Колебания. Общие понятия.

Физические процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью…

Период колебаний – время одного полного к – ия … → T

Частота колебаний – ч. полных к- ий за 1 сек. → $\nu = \frac{1}{T}$

Циклическая (круговая) частота колебаний → $\omega = 2\pi\nu$

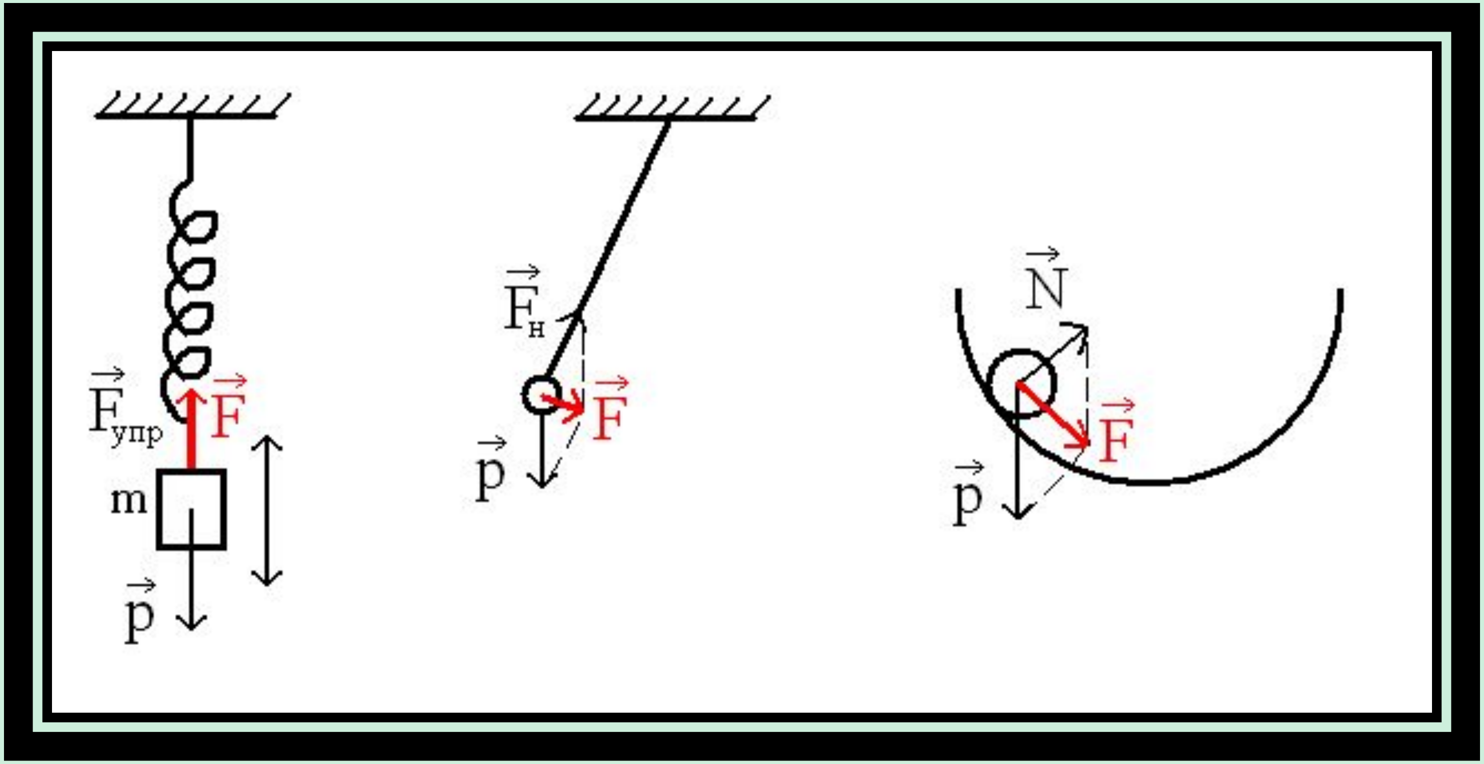
Гармонические колебания… → $\sin(\omega t + \varphi)$, $\cos(\omega t + \varphi)$

