или столбца соответствующих элементов параллельной строки или столбца, умноженных на некоторое число.
- Две матрицы A и B одного размера называются эквивалентными (обозначение $A \sim B$), если матрица B из матрицы A получается путем элементарных преобразований.
- Используя элементарные преобразования, любую матрицу можно привести к канонической матрице, у которой элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$, где $r \leq \min(m, n)$, равны единице, а все остальные - равны нулю.