

Угол между прямой и плоскостью

Сегодня на уроке:

- ✓ введем понятие проекции произвольной фигуры
- ✓ определение проекции точки на плоскость
- ✓ угол между прямой и плоскостью

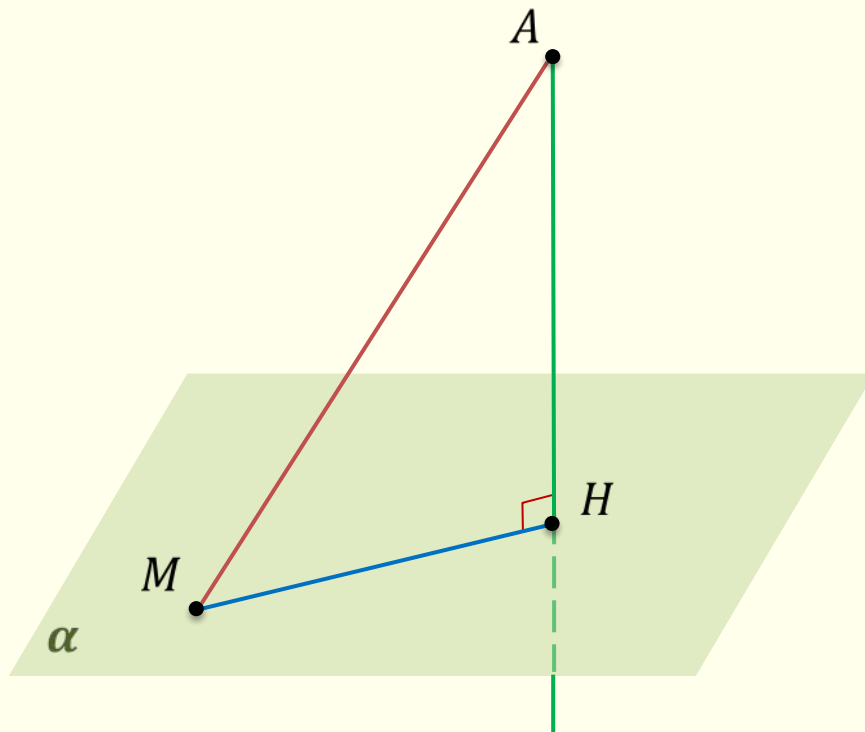
AH – перпендикуляр

H – основание перпендикуляра

AM – наклонная

M – основание наклонной

MH – проекция наклонной

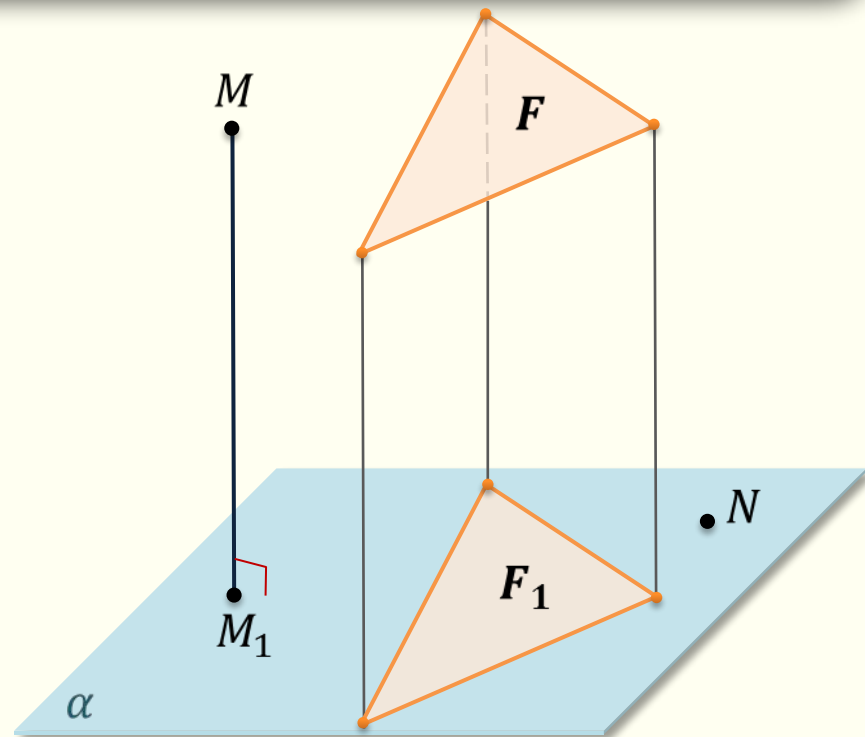


Определение. *Проекцией точки на плоскость* называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

Обозначим буквой F какую-нибудь фигуру в пространстве.

