Уравнения математической физики в экологии и теплоэнергетике

ЛЕКЦИЯ 18

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные

Полный дифференциал функции

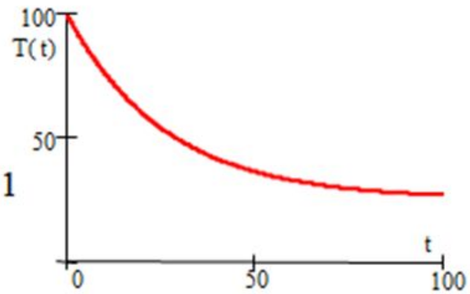
Дифференцирование сложных функций

(10.06.2021. 09:00-10:20. ХТП-119 и ХТБ-119)

См. Лекц.17

Решая задачу Коши получаем неизвестную функцию остывания хлеба

$$T(t) = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} + 25$$



следовательно $T = 30$ при $t \approx 71$

При решении данной задачи мы рассматривали батон хлеба, как **точку которая остывает равномерно по объёму**. Однако хорошо известно, что внутри тела температура понижается медленнее чем на краях.

Таким образом если мы хотим моделировать процесс остывания, то будем иметь дело с функцией $T = T(t, x, y, z)$.

Уравнение которое описывает данный процесс есть обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_{окр}\right)$$

При рассмотрении функций зависящих от двух и более переменных, приходится работать с частными производными

$$\frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$$

В таком случае процесс распространения тепла будет описываться не обыкновенным дифференциальным уравнением, а уравнением в частных производных.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные понятия

1. Понятие функции нескольких переменных. Обозначения функций. Переменная величина z называется однозначной *функцией* двух переменных x, y, если каждой совокупности их значений (x, y) из данной области соответствует единственное определенное значение z. Переменные x, y называются *аргументами* или *независимыми переменными*. Функциональная зависимость обозначается так:

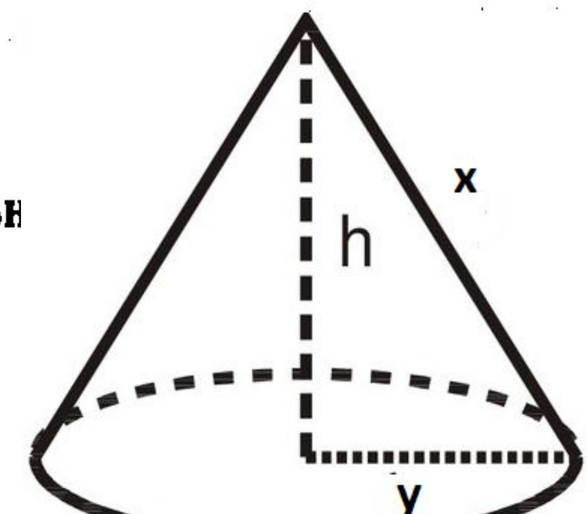
$$z=f(x, y), \text{ или } z=F(x, y) \text{ и т. д.}$$

Аналогично определяются функции трех и большего числа аргументов.

Пример 1. Выразить объем конуса V как функцию его образующей x и радиуса основания y.

Решение. Из геометрии известно, что объем конуса равен

$$V=\frac{1}{3}\pi y^2 h,$$



где h—высота конуса. Но $h=\sqrt{x^2-y^2}$. Следовательн

$$V=\frac{1}{3}\pi y^2\sqrt{x^2-y^2}.$$

Это и есть искомая функциональная зависимость.

