

Уравнения математической физики в экологии и
теплоэнергетике

ЛЕКЦИЯ 18

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные

Полный дифференциал функции

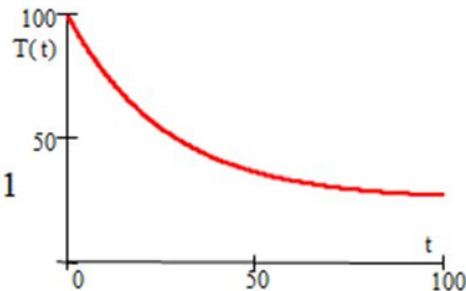
Дифференцирование сложных функций

(10.06.2021. 09:00-10:20. ХТП-119 и ХТБ-119)

Решая задачу Коши получаем неизвестную функцию остывания хлеба

$$T(t) = 75 \left(\frac{7}{15} \right)^{\frac{t}{20}} + 25$$

следовательно $T = 30$ при $t \approx 71$



При решении данной задачи мы рассматривали батон хлеба, как **точку которая остывает равномерно по объёму**. Однако хорошо известно, что внутри тела температура понижается медленнее чем на краях.

Таким образом если мы хотим моделировать процесс остывания, то будем иметь дело с функцией $T = T(t, x, y, z)$.

Уравнение которое описывает данный процесс есть обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{окр})$$

При рассмотрении функций зависящих от двух и более переменных, приходится работать с частными производными

$$\frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$$

В таком случае процесс распространения тепла будет описываться не обыкновенным дифференциальным уравнением, а уравнением в частных производных.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные понятия

1. Понятие функции нескольких переменных. Обозначения функций. Переменная величина z называется однозначной функцией двух переменных x, y , если каждой совокупности их значений (x, y) из данной области соответствует единственное определенное значение z . Переменные x, y называются *аргументами* или *независимыми переменными*. Функциональная зависимость обозначается так:

$$z = f(x, y), \text{ или } z = F(x, y) \text{ и т. д.}$$

Аналогично определяются функции трех и большего числа аргументов.

Пример 1. Выразить объем конуса V как функцию его образующей x и радиуса основания y .

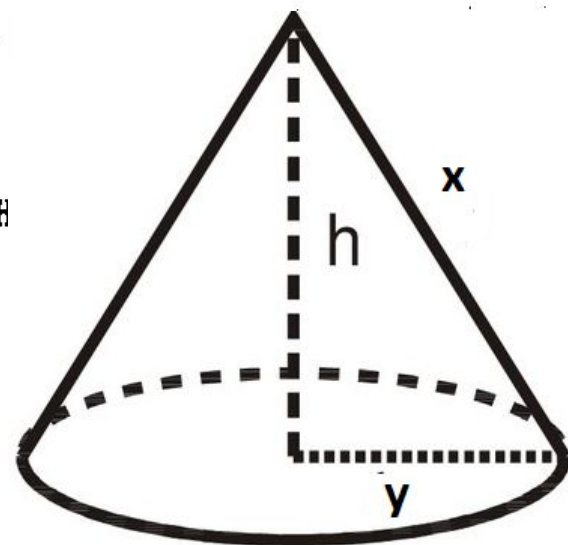
Решение. Из геометрии известно, что объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3} \pi y^2 h,$$

где h — высота конуса. Но $h = \sqrt{x^2 - y^2}$. Следовательно

$$V = \frac{1}{3} \pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Это и есть искомая функциональная зависимость.



Объем конуса

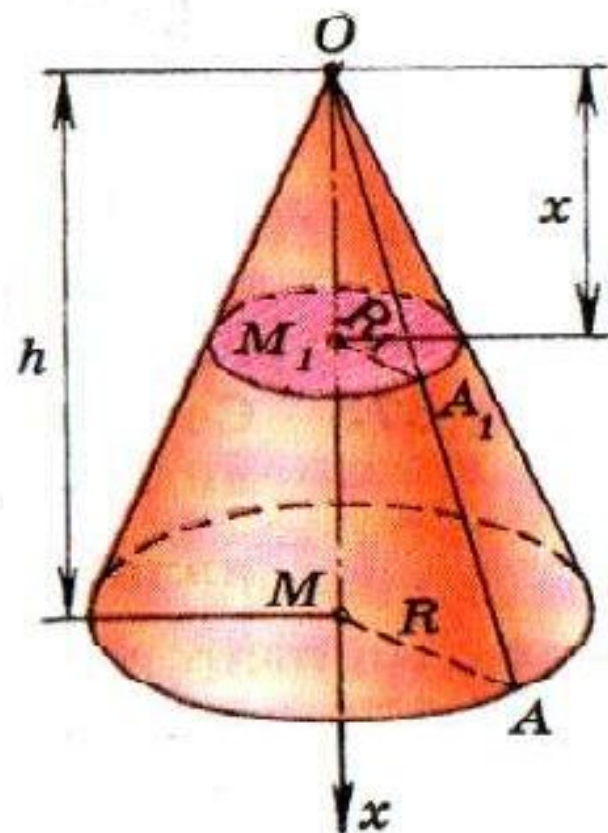
$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}, \text{ или } \frac{x}{h} = \frac{R_1}{R},$$

откуда $R_1 = \frac{R}{h} x$. Так как $S(x) = \pi R_1^2$, то

$$S(x) = \frac{\pi R^2}{h^2} x^2.$$

Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a=0$, $b=h$, получаем

$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$



Значение функции $z = f(x, y)$ в точке $P(a, b)$, т. е. при $x = a$ и $y = b$, обозначается $f(a, b)$ или $f(P)$. Геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$ в прямоугольной системе координат X, Y, Z , вообще говоря, является некоторая поверхность (рис.).

