

## Колебания. Общие понятия.

Физические процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью...

Период колебаний – время одного *полного* к – ия...

$$T$$

Частота колебаний – ч. полных к- ий за 1 сек.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Циклическая ( круговая ) частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu$$

Гармонические колебания...

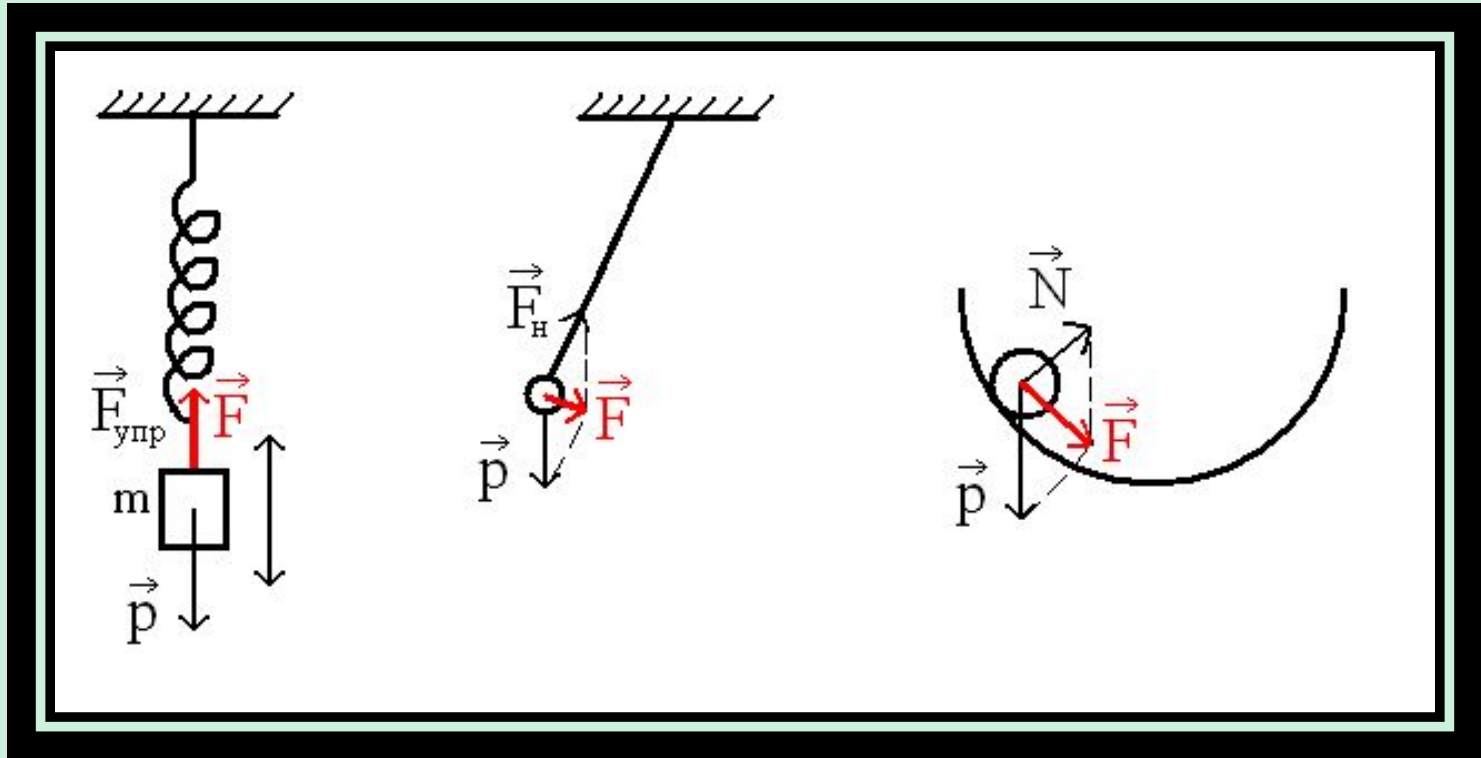
$$\begin{aligned} &\sin(\omega t + \varphi) \\ &\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Механические колебания ( свободные, вынужденные, автоколебания, параметрические )...

Электрические колебания ( свободные, вынужденные )...

