Матрицы

Метод Гаусса

Формулы Крамера

Подготовили:
Климов Дмитрий
Радзевич Павел
Руководитель:
Петрова Л.Д.
учитель
математики

Содержание

Матрица
Определение

Прямоугольная таблица из m, n чисел, содержащая m – строк и n – столбцов, вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1i} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{i1} a_{i2} \cdots a_{ij} \cdots a_{in} \\ \vdots \\ a_{m1} a_{m2} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей размера m × n**

Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы.*

Положение элемента a_{ij} в матрице характеризуются двойным индексом:

первый *i* – номер строки;

второй *j* – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Сокращенно матрицы обозначают заглавными буквами: *A, B, C…*

Коротко можно записывать так: $A = (a_{ij})\,; \quad \left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n} \right)$

Иоганн Карл Фридрих Гаусс

(30 апреля 1777, Брауншвейг — 23 февраля 1855, Гёттинген)

Биография

Дед Гаусса был бедным крестьянином, отец — садовником, каменщиком, смотрителем каналов в герцогстве Брауншвейг. Уже в двухлетнем возрасте мальчик показал себя вундеркиндом. В три года он умел читать и писать. Согласно легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Юный Гаусс заметил, что попарные суммы с противоположных концов одинаковы: 1+100=101, 2+99=101 и т. д., и мгновенно получил результат 50x101=5050 .

После 1801 года Гаусс включил в круг своих интересов естественные науки. Катализатором послужило открытие малой планеты Церера ,вскоре после наблюдений потерянной. 24-летний Гаусс проделал (за несколько часов) сложнейшие вычисления по новому, открытому им же методу, и указал место, где искать беглянку; там она, к общему восторгу, и была вскоре обнаружена.

Умер Гаусс 23 февраля 1855 года в Гёттингене.

Метод Гаусса

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которого последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

x_1 , x_2, …, x_n – неизвестные.

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных.

b_i - свободные члены (или правые части)

Типы уравнений

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет решение, и *несовместной,* если она не имеет решения.

Совместная система называется *определенной,* если она имеет единственное решение и *неопределенной,* если она имеет бесчисленное множество решений.

Две совместные системы называются *равносильными,* если они имеют одно и то же множество решений.

Элементарные преобразования

К элементарным преобразованиям системы отнесем следующее:

1. перемена местами двух любых уравнений;
2. умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
3. прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Общий случай

Для простоты рассмотрим метод Гаусса для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными в случае, когда существует единственное решение:

Дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

1-ый шаг метода Гаусса

На первом шаге исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы (1), кроме первого. Пусть коэффициент . Назовем его ведущим элементом. Разделим первое уравнение системы (1) на a_{11}. Получим уравнение:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \qquad (2)$$

где

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}; \quad j = 1,2,3; \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы (1). Для этого вычтем из них уравнение (2), умноженное на коэффициент при x_1 (соответственно a_{21} и a_{31}).

Система примет вид:

$$\begin{matrix} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{matrix} \qquad (3)$$

Верхний индекс $^{(1)}$ указывает, что речь идет о коэффициентах первой преобразованной системы.

2-ой шаг метода Гаусса

На втором шаге исключим неизвестное x_2 из третьего уравнения системы (3). Пусть коэффициент . Выберем его за ведущий элемент и разделим на него второе уравнение системы (3), получим уравнение:

$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \qquad (4)$$

где $a_{23}^{(2)} = \dfrac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \qquad b_2^{(2)} = \dfrac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

Из третьего уравнения системы (3) вычтем уравнение (4), умноженное на $a_{33}^{(1)}$.
Получим уравнение: $a_{33}^{(2)} \bullet x_3 = b_3^{(2)}$
Предполагая, что $a_{33}^{(2)} \neq 0,$ находим $x_3 = \dfrac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = b_3^{3}$

В результате преобразований система приняла вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}{}^{(1)} x_2 + a_{13}{}^{(1)} x_3 = b_1{}^{(1)} \\ \qquad\quad x_2 + a_{23}{}^{(2)} x_3 = b_2{}^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_3 = b_3{}^{(3)} \end{cases} \qquad (5)$$

Система вида (5) называется ***треугольной*.**

Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги 1 и 2) называют ***прямым ходом метода Гаусса*.**

Нахождение неизвестных из треугольной системы называют ***обратным ходом метода Гаусса.***

Для этого найденное значение x_3 подставляют во второе уравнение системы (5) и находят x_2. Затем x_2 и x_3 подставляют в первое уравнение и находят x_1.

Если в ходе преобразований системы получается противоречивое уравнение вида *0 = b*, где *b* ≠ 0, то это означает, что система несовместна и решений не имеет.

В случае совместной системы после преобразований по методу Гаусса, составляющих прямой ход метода, система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными будет приведена или к *треугольному* или к *ступенчатому* виду.

Треугольная система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = d_n \end{cases}$$

Такая система имеет единственное решение, которое находится в результате проведения обратного хода метода Гаусса.

Ступенчатая система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

Такая система имеет бесчисленное множество решений.

