Угол между прямой и плоскостью

Сегодня на уроке:

- ✔ введем понятие проекции произвольной фигуры
- ✔ определение проекции точки на плоскость
- ✔ угол между прямой и плоскостью

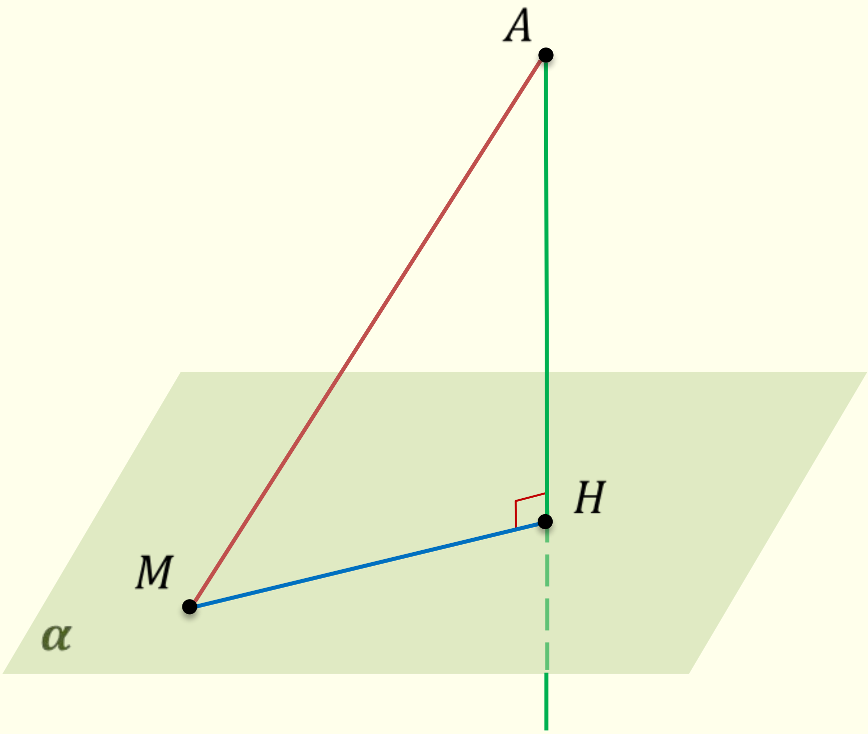
AH – перпендикуляр

H – основание перпендикуляра

AM – наклонная

M – основание наклонной

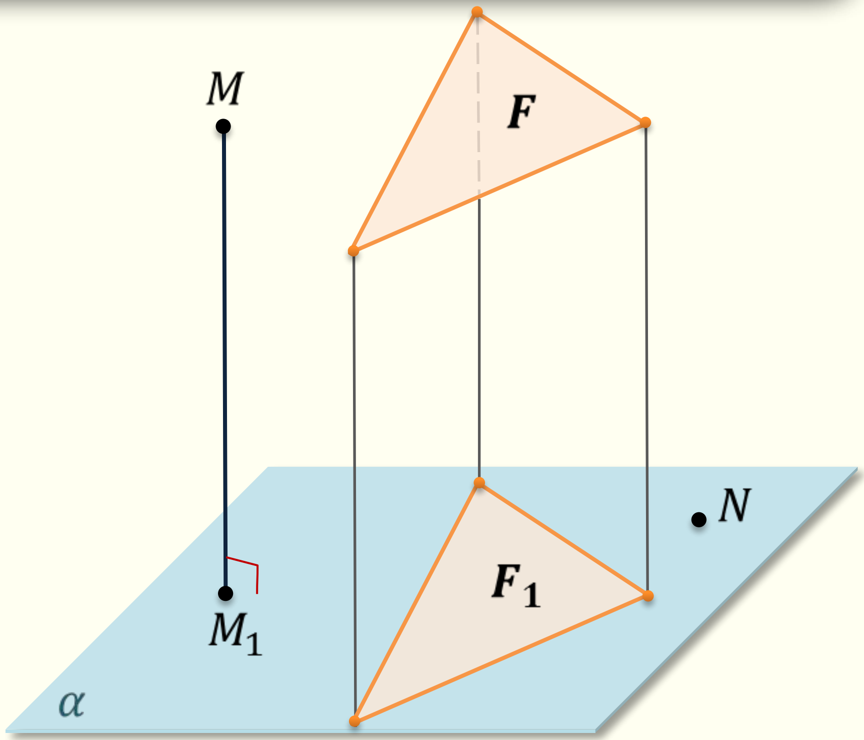
MH – проекция наклонной



Определение. ***Проекцией точки на плоскость*** называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

Обозначим буквой $\boldsymbol{F}$ какую-нибудь фигуру в пространстве.