## Свободные колебания в механической системе

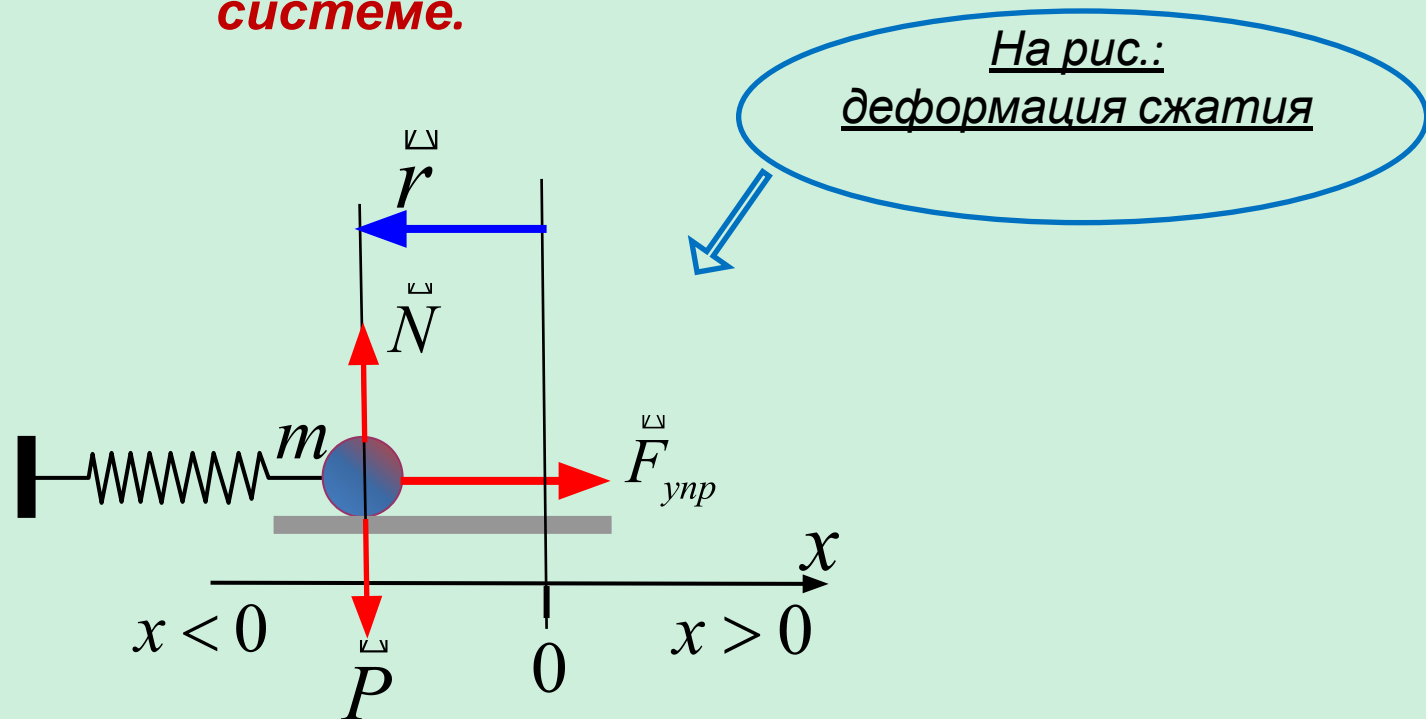
**1. Свободные колебания:** колебания в системе, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе.

