ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 1. МАТРИЦЫ.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

1. Система $m \times n$ чисел a_{ij} $\left(i = \overline{1, m} = 1, 2, 3, \ldots, m;\ j = \overline{1, n} = 1, 2, 3, \ldots, n\right)$ расположенных в прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов, называется матрицей A размера $m \times n$ (читается «*эм* на *эн*»).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}.$$

Число a_{ij} называется элементом матрицы (индекс i показывает номер строки, а индекс j – номер столбца).

2. Если все $a_{ij} (i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$ равны нулю, то матрица – нулевая; обозначение O.

Если $m = n$, то матрица называется квадратной; в этом случае число m называется порядком матрицы.

Матрицу размером $m \times 1$ (при $m > 1$) называют матрицей-столбцом, матрицу размером $1 \times n$ (при $n > 1$) – матрицей- строкой.

В случае $m = n = 1$ матрица состоит из одного числа: $A = \|a_{11}\|$.

Если в квадратной матрице все $a_{ij} = 0$ при $i > j$ или при $i < j$, то матрица называется треугольной;

если все a_{ij} при $i \neq j$ равны нулю, а при $i = j$ $a_{ij} \neq 0$, то матрица – диагональная;

если при этом все a_{ij} равны единице, то матрица называется единичной (обозначение E).

Симметрическая матрица – квадратная матрица, у которой $a_{ij} = a_{ji}$.

3. Две матрицы $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ и $B = \|b_{ij}\|_{m \times n}$ одинаковой размерности считаются равными, если все $a_{ij} = b_{ij}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$ - вектор-столбец, $B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ - вектор-строка.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$ или $$B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Линейные операции над матрицами.

Складывать можно матрицы одинаковой размерности по правилу:

$$A+B=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}+\left\|b_{ij}\right\|_{m\times n}=\left\|a_{ij}+b_{ij}\right\|_{m\times n}.$$

Произведение матрицы на постоянное число $k\cdot\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}=\left\|k\cdot a_{ij}\right\|_{m\times n}$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & -2 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ -7 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 4\\ -4 & 1 & 8\end{pmatrix}.$$

Если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, а $\lambda=3$, то $\lambda\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 9\\ -6 & 3 & 12\end{pmatrix}$.

5. Линейные операции обладают следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$.
2. $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
4. $A + O = A$.
5. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$.
6. $(k_1 \cdot k_2)A = (k_1 \cdot A) \cdot k_2$.
7. $0 \cdot A = O$.

6. Транспонированием A^T матрицы A называется такое преобразование этой матрицы, при котором ее строки делаются ее столбцами

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Очевидно, что $\left(A^T\right)^T = A$; $A = A^T$ для симметрической матрицы.

7. Произведением матрицы $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m\times n}$ на матрицу $B = \left\| b_{ij} \right\|_{n\times p}$ называется

матрица $C = \left\| c_{ij} \right\|_{m\times p}$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Чтобы определить элемент c_{ij} матрицы C, необходимо найти сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие (по номеру) элементы j -го столбца матрицы B .

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & -3 \\ 15 & 15 & -9 \end{pmatrix}$

Произведение матриц не коммутативно: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -7 & -7 & 5 \end{pmatrix}, \qquad AB + 2C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Элементарные преобразования матрицы.**
- Под элементарными преобразованиями матрицы в дальнейшем будем понимать следующие операции:
- 1. перестановку двух параллельных строк или столбцов;
- 2. умножение всех элементов строки или столбца на число, отличное от нуля;
- 3. прибавление к элементам строки или столбца соответствующих элементов параллельной строки или столбца, умноженных на некоторое число.
- Две матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ одного размера называются эквивалентными (обозначение $\boldsymbol{A \sim B}$), если матрица $\boldsymbol{B}$ из матрицы $\boldsymbol{A}$ получается путем элементарных преобразований.
- Используя элементарные преобразования, любую матрицу можно привести к канонической матрице, у которой элементы $\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}}$, где $\boldsymbol{r \le min(m,n)}$, равны единице, а все остальные - равны нулю.