*Механические колебания (**свободные, вынужденные,** автоколебания, параметрические)...*

*Электрические колебания (**свободные, вынужденные**)…*

Свободные колебания в механической системе

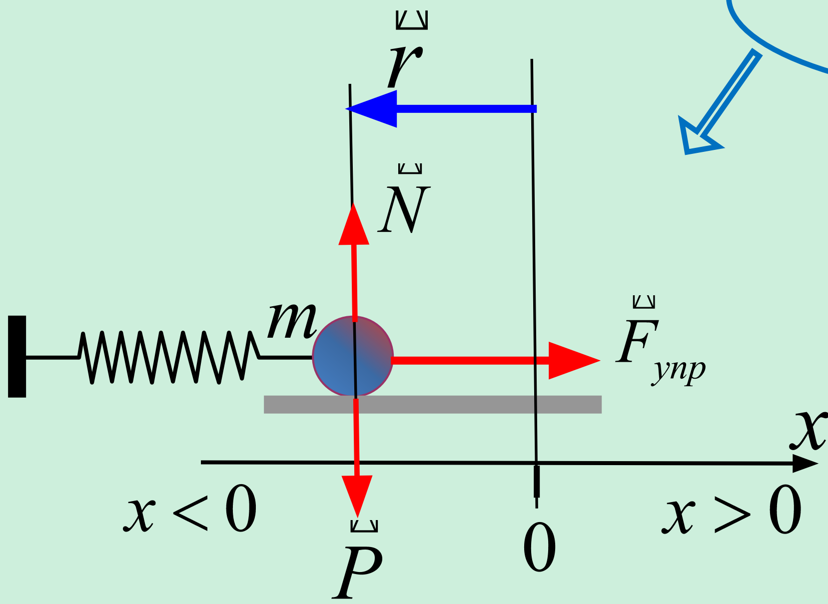
1. Свободные колебания: *колебания в системе, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе.*



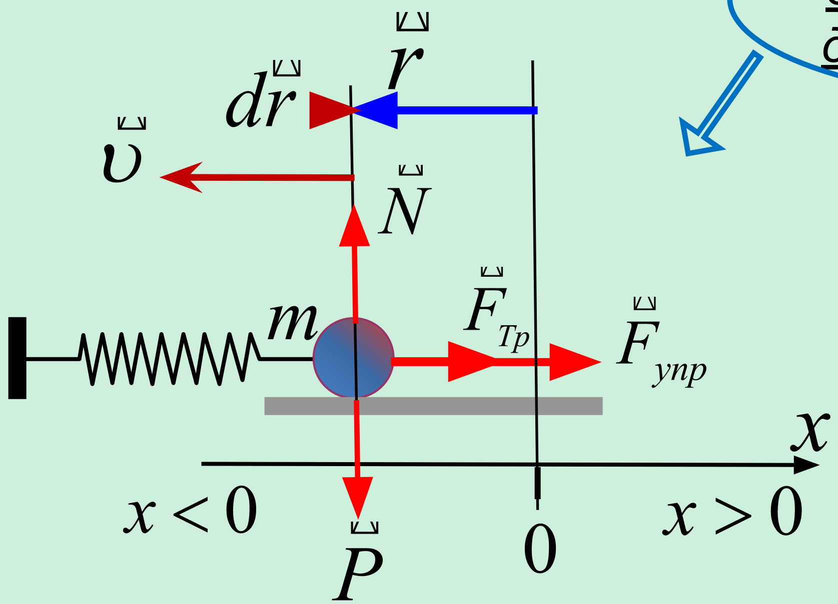
Необходимое условие существования свободных колебаний в механической системе: наличие силы, направленной к положению равновесия . → ***Упругая, квазиупругая сила…***