Если мы построим *проекции всех точек* этой фигуры на плоскость α, то получим фигуру $\boldsymbol{F_1}$, которая называется ***проекцией фигуры F*** на данную плоскость.



Определение. ***Проекцией прямой a на неперпендикулярную к ней плоскость α*** является прямая.

Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.

Доказательство.

Пусть дана плоскость α.

Прямая $a \cap \alpha$.

Проведем $MH \perp \alpha$, $M \in a$.

$a \subset \beta$, $MH \subset \beta$

$\alpha \cap \beta = a_1$

Докажем, что a_1 – проекция прямой a на плоскость α.

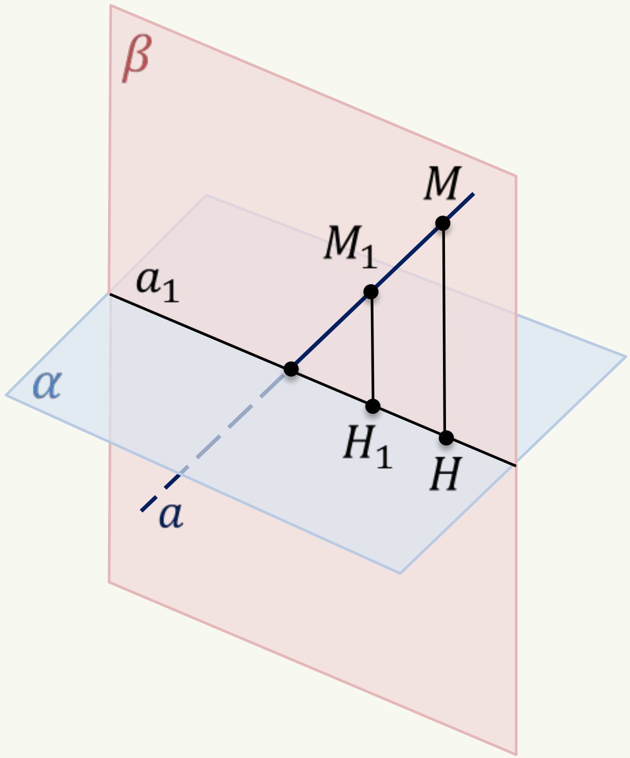
$M_1 \in a$, $M_1H_1 \subset \beta$, $M_1H_1 \parallel MH$ $(M_1H_1 \cap a_1 = H_1)$

Т. к. $MH \perp \alpha$ и $MH \parallel M_1H_1$, то $M_1H_1 \perp \alpha$.

Значит, точка H_1 является проекцией точки M_1.

Следовательно, прямая a_1 является проекцией прямой a на плоскость α.

Что и требовалось доказать.

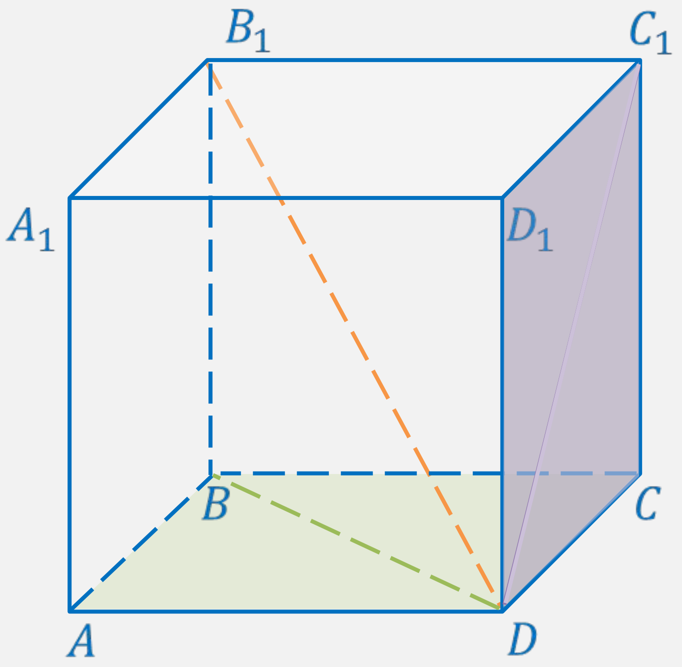


Например.