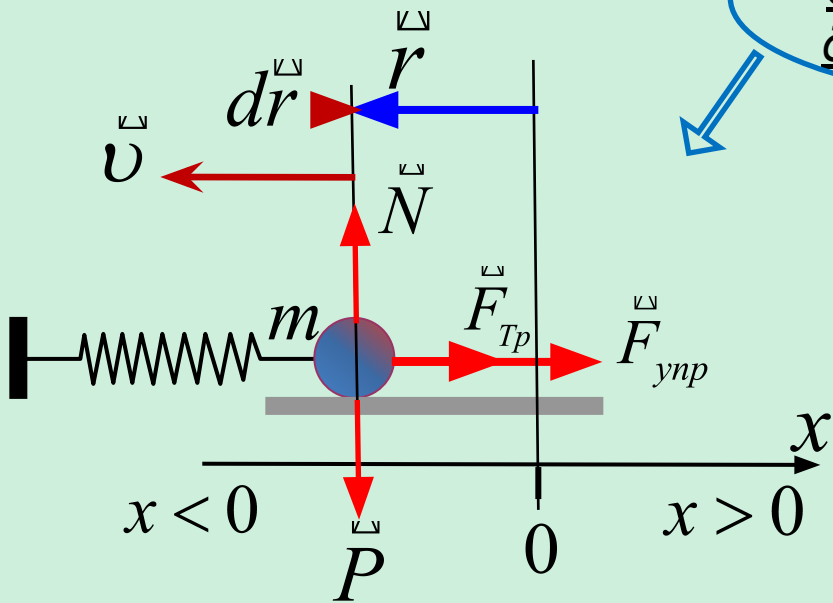


Необходимое условие существования свободных колебаний в механической системе: наличие силы, направленной **к положению равновесия**.

Упругая, квазиупругая сила...

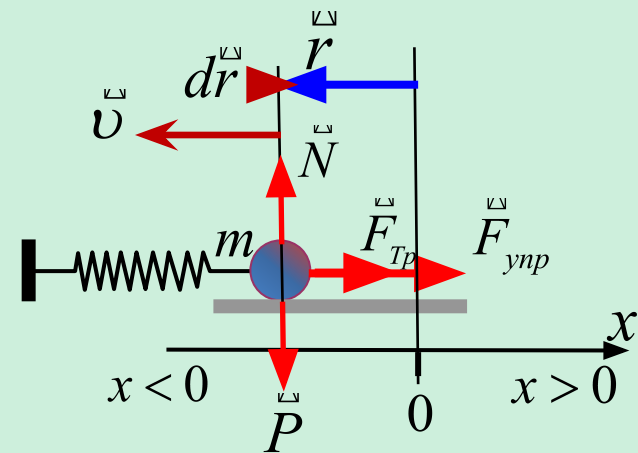
## 2. Модель свободных колебаний в механической системе.





На рис.:  
деформация сжатия;  
движение м.т. налево





$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{ynp} &= -\kappa \vec{r} \quad \rightarrow \quad (\vec{F}_{ynp})_x = -\kappa x \\
 \vec{F}_{Tp} &= -\mu \vec{v} \quad \rightarrow \quad (\vec{F}_{Tp})_x = -\mu \frac{dx}{dt} \\
 &\quad \rightarrow \quad (\vec{F}_{Tp})_x = -\mu \dot{x} \\
 \vec{P} &= -\vec{N}
 \end{aligned}$$

Зако  
н  
Гука

**2-ой 3-н Ньютона:**

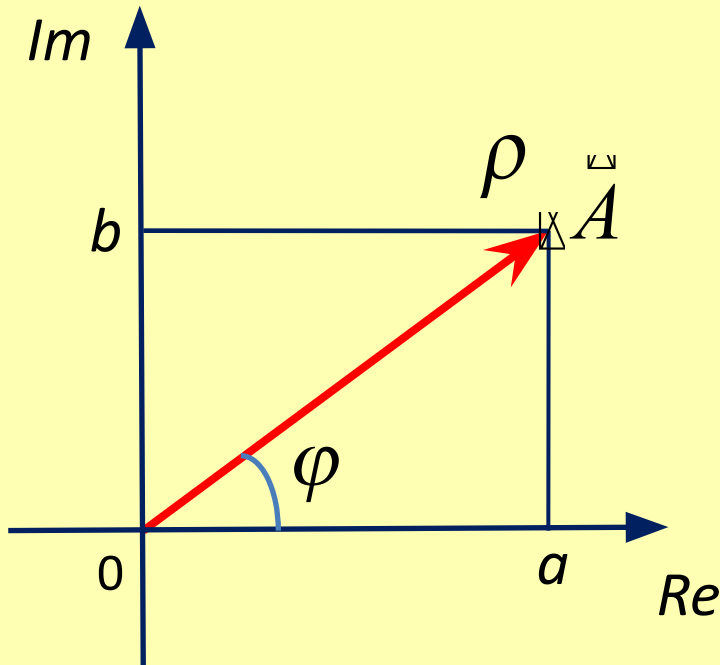
$$m \vec{a} = \vec{F}_{ynp} + \vec{F}_{Tp} + \vec{P} + \vec{N} \quad \rightarrow \quad \text{OX} \quad \ddot{x} = -\kappa x - \mu \dot{x} + 0 + 0$$

