§4. Системы линейных алгебраических уравнений

п.1. Основные определения.

Системой из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система вида

— матрица коэффициентов

— расширенная матрица коэффициентов

— столбец неизвестных

— столбец свободных членов

— матричная форма записи системы

— операторная форма записи системы

Решением системы называется совокупность n чисел

при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Система называется *несовместной*, если она не имеет решений.

Решить систему — значит найти все решения системы или показать, что она несовместна.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли).

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы коэффициентов,

Теорема 2.

Если ранг матрицы коэффициентов совместной системы равен количеству неизвестных,

то система имеет единственное решение.

Теорема 3.

Если ранг матрицы коэффициентов совместной системы меньше количества неизвестных,

то система имеет бесконечное количество решений.

Пример. Найти количество решений системы

Решение.

Значит,

т.е. система не имеет решений.

п.2. Решение СЛУ.

Рассмотрим систему

Пусть

Так как , то существует обратная матрица

Тогда

$$\boxed{\phantom{X = A^{-1}B}} \qquad (1)$$

Решение системы по формуле (1) называют матричным способом.

Пример.

Решение.

Правило Крамера

Используя формулу для нахождения обратной матрицы формулу (1) перепишем в виде:

или

Значит,

Рассмотрим определитель

Применив теорему Лапласа, разложим его по элементам первого столбца:

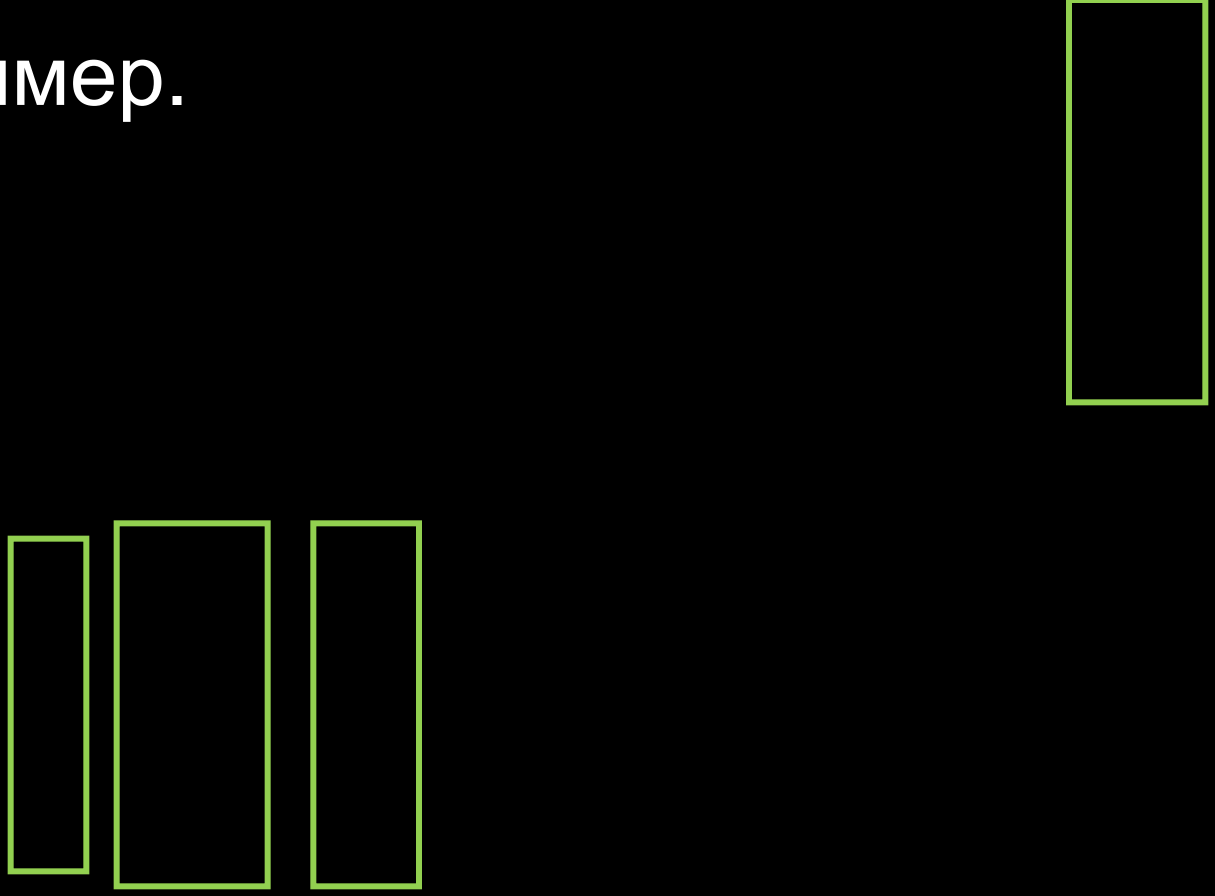
Тогда

Аналогично,

Формулы

называются формулами Крамера.

Пример.



Метод Гаусса

Рассмотрим систему

(2)

Процесс решения состоит из двух этапов:

1) прямой ход;

2) обратный ход.

1) Прямой ход.

Задача: привести систему к ступенчатому виду

1-й шаг.

Пусть в системе (2) (иначе переставим уравнения) .

Исключим неизвестную из всех уравнений (кроме 1-го).

Умножим 1-е уравнение на

и сложим со 2-м.
Умножим 1-е уравнение на

и сложим с 3-м и т.д.

Получим систему

Аналогично исключим неизвестную из всех уравнений кроме 1-го и 2-го.

Продолжая таким образом, получим ступенчатую систему.

Замечание 1.

Если в прямом методе получается уравнение вида

то его отбрасываем.

Замечание 2.

Если в прямом методе получается уравнение вида

то система несовместна.

Замечание 3.

Если в ступенчатой системе

то система имеет единственное решение (см. теорему 2).

Замечание 4.

Если в ступенчатой системе

то система имеет бесконечное множество решений (см. теорему 3).

2) Обратный ход.

Из последнего уравнения находим (или выражаем через остальные неизвестные). Подставляем в предпоследнее уравнение и находим

Таким образом найдем все остальные неизвестные.

Пример.

Прямой ход

2

1

1

$0 \;\; -7 \;\; -7$

$0 \;\; -3 \;\; -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & 26 \end{array}\right)$$

Обратный ход