Рассмотрим на примере

1. Покажем последовательность решения системы из трех уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ x_1 + 2{,}5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

2. Поделим первое уравнение на 2, затем вычтем его из второго (a_{21}=1, поэтому домножение не требуется) и из третьего, умножив предварительно на a_{31}=3

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_2 + 4x_3 = 16 \\ 4{,}5x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$$

3. Поделим второе уравнение полученной системы на 2, а затем вычтем его из третьего, умножив предварительно на 4,5 (коэффициент при x_2)

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 = 8 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 8 \\ \qquad\quad -14x_3 = -42 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x_3=-42/(-14)=3; \\ x_2=8-2x3=2 \\ x_1=8-0{,}5x2-2x3=1 \end{cases}$$

Метод Крамера

Метод Крамера—способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы (причём для таких уравнений решение существует и единственно). Создан Габриэлем Крамером в 1751 году.

Габриэль Крамер

(31 июля 1704, Женева, Швейцария—4 января 1752, Баньоль-сюр-Сез, Франция)

Биография

Крамер родился в семье франкоязычного врача. В 18 лет защитил диссертацию. В 20-летнем возрасте Крамер выставил свою кандидатуру на вакантную должность преподавателя на кафедре философии Женевского университета.

1727: Крамер 2 года путешествовал по Европе, заодно перенимая опыт у ведущих математиков — Иоганна Бернулли и Эйлера, Галлея и де Муавра, Мопертюи и Клеро.

В свободное от преподавания время Крамер пишет многочисленные статьи на самые разные темы: геометрия, история математики, философия, приложения теории вероятностей.

1751: Крамер получает серьёзную травму после дорожного инцидента с каретой. Доктор рекомендует ему отдохнуть на французском курорте, но там его состояние ухудшается, и 4 января 1752 года Крамер умирает.

Рассмотрим систему линейных уравнений с квадратной матрицей A , т.е. такую, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных:

Теорема. *Система*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\ldots \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы этой системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

В этом случае решение можно вычислить по **формуле Крамера**

$$x_k = \frac{\det\left[A_{[1]}|\ldots|A_{[k-1]}|\mathcal{B}|A_{[k+1]}|\ldots|A_{[n]}\right]}{\det A} \quad npu \quad k \in \{1,\ldots,n\}\ .$$

Для получения значения x_k в *числитель ставится определитель, получающийся из* det(A) *заменой его* k-*го столбца на столбец правых частей*

- **Пример. Решить систему уравнений** :

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +11x_3 & +5x_4 & = & 2, \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & +2x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & -3, \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & -3. \end{cases}$$

Решение.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{14} = -2, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{14} = 0$$

Найдите оставшиеся компоненты решения.

- Формулы Крамера не представляют практического значения в случае систем с *числовыми* коэффициентами: вычислять по ним решения конкретных систем линейных уравнений неэффективно, поскольку они требуют вычисления (n+1)-го определителя порядка n , в то время как метод Гаусса фактически эквивалентен вычислению одного определителя порядка n . Тем не менее, теоретическое значение формул Крамера заключается в том, что они дают **явное** представление решения системы через ее коэффициенты. Например, с их помощью легко может быть доказан результат
- Решение системы линейных уравнений с квадратной матрицей A является непрерывной функцией коэффициентов этой системы при условии, что det A не равно 0 .

Найдите оставшиеся компоненты решения.

- Кроме того, формулы Крамера начинают конкурировать по вычислительной эффективности с методом Гаусса в случае систем, зависящих от параметра.

- зависящей от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$, определить предел отношения компонент решения:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 5 \\ 4x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +6x_4 & = & 7 \\ 6x_1 & -3x_2 & +7x_3 & +\lambda x_4 & = & 6 \\ \lambda x_1 & -4x_2 & +9x_3 & +10x_4 & = & 11, \end{array}\right.$$

$$\lim_{\lambda \to 8} \frac{x_3}{x_2} .$$

Решение.

- В этом примере определитель матрицы системы равен $-(\lambda - 8)^2$. По теореме Крамера система совместна при $\lambda = 8$. Для случая $\lambda \neq 8$ применением метода Гаусса убеждаемся, что система несовместна. Тем не менее, указанный предел существует. Формулы Крамера дают значения компонент решения в виде

$$x_2 = \frac{2(2\lambda - 13)}{\lambda - 8}, \quad x_3 = \frac{3(\lambda - 6)}{\lambda - 8}$$

и, хотя при $\lambda \to 8$ каждая из них имеет бесконечный предел, их отношение стремится к пределу конечному.

Ответ.

Приведенный пример поясняет также каким образом система линейных уравнений, непрерывно зависящая от параметра, становится несовместной: при стремлении параметра к какому-то критическому значению (обращающему в нуль определитель матрицы системы) хотя бы одна из компонент решения «уходит на бесконечность».

Вывод

Рассмотренный в данной презентации Метод Крамера позволяет решать линейные системы, но удобнее решать системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса, который находит широкое применение и содержится в пакетах стандартных программ для ЭВМ.

Использованные источники

1. В.С. Щипачев, Высшая математика
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов.
3. http://ru.wikipedia.org
4. Волков Е.А. Численные методы.
5. В.Е. Шнейдер и др., Краткий курс высшей математики,том I.