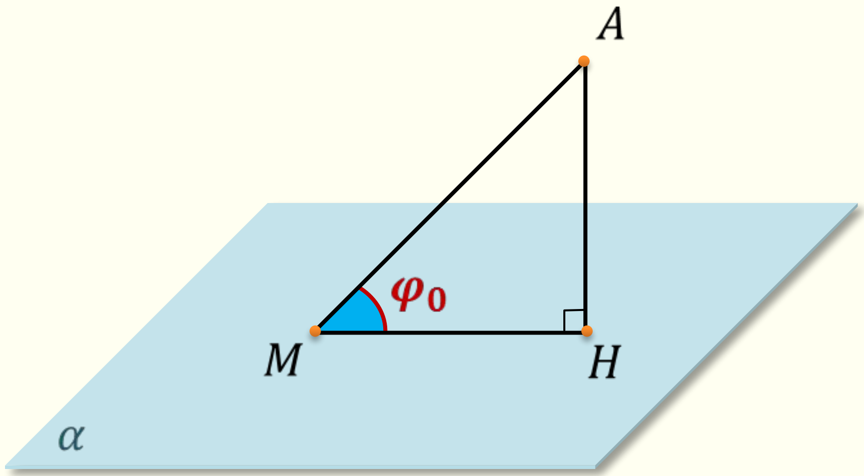
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

Проекцией прямой B_1D на плоскость DD_1C_1 является прямая DC_1.

Проекция прямой B_1D на плоскость основания куба ABC есть прямая BD.

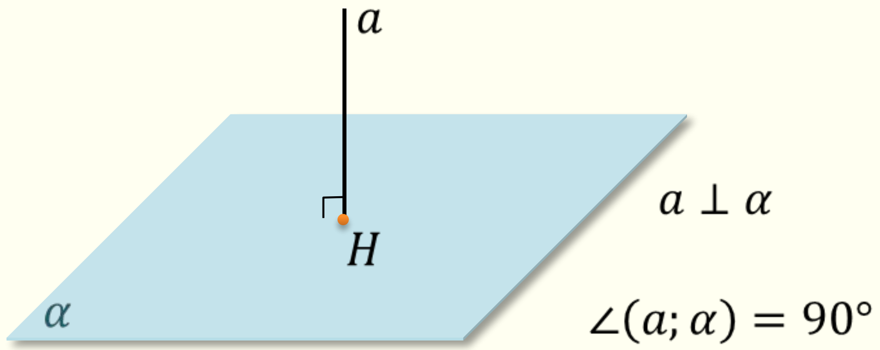


Определение. ***Углом между прямой и плоскостью***, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется *угол между прямой* и *ее проекцией на плоскость*.

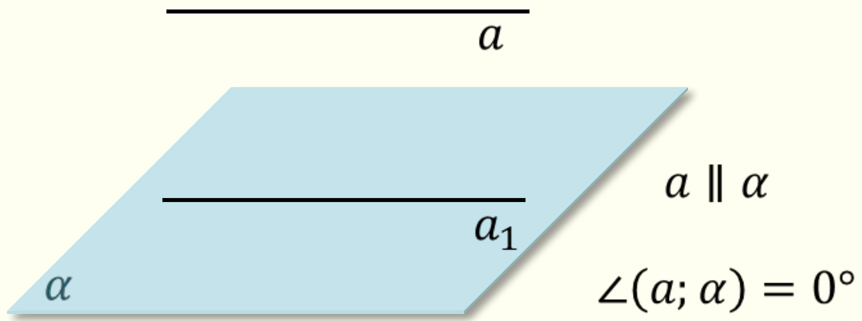


$$\angle(AM;\alpha) = \angle AMH = \varphi_0$$

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то она проектируется в точку пересечения этой прямой с плоскостью.



Если данная прямая параллельна плоскости, то ее проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной.



Замечание. Угол между прямой и плоскостью является *наименьшим* из всех углов, которые данная прямая образует с прямыми, лежащими в данной плоскости и проходящими через точку пересечения прямой и плоскости.

Доказательство.

Пусть $a \cap \alpha = O$, $a_1 \subset \alpha$.

Пусть $b \subset \alpha$, $O \in b$.

Обозначим $\angle(a; a_1) = \varphi_0$, $\angle(a; b) = \varphi$.