Объем конуса

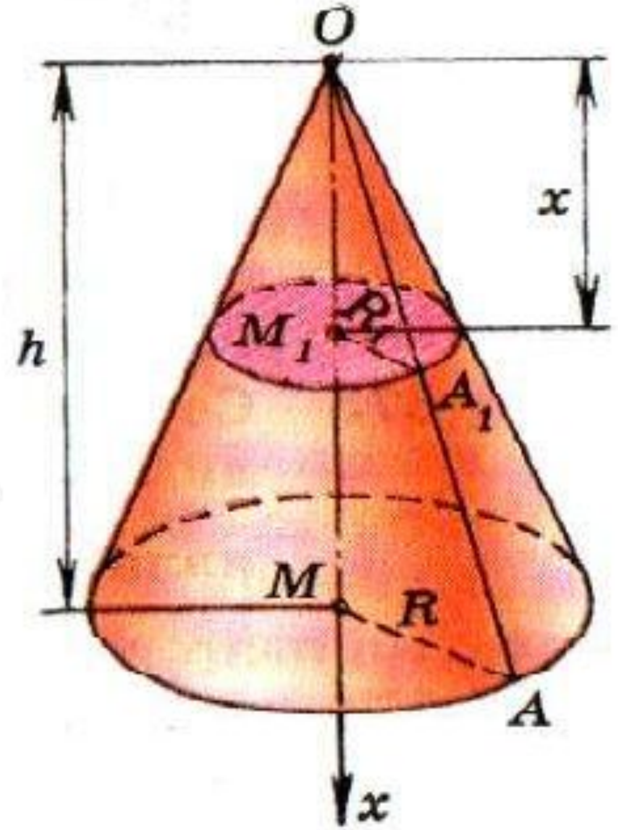
$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}, \text{ или } \frac{x}{h} = \frac{R_1}{R},$$

откуда $R_1 = \frac{R}{h}x$. Так как $S(x) = \pi R_1^2$, то

$$S(x) = \frac{\pi R^2}{h^2}x^2.$$

Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a=0$, $b=h$, получаем

$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}x^2dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$



Значение функции $z=f(x, y)$ в точке $P(a, b)$, т. е. при $x=a$ и $y=b$, обозначается $f(a, b)$ или $f(P)$. Геометрическим изображением функции $z=f(x, y)$ в прямоугольной системе координат X, Y, Z, вообще говоря, является некоторая поверхность (рис.).

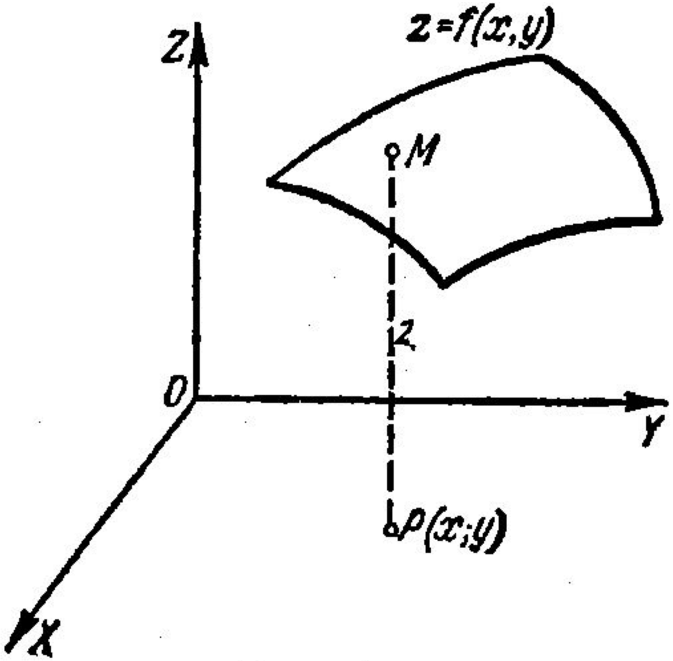


Рис.

Пример 2. Найти $f(2, -3)$ и $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, если

$$f(x, y)=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Решение. Подставляя $x=2$ и $y=-3$, находим:

$$f(2, -3)=\frac{2^2+(-3)^2}{2\cdot 2\cdot(-3)}=-\frac{13}{12}.$$

Подставляя $x=1$ и заменяя y на $\frac{y}{x}$, будем иметь

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right)=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\cdot 1\cdot\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{x^2+y^2}{2xy},$$

т. е. $f\left(1, \frac{y}{x}\right)=f(x, y)$.

18.1 Выразить площадь S боковой поверхности правильной шестиугольной усеченной пирамиды как функцию сторон x и y оснований и высоты z.