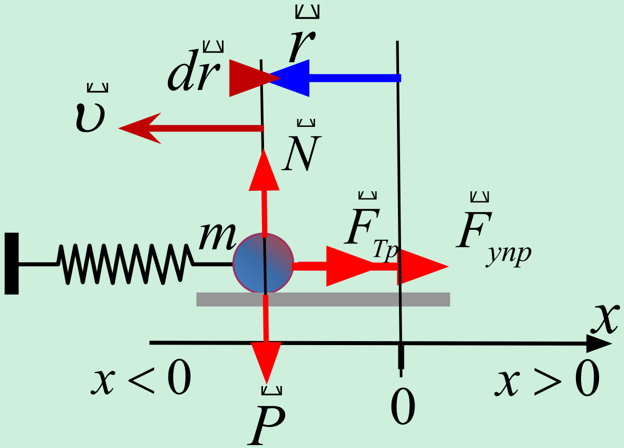
2. Модель свободных колебаний в механической системе.

<u>*На рис.:*</u>
<u>*деформация сжатия*</u>



На рис.:
деформация сжатия;
движение м.т. налево





$$\vec F_{упр} = -\kappa \vec r \longrightarrow (\vec F_{упр})_x = -\kappa x$$

Закон Гука

$$\vec F_{Тр} = -\mu \vec \upsilon \longrightarrow (\vec F_{Тр})_x = -\mu \, {dx}/{dt}$$

$$(\vec F_{Тр})_x = -\mu \dot x$$

$$\vec P = -\vec N$$

2-ой з-н Ньютона:

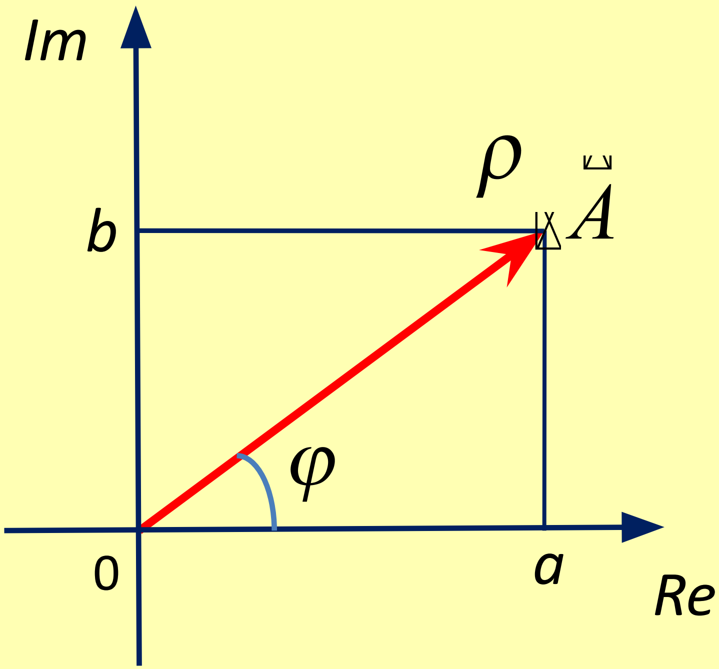
$$m\vec a = \vec F_{упр} + \vec F_{Тр} + \vec P + \vec N \longrightarrow$$

OX: $m\ddot x = -\kappa x - \mu \dot x + 0 + 0$

*Докажем, что при определенных условиях **x(t)** может меняться по гармоническому закону, т.е. в исследуемой механической системе могут существовать гармонические колебания.*

Комплексные числа

$$\tilde{x} = a + ib = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$$



$$\mathrm{Re}\,\tilde{x} = a = \rho\cos\varphi$$

$$\mathrm{Im}\,\tilde{x} = b = \rho\sin\varphi$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3. Решение однородного дифференциального уравнения 2-го порядка при помощи комплексных чисел