:

*Докажем, что при определенных условиях  $x(t)$  может меняться по гармоническому закону, т.е. в исследуемой механической системе могут существовать гармонические колебания.*

# Комплексные числа

$$\tilde{x} = a + ib = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}$$



$$\operatorname{Re} \tilde{x} = a = \rho \cos \varphi$$

$$\operatorname{Im} \tilde{x} = b = \rho \sin \varphi$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### 3. Решение однородного дифференциального уравнения 2-го порядка при помощи комплексных чисел

$$\dot{x} + \frac{\kappa}{m}x + \frac{\mu}{m}x = 0$$

$$\frac{\kappa}{m} = \omega_0^2$$

$$\frac{\mu}{m} = 2\alpha$$

$$\omega_0, \alpha$$

Действительные числа, характеризующие систему.

$$\dot{x} + \omega_0^2 x + 2\alpha \dot{x} = 0$$

$x(t)$  - Решение ур -  
ия

$$\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} + 2\alpha \dot{\tilde{x}} = 0$$

$\tilde{x}(t)$  - Решение ур -  
ия

$$x(t) = \operatorname{Re} \tilde{x}(t)$$

Ищем решение в виде:

$$\tilde{x} = a(t)e^{i(\omega t + \varphi)} \quad a(t)? \quad \omega? \quad \varphi?$$

$$\ddot{x} = a(t)e^{i(\omega t + \varphi)} \quad \dot{x} = \dot{a}e^{i(\omega t + \varphi)} + ai\omega e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\dot{x} = \left[ \dot{a}e^{i(\omega t + \varphi)} + ai\omega e^{i(\omega t + \varphi)} \right] +$$

$$+ \left[ ai\omega e^{i(\omega t + \varphi)} + a(i\omega)^2 e^{i(\omega t + \varphi)} \right]$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\alpha \dot{x} = 0$$

После подстановки и сокращения на  $e^{i(\omega t + \varphi)}$

$$\dot{a} + \underline{ai\omega} + \underline{ai\omega} - a\omega^2 + a\omega_0^2 + 2\alpha a + \underline{2\alpha ai\omega} = 0$$

Равенство нулю реальной и мнимой частей приводят к двум уравнениям:

$$1. \text{ Re} : a + a(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\alpha a = 0$$

$$2. \text{ Im} : \dot{a} + \alpha a = 0$$



$$2. \text{ Im : } \dot{a} + \alpha a = 0 \Rightarrow \frac{da}{dt} = -\alpha a \rightarrow \frac{da}{a} = -\alpha dt$$

$$\int \frac{da}{a} = -\alpha \int dt \rightarrow \ln a = -\alpha t + \ln a_0$$

$$a(t) = a_0 e^{-\alpha t}, \text{ где } a_0 \text{ - любое число}$$

$$1. \text{ Re : } \ddot{a} + a(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\dot{\alpha}a = 0$$

$$\dot{a} = -\alpha a_0 e^{-\alpha t}; \quad \ddot{a} = \alpha^2 a_0 e^{-\alpha t}; \quad \alpha^2 + (\omega_0^2 - \omega^2) - 2\alpha^2 = 0$$

$$x = \text{Re } a_0 e^{-\alpha t} e^{i(\omega t + \varphi)} = a_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = a_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi), \text{ где } a_0, \varphi \text{ - любые числа}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\alpha \leq \omega_0$$

## 4. Свободные колебания без затуханий

$$\mu = 0 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \omega = \omega_0; a = a_0$$