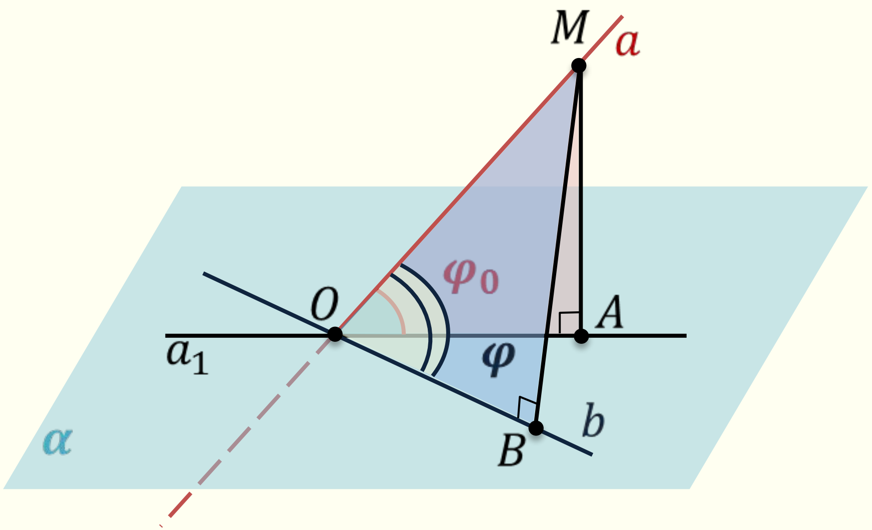
Докажем, что $\varphi_0 < \varphi$.

$M \in a$, $MA \perp a_1$, $MB \perp b$

Из ΔMAO и ΔMBO найдем $\sin\varphi_0$ и $\sin\varphi$.

$$\sin\varphi_0 = \frac{MA}{MO}, \quad \sin\varphi = \frac{MB}{MO}$$

$$\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi} = \frac{MA}{MO} : \frac{MB}{MO} = \frac{MA}{MB}$$



Так как $MA < MB$, то $\dfrac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi_0 < \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 < \varphi$

Если же $a \perp b$, то $\varphi = 90°$, а значит, $\varphi > \varphi_0$.

Что и требовалось доказать.

Задача. Дан правильный тетраэдр $DABC$.
Найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью DBC.

Решение.

1) Угол между прямой AB и плоскостью DBC равен углу между прямой AB и проекцией этой прямой на плоскость DBC.

2) Если $AO \perp DBC$, то $OC = OB = OD$ (как проекции равных соответственно наклонных AC, AB, AD).

$BK \cap CE \cap DF = O$

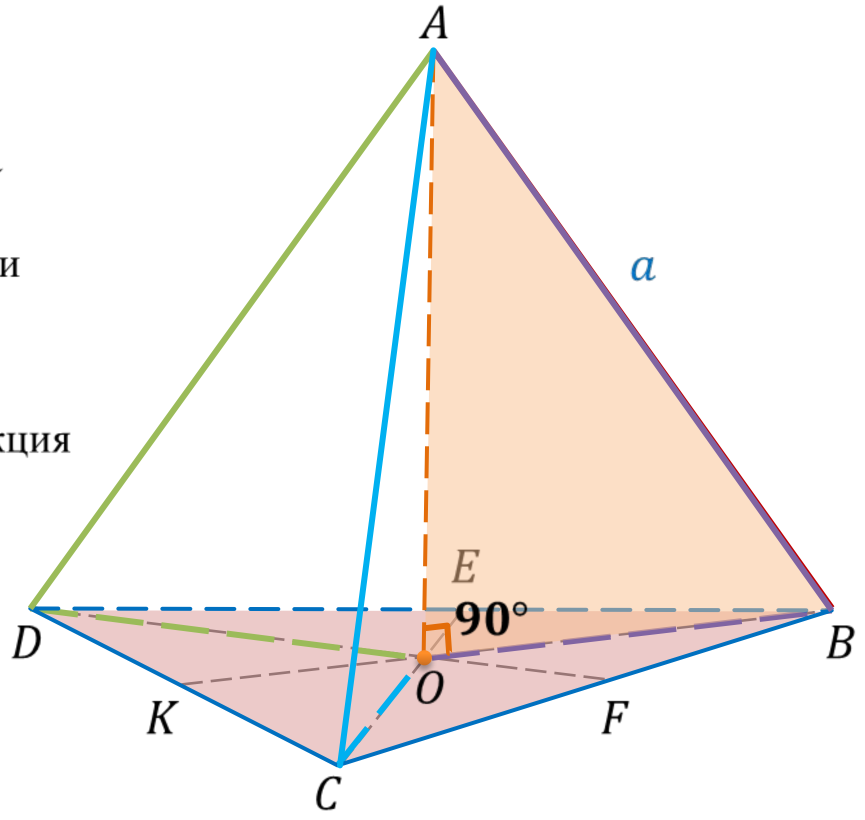
Таким образом, прямая BO перпендикулярная проекция прямой AB на плоскость DBC .

3) Пусть $AB = AC = BC = AD = BD = CD = a$.

В $\triangle AOB$: $AB = a$, $\angle AOB = 90°$, $BO = \frac{2}{3}BK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Тогда, $\cos ABO = \frac{OB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{3} : a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\cos ABO = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Угол между прямой и плоскостью