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m}x + \frac{\mu}{m}\dot{x} = 0$$

$$\frac{\kappa}{m} = \omega_0^2$$

$$\frac{\mu}{m} = 2\alpha$$

$\omega_0\ ,\alpha$ $\Leftrightarrow$ Действительные числа, характеризующие систему.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\alpha\dot{x} = 0$$

$x(t)$ - Решение ур - ия

$$\ddot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} + 2\alpha\dot{\tilde{x}} = 0$$

$\tilde{x}(t)$ - Решение ур - ия

$$x(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{x}(t)$$

Ищем решение в виде:

$$\tilde{x} = a(t)e^{i(\omega t+\varphi)} \qquad a(t)?\ \ \omega?\ \ \varphi?$$

$$x = a(t)e^{i(\omega t+\varphi)} \qquad \dot{x} = \dot{a}e^{i(\omega t+\varphi)} + ai\omega e^{i(\omega t+\varphi)}$$

$$\ddot{x} = \left[\ddot{a}e^{i(\omega t+\varphi)} + \dot{a}i\omega e^{i(\omega t+\varphi)}\right] +$$

$$+ \left[\dot{a}i\omega e^{i(\omega t+\varphi)} + a(i\omega)^2 e^{i(\omega t+\varphi)}\right]$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\alpha\dot{x} = 0}$$

После подстановки и сокращения на $e^{i(\omega t+\varphi)}$:

$$\ddot{a} + \underline{\dot{a}i\omega} + \underline{\dot{a}i\omega} - a\omega^2 + a\omega_0^2 + 2\alpha\dot{a} + \underline{2\alpha a i\omega} = 0$$

Равенство нулю реальной и мнимой частей приводят к двум уравнениям:

1. $\mathrm{Re}: \ddot{a} + a(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\alpha\dot{a} = 0$

2. $\mathrm{Im}: \dot{a} + \alpha a = 0$

2. $\mathrm{Im}: \dot{a} + \alpha a = 0 \Longrightarrow \frac{da}{dt} = -\alpha a \to \frac{da}{a} = -\alpha\, dt$

$$\int \frac{da}{a} = -\alpha \int dt \to \ln a = -\alpha t + \ln a_0$$

$a(t) = a_0 e^{-\alpha t}$, где a_0 - любое число

1. $\mathrm{Re}: \ddot{a} + a(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\alpha\dot{a} = 0$

$\dot{a} = -\alpha a_0 e^{-\alpha t}$; $\ddot{a} = \alpha^2 a_0 e^{-\alpha t}$; $\alpha^2 + (\omega_0^2 - \omega^2) - 2\alpha^2 = 0$

$$x = \mathrm{Re}\, a_0 e^{-\alpha t} e^{i(\omega t + \varphi)} = a_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$x = a_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$, где a_0, φ - любые числа

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

$\alpha \le \omega_0$

4. Свободные колебания без затуханий

$$\mu = 0 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \omega = \omega_0\,; a = a_0$$