3-н сохр.полн.мех.энергии:

$$\frac{\kappa x^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{2} = \text{const.}$$

$$x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Амплитуда колебаний

$$a_0 = \max |x| > 0$$

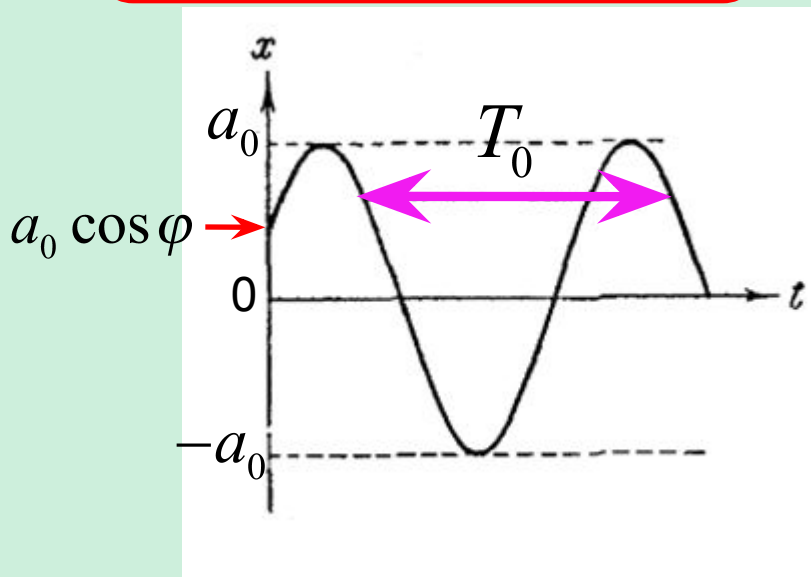
Определяется...

Фаза колебаний

$$(\omega_0 t + \underline{\underline{\varphi}})$$

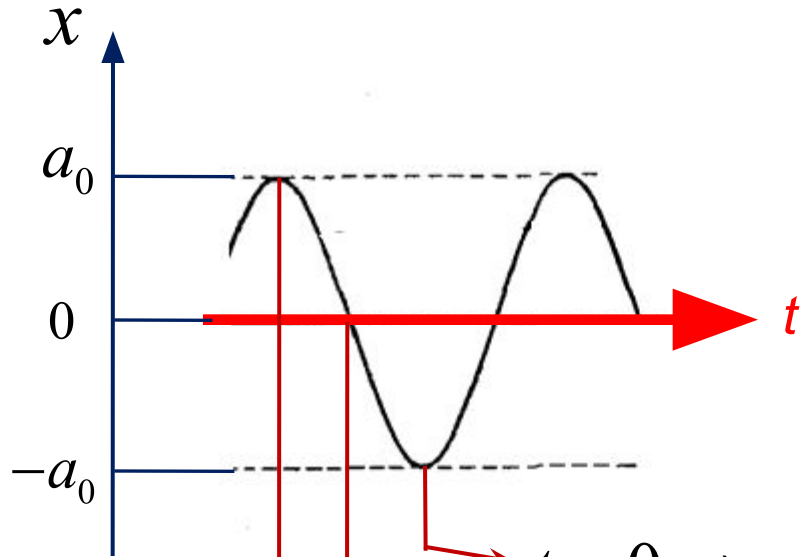
Начальная фаза колебаний

Определяется моментом начала отсчета времени.



$$x(t = 0) = a_0 \cos \varphi$$

$$x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



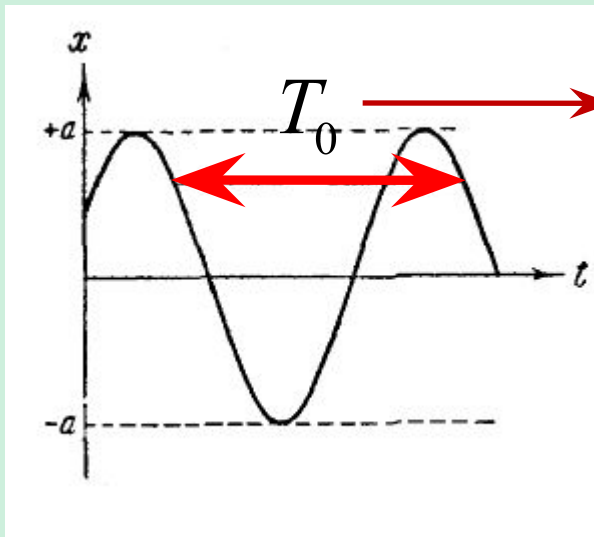
Начальная фаза колебаний.  
Определяется моментом начала  
отсчета времени.

$$x(t = 0) = a_0 \cos \varphi$$

$$t = 0 \rightarrow x = -a_0 \rightarrow \varphi = \pi$$

$$t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$t = 0 \rightarrow x = a_0 \rightarrow \varphi = 0$$



$T_0$  → Период колебаний – мин. время, через кот. повторяется мех. состояние системы.