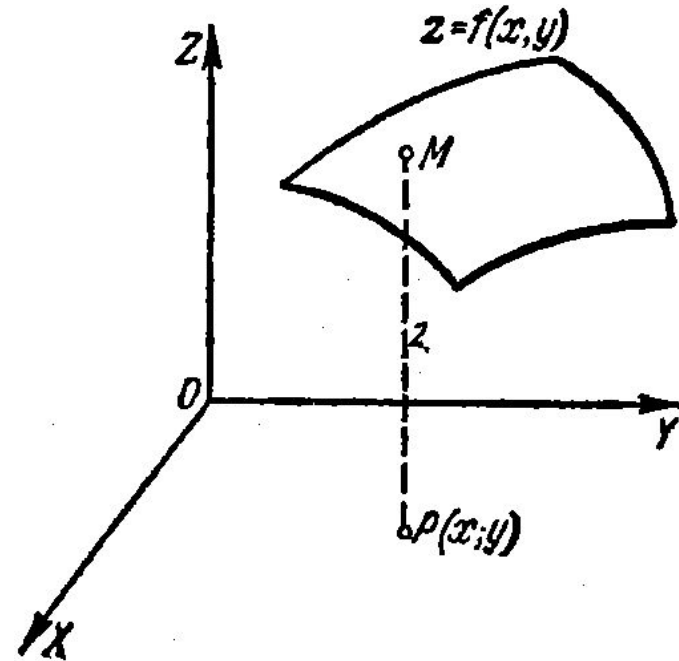


Рис.

Пример 2. Найти $f(2, -3)$ и $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, если

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

Решение. Подставляя $x = 2$ и $y = -3$, находим:

$$f(2, -3) = \frac{2^2 + (-3)^2}{2 \cdot 2 \cdot (-3)} = -\frac{13}{12}.$$

Подставляя $x = 1$ и заменяя y на $\frac{y}{x}$, будем иметь

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{x^2 + y^2}{2xy},$$

т. е. $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$.

18.1 Выразить площадь S боковой поверхности правильной шестиугольной усеченной пирамиды как функцию сторон x и y оснований и высоты z .

Частные производные

1. Определение частных производных. Если $z = f(x, y)$ то, полагая, например, y постоянной, получаем производную

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y),$$

которая называется *частной производной* функции z по переменной x . Аналогично определяется и обозначается частная производная функции z по переменной y . Очевидно, что для нахождения частных производных можно пользоваться обычными формулами дифференцирования.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную, будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}.$$

Пример 2. Найти частные производные функции трех аргументов

$$u = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5.$$

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y^2 z + 2,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3 y z - 3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^3 y^2 + 1.$$

18.2

Площадь трапеции с основаниями a , b и высотой h равна $S = \frac{1}{2}(a + b)h$. Найти $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$, $\frac{\partial S}{\partial h}$ и, пользуясь чертежом, объяснить их геометрический смысл.

18.3

Найти частные производные функции:

$$z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Полный дифференциал функции

1. Полное приращение функции. Полным приращением функции $z = f(x, y)$ называется разность

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

2. Полный дифференциал функции. Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz , линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy .

Разность между полным приращением и полным дифференциалом функции есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Функция заведомо имеет полный дифференциал в случае непрерывности ее частных производных. Если функция имеет полный дифференциал, то она называется *дифференцируемой*. Дифференциалы независимых переменных, по определению, совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Пример 1. Для функции

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$

найти полное приращение и полный дифференциал.

Решение.

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2; \\ \Delta f(x, y) &= [(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2] - (x^2 + xy - y^2) = \\ &= 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 + x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y - 2y \cdot \Delta y - \Delta y^2 = \\ &= [(2x + y) \Delta x + (x - 2y) \Delta y] + (\Delta x^2 + \Delta x \cdot \Delta y - \Delta y^2). \end{aligned}$$

Здесь выражение $df = (2x + y) \Delta x + (x - 2y) \Delta y$ есть полный дифференциал функции, а $(\Delta x^2 + \Delta x \cdot \Delta y - \Delta y^2)$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Пример 2. Найти полный дифференциал функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad 1.$$

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3. Применение полного дифференциала функции к приближенным вычислениям. При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, а значит, при достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$ или

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

Пример 3. Высота конуса $H = 30$ см, радиус основания $R = 10$ см. Как изменится объем конуса, если увеличить H на 3 мм и уменьшить R на 1 мм?