Если мы построим *проекции всех точек* этой фигуры на плоскость α , то получим фигуру F_1 , которая называется *проекцией фигуры F* на данную плоскость.

Определение. *Проекцией прямой a на неперпендикулярную к ней плоскость α* является прямая.



Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.

Доказательство.

Пусть дана плоскость α .

Прямая $a \cap \alpha$.

Проведем $MN \perp \alpha$, $M \in a$.

$a \subset \beta$, $MN \subset \beta$

$\alpha \cap \beta = a_1$

Докажем, что a_1 – проекция прямой a на плоскость α .

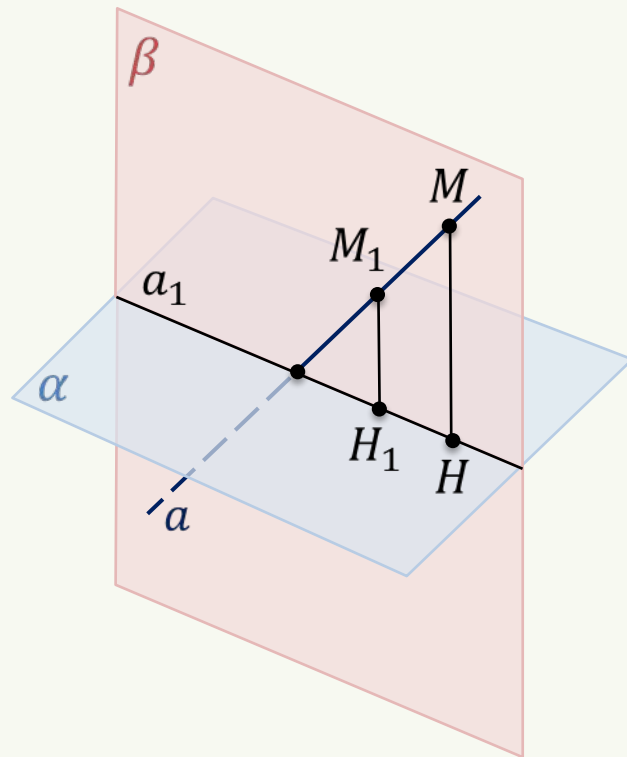
$M_1 \in a$, $M_1N_1 \subset \beta$, $M_1N_1 \parallel MN$ ($M_1N_1 \cap a_1 = N_1$)

Т. к. $MN \perp \alpha$ и $MN \parallel M_1N_1$, то $M_1N_1 \perp \alpha$.

Значит, точка N_1 является проекцией точки M_1 .

Следовательно, прямая a_1 является проекцией прямой a на плоскость α .

Что и требовалось доказать.

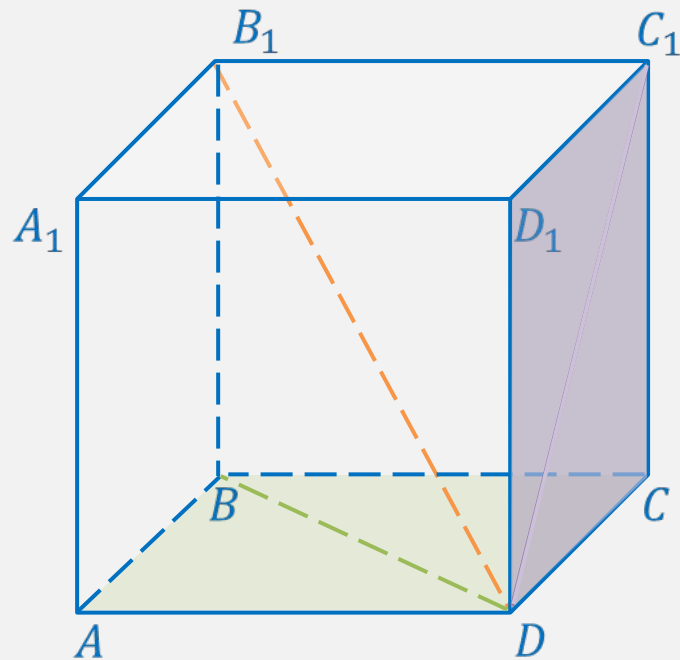


Например.