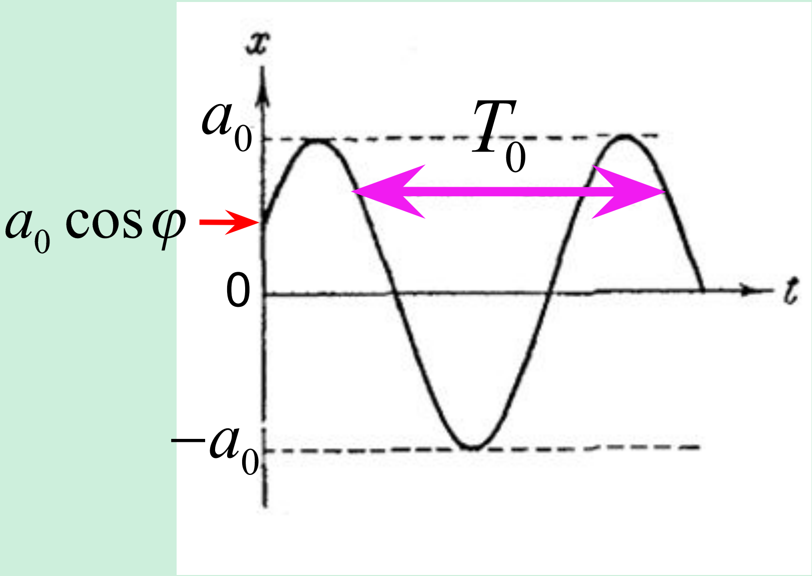
⇨

З-н сохр.полн.мех.энергии:

$$\frac{\kappa x^2}{2} + \frac{\dot{m}x^2}{2} = const.$$

⇩

$$x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



$$x(t=0) = a_0 \cos\varphi$$

Амплитуда колебаний

$$a_0 = \max|x| > 0$$

Определяется…

Фаза колебаний

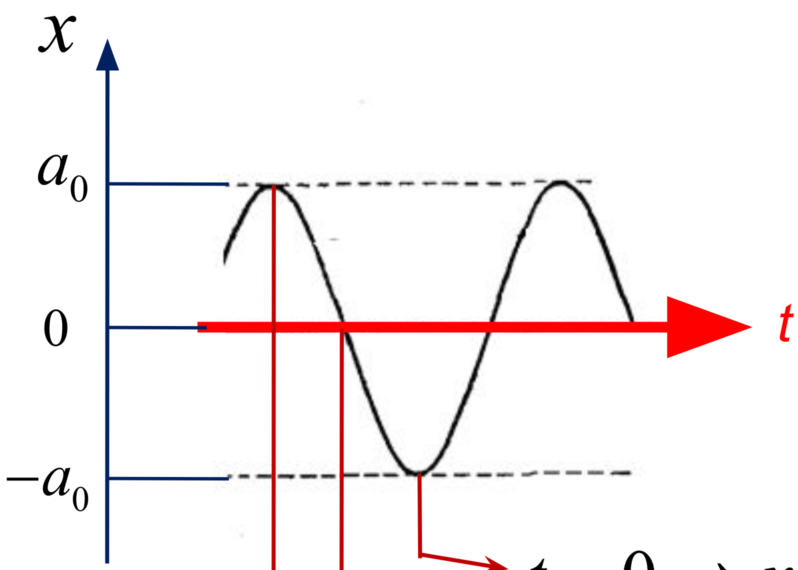
$$(\omega_0 t + \varphi)$$

Начальная фаза колебаний
Определяется моментом начала отсчета времени.

$$x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

<u>Начальная фаза</u> колебаний.
Определяется моментом начала отсчета времени.

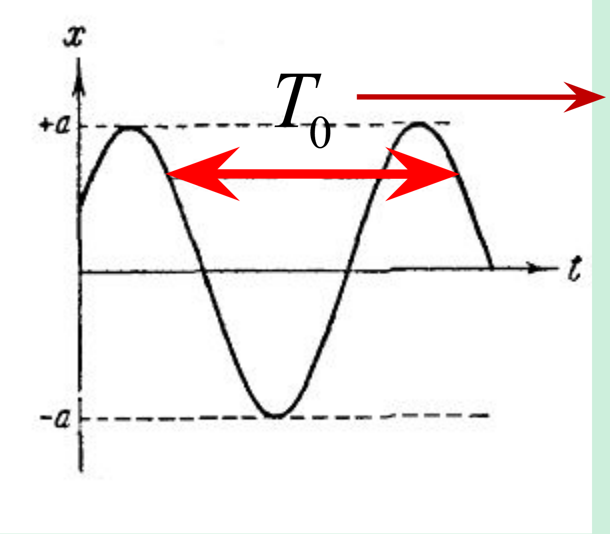
$$\boxed{x(t=0) = a_0 \cos\varphi}$$



$$t = 0 \rightarrow x = -a_0 \rightarrow \varphi = \pi$$

$$t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$t = 0 \rightarrow x = a_0 \rightarrow \varphi = 0$$



T_0 → Период колебаний – мин. время, через кот. повторяется мех. состояние системы.