Решение. Объем конуса равен $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$. Изменение объема заменим приближенно дифференциалом

$$\begin{aligned} \Delta V \approx dV &= \frac{1}{3} \pi (2RH dR + R^2 dH) = \\ &= \frac{1}{3} \pi (-2 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 0,1 + 100 \cdot 0,3) = -10\pi \approx -31,4 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить приближенно $1,02^{3,01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = x^y$. Искомое число можно считать наращенным значением этой функции при $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,01$. Первоначальное значение функции $z = 1^3 = 1$,

$$\Delta z \approx dz = yx^{y-1} \Delta x + x^y \ln x \Delta y = 3 \cdot 1 \cdot 0,02 + 1 \cdot \ln 1 \cdot 0,01 = 0,06.$$

Следовательно, $1,02^{3,01} \approx 1 + 0,06 = 1,06$.

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$

XI. $(a^x)' = a^x \ln a$

18.4

Для функции $f(x, y) = x^2y$ найти полное приращение и полный дифференциал в точке $(1; 2)$; сравнить их, если:

а) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$; б) $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

18.5

Найти полный дифференциал функции:

$$z = x^2y^3.$$

18.6

Одна сторона прямоугольника $a = 10$ см, а другая $b = 24$ см. Как изменится диагональ l прямоугольника, если сторону a удлинить на 4 мм, а сторону b укоротить на 1 мм? Найти приближенную величину изменения и сравнить с точной.

Дифференцирование сложных функций

1. Случай одной независимой переменной. Если $z = f(x, y)$ есть дифференцируемая функция аргументов x и y , которые в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t :

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то производная сложной функции $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (1)$$

В частности, если t совпадает с одним из аргументов, например x , то «полная» производная функции z по x будет:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (2)$$

Пример 1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z = e^{3x+2y}, \text{ где } x = \cos t, \quad y = t^2.$$

Решение. По формуле (1) имеем

$$\frac{dz}{dt} = e^{3x+2y} \cdot 3(-\sin t) + e^{3x+2y} \cdot 2 \cdot 2t =$$

$$= e^{3x+2y} (4t - 3 \sin t) = e^{3 \cos t + 2t^2} (4t - 3 \sin t).$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} +$$

Пример 2. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную

$\frac{dz}{dx}$, если

$$z = e^{xy}, \text{ где } y = \varphi(x).$$

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$. На основании формулы (2) получаем

$$\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy} \varphi'(x).$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} +$$

2. Дифференциалы высших порядков. Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала (первого порядка) этой функции

$$d^2z = d(dz).$$

Аналогично определяются дифференциалы функции z порядка выше второго, например:

$$d^3z = d(d^2z)$$

и, вообще,

$$d^n z = d(d^{n-1} z) \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Если $z = f(x, y)$, где x и y — независимые переменные и функция f имеет непрерывные частные производные второго порядка, то дифференциал 2-го порядка функции z вычисляется по формуле

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad (1)$$

Вообще, при наличии соответствующих производных справедлива символическая формула

$$d^n z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n z,$$

которая формально разворачивается по биномиальному закону.

Если $z = f(x, y)$, где аргументы x и y суть функции одного или нескольких независимых переменных, то

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y. \quad (2)$$

Если x и y — независимые переменные, то $d^2x = 0$, $d^2y = 0$ и формула (2) становится тождественной формуле (1).

2. **Случай нескольких независимых переменных.** Если z есть сложная функция нескольких независимых переменных, например $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ (u и v — независимые переменные; f , φ , ψ — дифференцируемые функции), то частные производные z по u и v выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (3)$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (4)$$

Во всех рассмотренных случаях справедлива формула

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

(свойство инвариантности полного дифференциала).

Пример 3. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если

$$z = f(x, y), \quad \text{где} \quad x = uv, \quad y = \frac{u}{v}.$$

Решение. Применяя формулы (3) и (4), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x(x, y) v + f'_y(x, y) \frac{1}{v}$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x(x, y) u - f'_y(x, y) \frac{u}{v^2}.$$

Пример 4. Показать, что функция $z = \varphi(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Решение. Функция φ зависит от x и y через промежуточный аргумент $x^2 + y^2 = t$, поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(x^2 + y^2) 2x$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(x^2 + y^2) 2y.$$

Подставив частные производные в левую часть уравнения, будем иметь:

$$\begin{aligned} y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} &= y \varphi'(x^2 + y^2) 2x - x \varphi'(x^2 + y^2) 2y = \\ &= 2xy \varphi'(x^2 + y^2) - 2xy \varphi'(x^2 + y^2) \equiv 0, \end{aligned}$$

т. е. функция z удовлетворяет данному уравнению.

Уравнения математической физики в экологии и
теплоэнергетике

ЗАВЕРШЕНИЕ ЛЕКЦИИ 18

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные

Полный дифференциал функции

Дифференцирование сложных функций

(10.06.2021. 09:00-10:20. ХТП-119 и ХТБ-119)