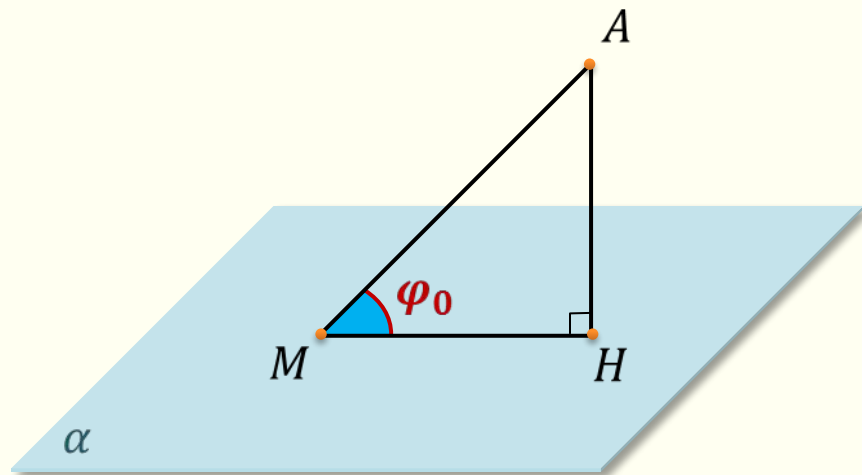
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб

Проекцией прямой $B_1 D$ на плоскость $DD_1 C_1$ является прямая DC_1 .

Проекция прямой $B_1 D$ на плоскость основания куба ABC есть прямая BD .

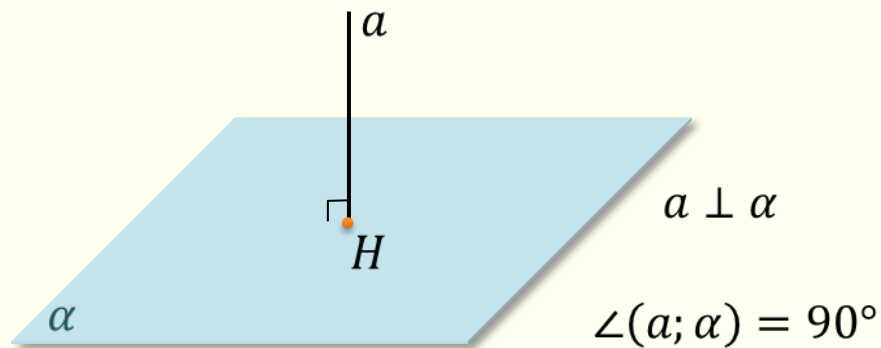


Определение. *Углом между прямой и плоскостью*, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется *угол между прямой и ее проекцией на плоскость*.

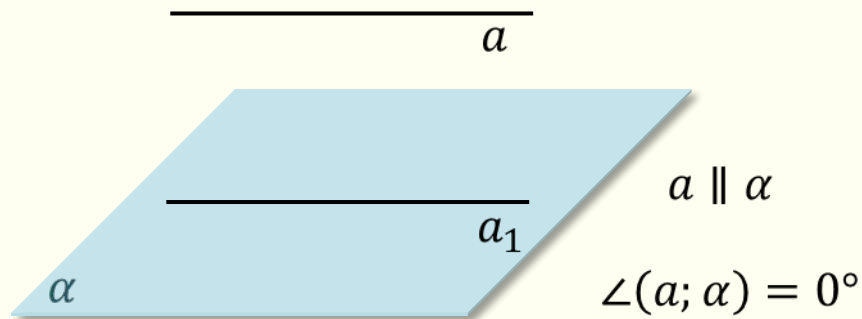


$$\angle(AM; \alpha) = \angle AMH = \varphi_0$$

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то она проектируется в точку пересечения этой прямой с плоскостью.



Если данная прямая параллельна плоскости, то ее проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной.



Замечание. Угол между прямой и плоскостью является *наименьшим* из всех углов, которые данная прямая образует с прямыми, лежащими в данной плоскости и проходящими через точку пересечения прямой и плоскости.

Доказательство.

Пусть $a \cap \alpha = O$, $a_1 \subset \alpha$.

Пусть $b \subset \alpha$, $O \in b$.

Обозначим $\angle(a; a_1) = \varphi_0$, $\angle(a; b) = \varphi$.

Докажем, что $\varphi_0 < \varphi$.

$M \in a$, $MA \perp a_1$, $MB \perp b$

Из $\triangle MAO$ и $\triangle MBO$ найдем $\sin \varphi_0$ и $\sin \varphi$.

