Метод рекуррентных соотношений

Метод рекуррентных соотношений состоит в том, что решение комбинаторной задачи с **n** предметами выражается через решение аналогичной задачи с меньшим числом предметов с помощью некоторого соотношения, называемого рекуррентным.

Рекуррентное соотношение порядка k имеет вид:

$$\mathbf{x_{n+k} = F(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1})}$$

Примеры:

$x_{i+1}=x_i+5$

$x_{i+3}=x_i*5x_{i+1}-x_{i+2}$

$x_i=x_{i-1}*5x_{i-2}$

- ✔ Т.к. первые k членов последовательности можно задавать произвольно, то множество решений рекуррентного соотношения бесконечно.

- ✔ Каждое решение однозначно определяется заданием первых k членов последовательности (начальными условиями) и называется **к-го порядка**.

- ✔ **Решение** рекуррентного соотношения k - го порядка называется **общим**, если оно содержит k произвольных постоянных и путем их подбора можно получить любое решение этого соотношения.

- ✔ **Решение**, получающееся из общего путем подбора произвольных постоянных, называется **частным**.

- Линейное рекуррентное соотношение имеет вид :

$$x_{n+k} = a_1\, x_{n+k-1} + a_2\, x_{n+k-2} + \ldots + a_k\, x_n + B$$

- Если B равно нулю оно называется однородным, при B, не равном нулю, оно называется неоднородным.

- Линейное однородное рекуррентное соотношения (ЛОРС) :

$$x_{n+k} = a_1\, x_{n+k-1} + a_2\, x_{n+k-2} + \ldots + a_k\, x_n$$

Решение ЛОРС

- Общим решением является

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n$$

где λ - корни характеристического уравнения

$$\lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - a_2\lambda^{k-2} - \ldots - a_{k-1}\lambda^1 - a_k = 0$$

- и если λ имеет кратность t,то соответствующее этому корню слагаемое в общем решении можно заменить на:

$$(C_1 + C_2 n + \ldots + C_t n^{t-1})\lambda_1^n$$

- Для нахождения частного решения необходимо найти постоянные C_i, исходя из начальных условий.

Решение ЛОРС «Числа Фиббоначи»

$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$ - ЛОРС второго порядка

- Числа, являющиеся его решениями при н.у. X0= 0, X1 = 1, называются числами Фиббоначи.

- К числам Фиббоначи приводит следующая задача <u>теории информации</u>. Найти количество способов передачи сообщений (последовательность нулей и единиц), чтобы рядом не оказалось два нуля.

- <u>Обозначим</u> Un - количество сообщений которое можно передать с помощью ***n*** сигналов (0 или 1) так, чтобы при этом не оказались <u>рядом два</u> сигнала 0. Очевидно, что U0 = 1 (отсутствие сигнала считаем как сообщение),U1 =2.
- Все U_{n+2} сообщений <u>"длины"</u> n+2 можно разбить на 2 класса:

  1) те у которых первый сигнал 1 (их число равно U_{n+1}, т.к. второй сигнал может быть любым 0 или 1); 1**

  2) те у которых первый сигнал 0 (и следовательно, обязательно второй сигнал 1) их число равно Un.   01*
- Следовательно, $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$ оказывается числами Фиббоначи со сдвинутыми номерами.

- Общее решение рекуррентного соотношения Фиббоначи.

❑ Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

❑ Корни уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

❑ общее решение:

$$f_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Частное решение чисел Фиббоначи

- Используем начальные условия: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$
- Подставляя их в общее решение, получим:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

- Находим C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}; C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

- Частное решение соотношения :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n$$

Решить рекуррентное соотношение: $10a_{n-1}=-25a_n-a_{n-2}$

При начальных условиях $a_0=-1$ $a_1=2$.

Член последовательности, наиболее близкий к ее началу - a_{n-2}

Обозначим его через λ^0. Тогда характеристическое уравнение:

$10\lambda=-25\lambda^2-1$ или $25\lambda^2+10\lambda+1=0$.

Корни характеристического уравнения: $a_{1,2}=-1/5$.

Тогда <u>общее решение</u> рекуррентного соотношения имеет вид

(с учетом, что у нас кратные корни):

$$a_n = (C_1 + nC_2)\lambda^n = (C_1 + nC_2)(-1/5)^n$$

Найдем частное решение:

Из первого начального условия (при n=0 a=-1): $C_1=-1$;

Из второго начального условия (при n=1 a=2): $2=(C_1+C_2)(-1/5)$.

Подставим в это уравнение $C_1=-1$, тогда $C_2=-9$.

Окончательный ответ (<u>частное решение</u>):

$$a_n = (C_1 + nC_2)\lambda^n = (-1-9n)(-1/5)^n$$