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos\left[\omega_0 (t + T_0) + \varphi\right]$$

$$\omega_0 T_0 = 2\pi$$

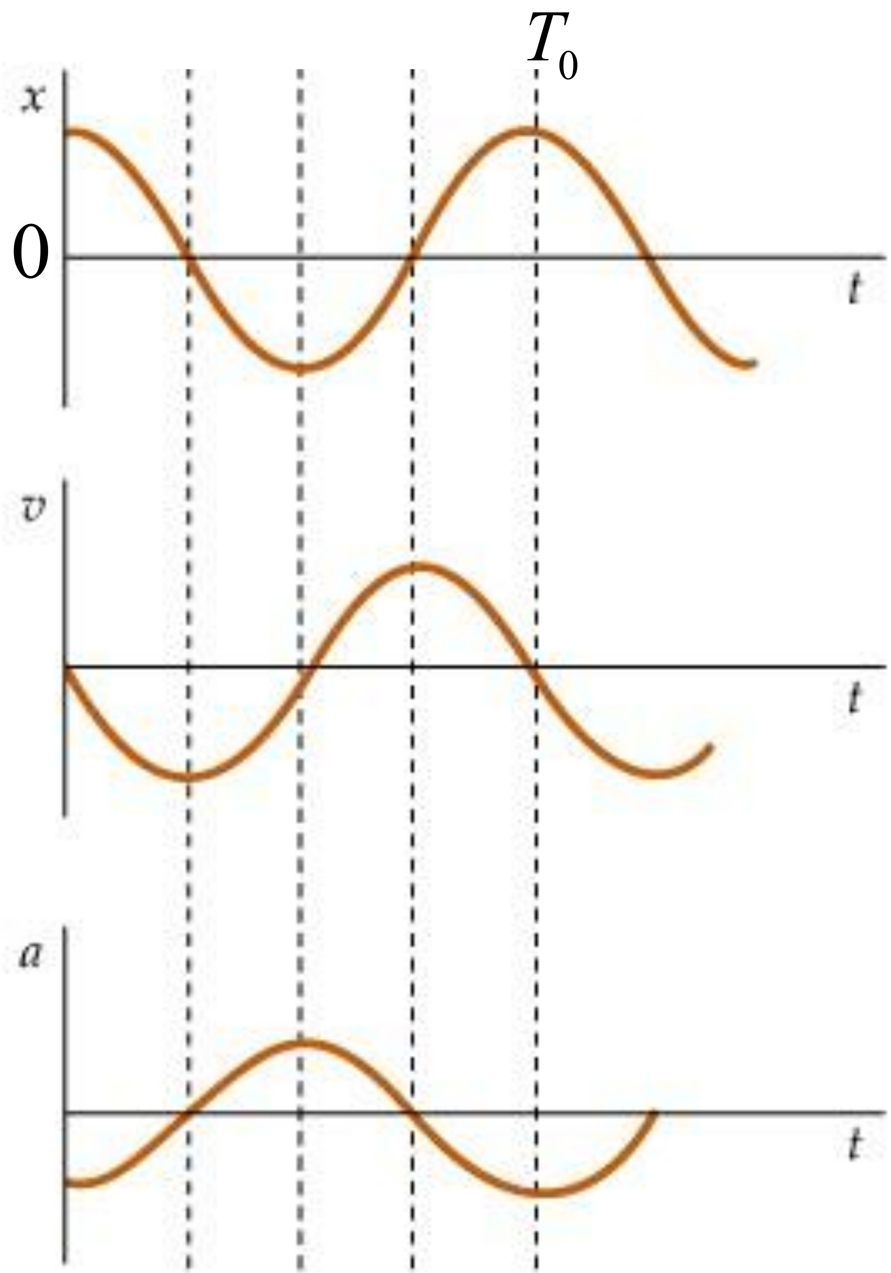
$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0}$$