$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos[\omega_0(t + T_0) + \varphi]$$



$$\omega_0 T_0 = 2\pi$$



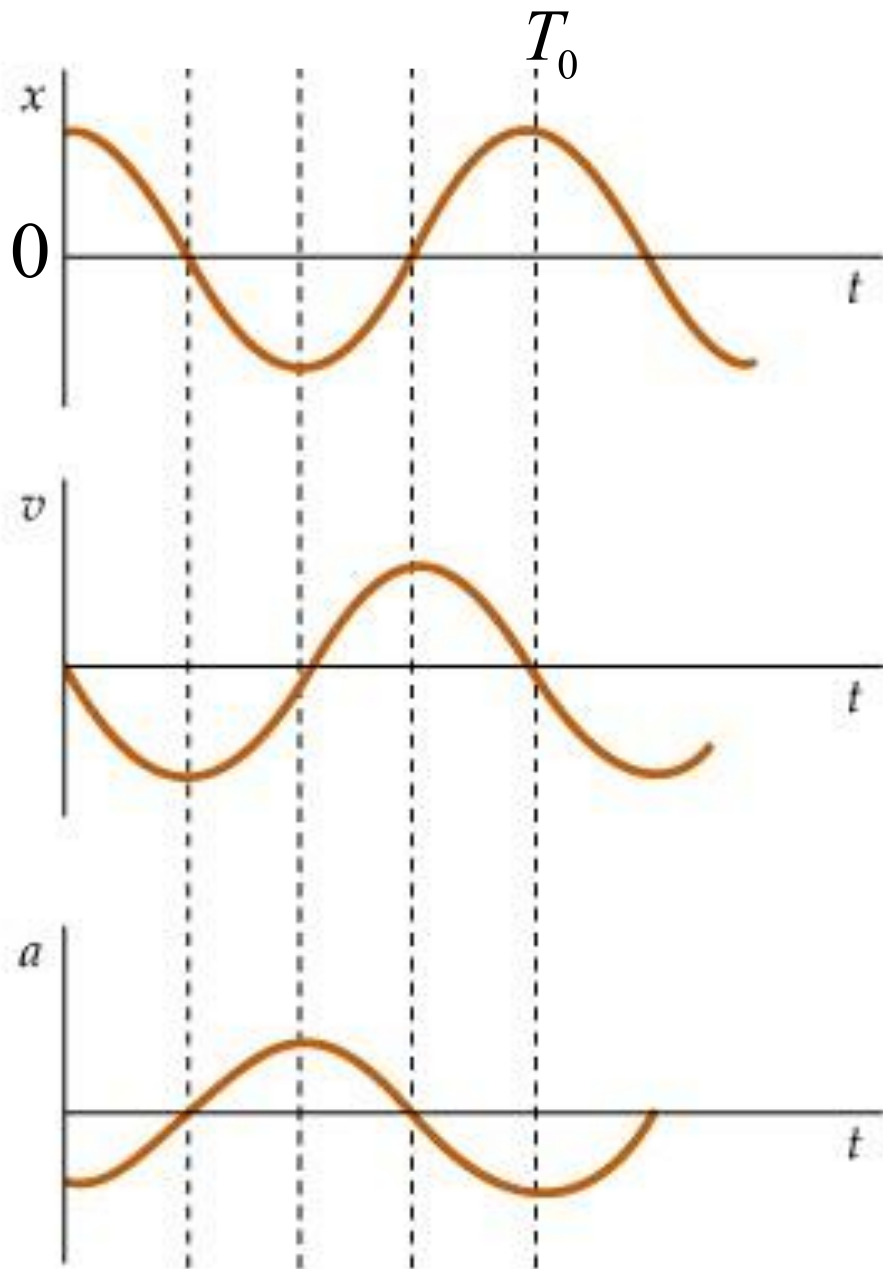
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0$$