Частные производные

1. Определение частных производных. Если $z=f(x, y)$ то, полагая, например, y постоянной, получаем производную

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=f'_x(x, y),$$

которая называется *частной производной* функции z по переменной x. Аналогично определяется и обозначается частная производная функции z по переменной y. Очевидно, что для нахождения частных производных можно пользоваться обычными формулами дифференцирования.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}.$$

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную, будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$$

Пример 2. Найти частные производные функции трех аргументов

$$u=x^3y^2z+2x-3y+z+5.$$

Решение. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z+2,$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3yz-3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^3y^2+1.$$

18.2

Площадь трапеции с основаниями a, b и высотой h равна $S=\frac{1}{2}(a+b)h$. Найти $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$, $\frac{\partial S}{\partial h}$ и, пользуясь чертежом, выяснить их геометрический смысл.

18.3

Найти частные производные функции:

$$z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Полный дифференциал функции

1. **Полное приращение функции.** *Полным приращением* функции $z=f(x, y)$ называется разность

$$\Delta z=\Delta f(x, y)=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y).$$

2. **Полный дифференциал функции.** *Полным дифференциалом* функции $z=f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy.

Разность между полным приращением и полным дифференциалом функции есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Функция заведомо имеет полный дифференциал в случае непрерывности ее частных производных. Если функция имеет полный дифференциал, то она называется *дифференцируемой*. Дифференциалы независимых переменных, по определению, совпадают с их приращениями, т. е. $dx=\Delta x$ и $dy=\Delta y$. Полный дифференциал функции $z=f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов $u=f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Пример 1. Для функции

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$

найти полное приращение и полный дифференциал.

Решение.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) - (y+\Delta y)^2;$$

$$\Delta f(x, y) = [(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) - (y+\Delta y)^2] - (x^2 + xy - y^2) =$$
$$= 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 + x\cdot\Delta y + y\cdot\Delta x + \Delta x\cdot\Delta y - 2y\cdot\Delta y - \Delta y^2 =$$
$$= [(2x+y)\,\Delta x + (x-2y)\,\Delta y] + (\Delta x^2 + \Delta x\cdot\Delta y - \Delta y^2).$$

Здесь выражение $df = (2x+y)\,\Delta x + (x-2y)\,\Delta y$ есть полный дифференциал функции, а $(\Delta x^2 + \Delta x\cdot\Delta y - \Delta y^2)$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Пример 2. Найти полный дифференциал функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad \text{I.}$$

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Применение полного дифференциала функции к приближенным вычислениям. При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, а значит, при достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$ или

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}}$$

Пример 3. Высота конуса $H = 30$ *см*, радиус основания $R = 10$ *см*. Как изменится объем конуса, если увеличить H на 3 *мм* и уменьшить R на 1 *мм*?

Решение. Объем конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Изменение объема заменим приближенно дифференциалом

$$\Delta V \approx dV = \frac{1}{3}\pi(2RH\,dR + R^2\,dH) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(-2\cdot 10\cdot 30\cdot 0{,}1 + 100\cdot 0{,}3) = -10\pi \approx -31{,}4 \text{ см}^3.$$

П р и м е р 4. Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $z = x^y$. Искомое число можно считать наращенным значением этой функции при $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$. Первоначальное значение функции $z = 1^3 = 1$,

$$\Delta z \approx dz = yx^{y-1}\,\Delta x + x^y \ln x\,\Delta y = 3\cdot 1\cdot 0{,}02 + 1\cdot \ln 1\cdot 0{,}01 = 0{,}06.$$

Следовательно, $1{,}02^{3{,}01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$.

I. $(x^n)' = nx$

XI. $(a^x)' = a^x \ln$

18.4

Для функции $f(x, y) = x^2 y$ найти полное приращение и полный дифференциал в точке (1; 2); сравнить их, если:

а) $\Delta x = 1, \quad \Delta y = 2$; б) $\Delta x = 0{,}1, \quad \Delta y = 0{,}2$.