Собственная частота и собственный период колебаний системы

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0}$$

Собственная циклическая частота колебаний системы

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = 2\pi\nu_0$$



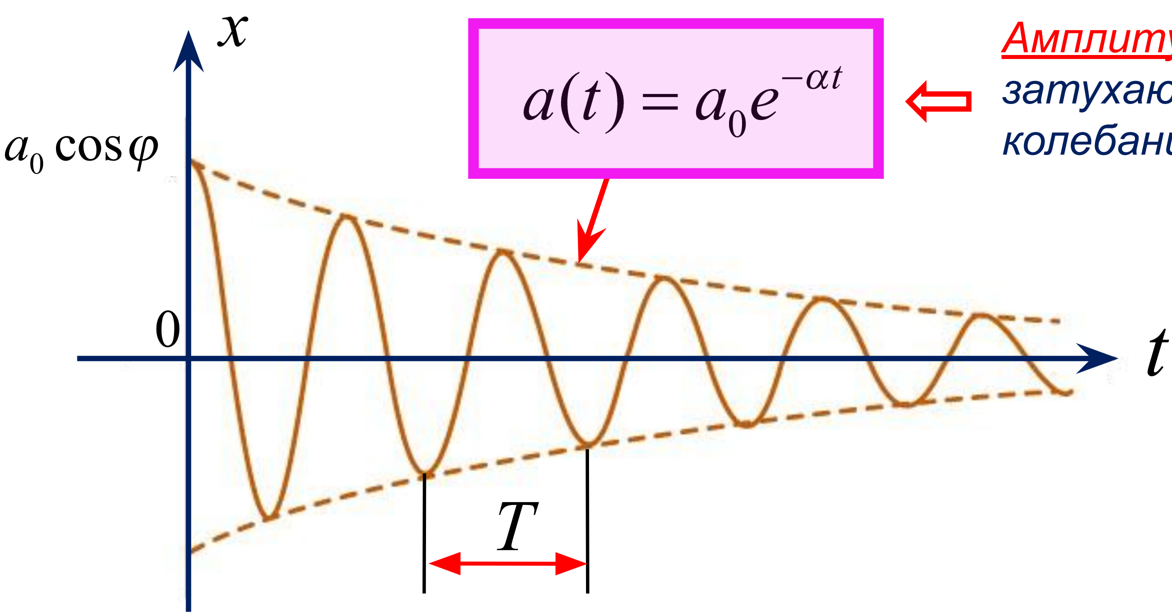
$$x = a_0 \cos \omega_0 t$$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \ddot{x}$$

5. Свободные колебания с затуханием

$$\alpha \neq 0 \quad \alpha < \omega_0 \qquad x = a_0 e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$



$$\boxed{a(t) = a_0 e^{-\alpha t}}$$ ⇦ Амплитуда затухающих колебаний

$$\frac{\kappa x^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} \neq const.$$

α Коэффициент затухания системы

T - Период затухающих колебаний системы

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos\left[\omega(t + T) + \varphi\right] \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}$$