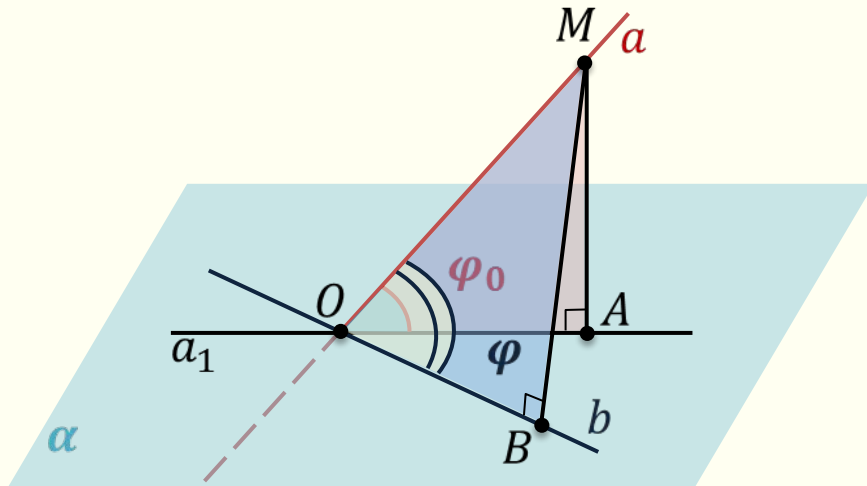
$$\sin \varphi_0 = \frac{MA}{MO}, \quad \sin \varphi = \frac{MB}{MO}$$

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} = \frac{MA}{MO} : \frac{MB}{MO} = \frac{MA}{MB}$$

Так как $MA < MB$, то $\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} < 1 \Rightarrow \sin \varphi_0 < \sin \varphi \Rightarrow \varphi_0 < \varphi$

Если же $a \perp b$, то $\varphi = 90^\circ$, а значит, $\varphi > \varphi_0$.

Что и требовалось доказать.



Задача. Дан правильный тетраэдр $DABC$.

Найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью DBC .

Решение.

1) Угол между прямой AB и плоскостью DBC равен углу между прямой AB и проекцией этой прямой на плоскость DBC .

2) Если $AO \perp DBC$, то $OC = OB = OD$ (как проекции равных соответственно наклонных AC, AB, AD).

$$BK \cap CE \cap DF = O$$

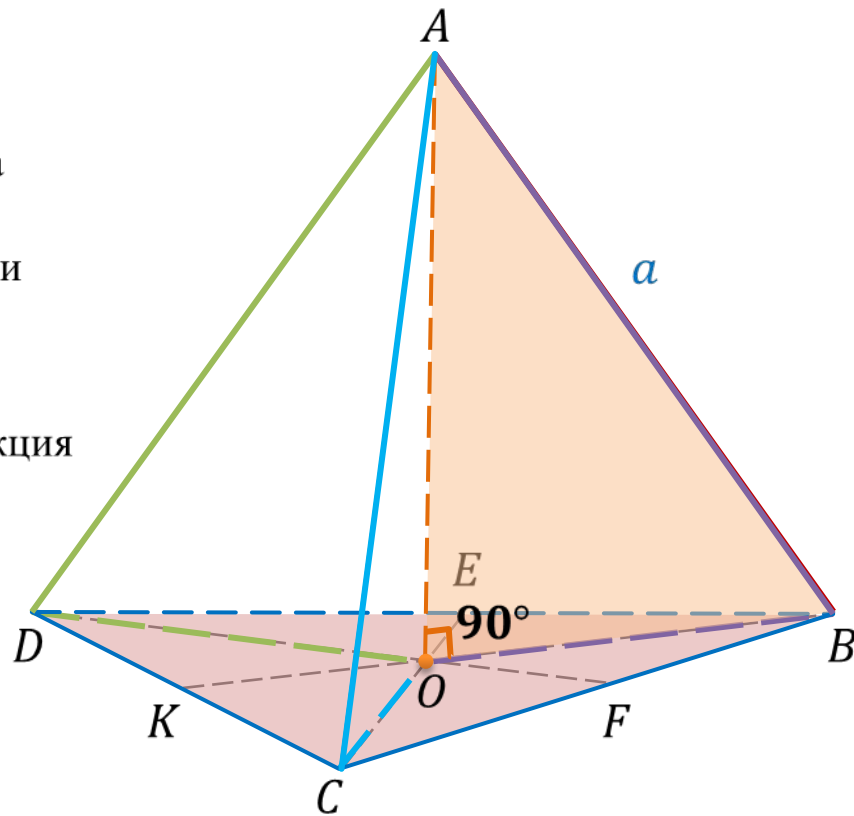
Таким образом, прямая BO перпендикулярная проекция прямой AB на плоскость DBC .

3) Пусть $AB = AC = BC = AD = BD = CD = a$.

$$\text{В } \triangle AOB: AB = a, \angle AOB = 90^\circ, BO = \frac{2}{3}BK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Тогда, } \cos ABO = \frac{OB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{3} : a = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\cos ABO = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Угол между прямой и плоскостью