18.5

Найти полный дифференциал функции:

$$z = x^2 y^3.$$

18.6

Одна сторона прямоугольника $a = 10$ *см*, а другая $b = 24$ *см*. Как изменится диагональ l прямоугольника, если сторону a удлинить на 4 *мм*, а сторону b укоротить на 1 *мм*? Найти приближенную величину изменения и сравнить с точной.

Дифференцирование сложных функций

1 . Случай одной независимой переменной. Если $z=f(x, y)$ есть дифференцируемая функция аргументов x и y, которые в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

то производная сложной функции $z=f[\varphi(t), \psi(t)]$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

В частности, если t совпадает с одним из аргументов, например x, то «полная» производная функции z по x будет:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Пример 1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z=e^{3x+2y}, \quad \text{где} \quad x=\cos t, \quad g=t^2.$$

Решение. По формуле (1) имеем

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+}$$

$$\frac{dz}{dt}=e^{3x+2y}\cdot 3(-\sin t)+e^{3x+2y}\cdot 2\cdot 2t=$$

$$=e^{3x+2y}(4t-3\sin t)=e^{3\cos t+2t^2}(4t-3\sin t).$$

Пример 2. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если

$$z=e^{xy}, \quad \text{где} \quad y=\varphi(x).$$

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$. На основании формулы (2) получаем

$$\frac{dz}{dx}=ye^{xy}+xe^{xy}\varphi'(x).$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial}}$$

2. Дифференциалы высших порядков. *Дифференциалом второго порядка* функции $z=f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала (первого порядка) этой функции

$$d^2z=d(dz).$$

Аналогично определяются дифференциалы функции z порядка выше второго, например:

$$d^3z=d(d^2z)$$

и, вообще,

$$d^nz=d(d^{n-1}z) \qquad (n=2,3, \ldots).$$

Если $z=f(x, y)$, где x и y—независимые переменные и функция f имеет непрерывные частные производные второго порядка, то дифференциал 2-го порядка функции z вычисляется по формуле

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{1}$$

Вообще, при наличии соответствующих производных справедлива символическая формула

$$d^nz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z,$$

которая формально развертывается по биномиальному закону.

Если $z=f(x, y)$, где аргументы x и y суть функции одного или нескольких независимых переменных, то

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y. \tag{2}$$

Если x и y—независимые переменные, то $d^2x=0$, $d^2y=0$ и формула (2) становится тождественной формуле (1).

2. Случай нескольких независимых переменных. Если z есть сложная функция нескольких независимых переменных, например $z=f(x, y)$, где $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ (u и v — независимые переменные; f, φ, ψ — дифференцируемые функции), то частные производные z по u и v выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

Во всех рассмотренных случаях справедлива формула

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(*свойство инвариантности полного дифференциала*).

Пример 3. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если

$$z=f(x, y), \quad \text{где} \quad x=uv, \quad y=\frac{u}{v}.$$

Решение. Применяя формулы (3) и (4), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=f'_x(x, y)\,v+f'_y(x, y)\,\frac{1}{v}$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial v}=f'_x(x, y)\,u-f'_y(x, y)\,\frac{u}{v^2}.$$

Пример 4. Показать, что функция $z=\varphi(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Решение. Функция φ зависит от x и y через промежуточный аргумент $x^2+y^2=t$, поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'(x^2+y^2)\,2x$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'(x^2+y^2)\,2y.$$

Подставив частные производные в левую часть уравнения, будем иметь:

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y\varphi'(x^2+y^2)\,2x-x\varphi'(x^2+y^2)\,2y=$$
$$=2xy\varphi'(x^2+y^2)-2xy\varphi'(x^2+y^2)\equiv 0,$$

т. е. функция z удовлетворяет данному уравнению.

Уравнения математической физики в экологии и теплоэнергетике

ЗАВЕРШЕНИЕ ЛЕКЦИИ 18

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные

Полный дифференциал функции

Дифференцирование сложных функций

(10.06.2021. 09:00-10:20. ХТП-119 и ХТБ-119)