ω - Циклическая частота затухающих колебаний $\qquad \omega < \omega_0$

Декремент затухания

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\alpha T}$$

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \alpha T$$

Добротность

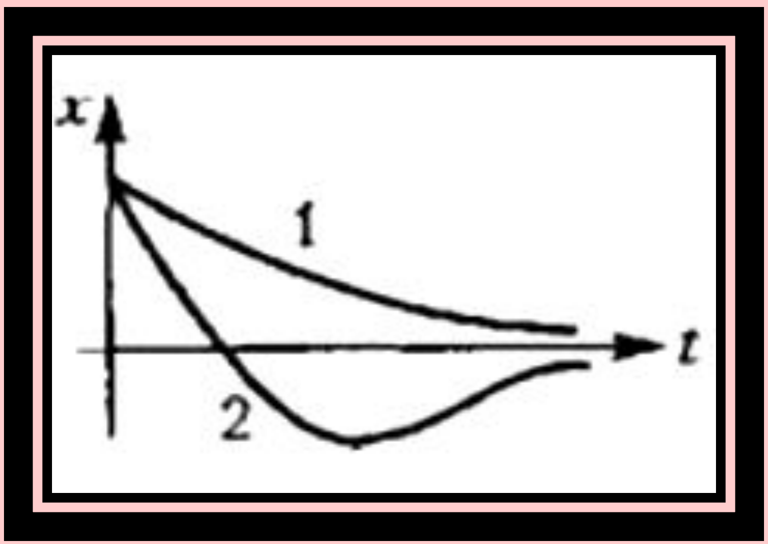
$$Q = \frac{2\pi}{\lambda}$$

6. Апериодическое движение

$$\alpha \neq 0 \quad \alpha > \omega_0$$

$$\cancel{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

$$\cancel{x = a_0 e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)}$$



1-….
2-….

В частном случае, когда

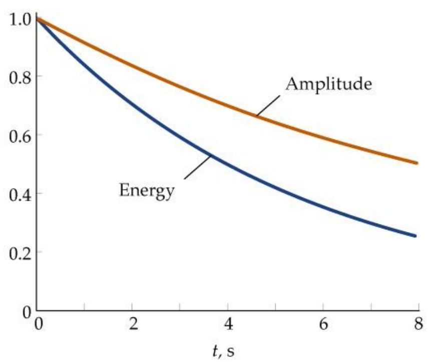
$$\alpha = \omega_0$$

$$\Downarrow$$

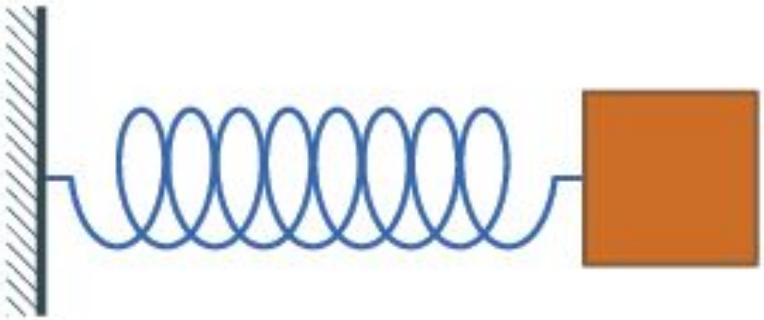
$$\omega = 0$$

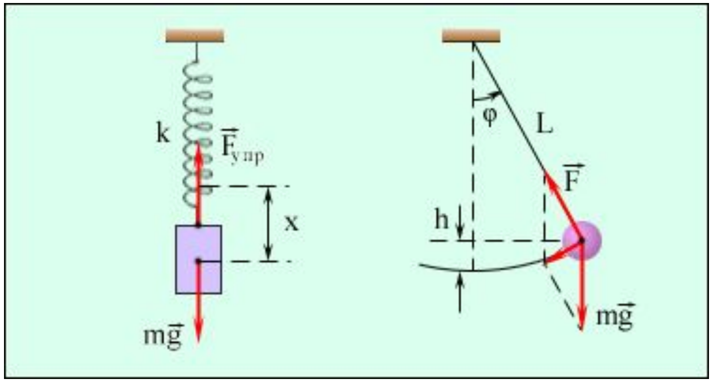
$$\Downarrow$$

$$x(t) = a_0 e^{-\alpha t}\cos\varphi$$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
t, s
Amplitude
Energy


m





k
$\vec{F}_{упр}$
x
$m\vec{g}$
φ
L
$\vec{F}$
h
$m\vec{g}$