Собственная частота и собственный период колебаний системы

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0}$$

Собственная циклическая частота колебаний системы

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = 2\pi\nu_0$$



$$x = a_0 \cos \omega_0 t$$

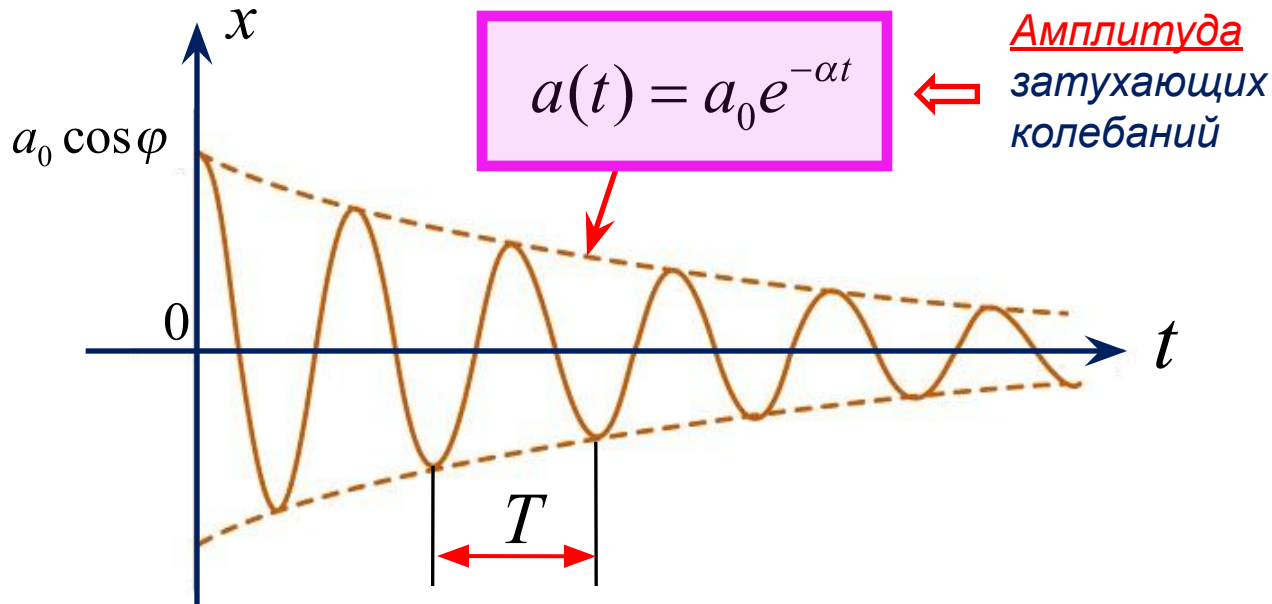
$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}$$

## 5. Свободные колебания с затуханием

$$\alpha \neq 0 \quad \alpha < \omega_0 \quad x = a_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$



$$a(t) = a_0 e^{-\alpha t}$$

Амплитуда  
затухающих  
колебаний

$$\frac{\kappa x^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{2} \neq \text{const.}$$

$\alpha$  Коэффициент  
затухания  
системы

$T$  - Период затухающих колебаний системы

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos[\omega(t + T) + \varphi] \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$\omega$  - Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega < \omega_0$$

Декремент затухания

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\alpha T}$$

Логарифмический  
декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \alpha T$$

Добротность

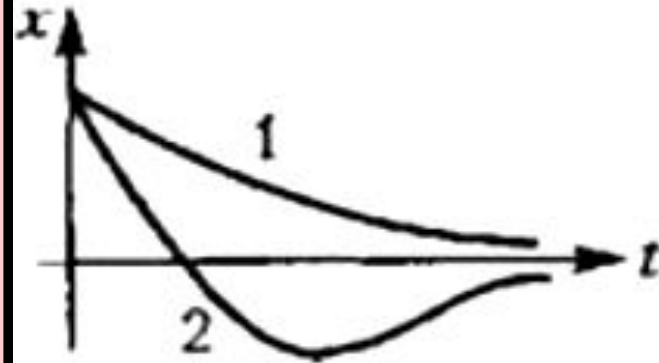
$$Q = \frac{2\pi}{\lambda}$$

## 6. Аperiodическое движение

$$\alpha \neq 0 \quad \alpha > \omega_0$$

~~$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$~~

~~$$x = a_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$~~



1-....

2-....

В частном случае, когда

$$\alpha = \omega_0$$



$$\omega = 0$$



$$x(t) = a_0 e^{-\alpha t} \cos \varphi$$

