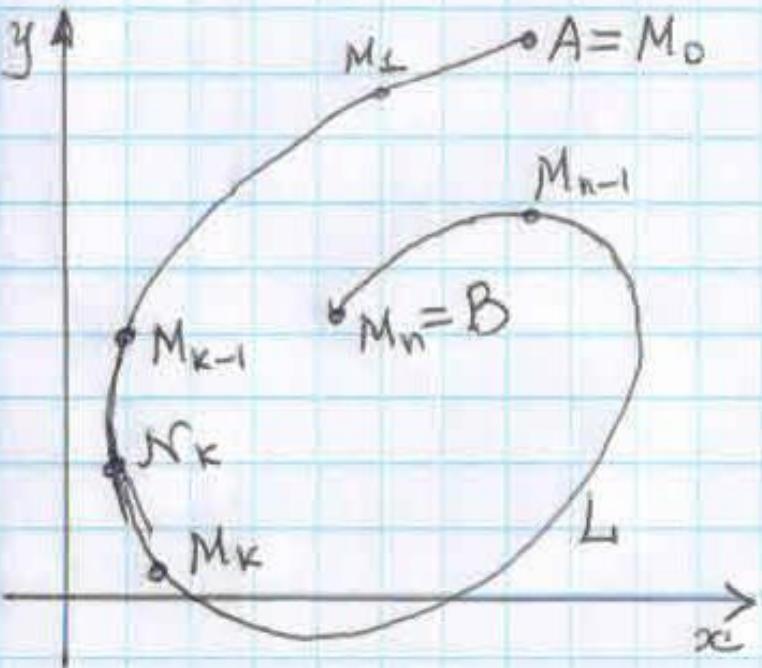


# Криволинейные интегралы



$L: \begin{aligned} x &= x(t) && \text{гладкаянос-} \\ y &= y(t) && \text{кая кривая} \end{aligned}$

$$a \leq t \leq b \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a, b]$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$T = \{a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b\}$$

$$\begin{aligned} x_k &= x(t_k) & M_k(x_k, y_k) \\ y_k &= y(t_k) & k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

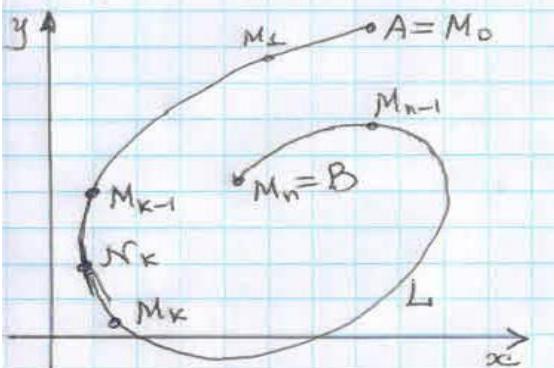
$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta l_k = \overline{|M_{k-1} M_k|} \quad (\text{длина})$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$N_k (\xi_k, \eta_k) \in \overline{M_{k-1} M_k}, \quad N = \{N_k\}_{k=1}^n$$

$$\xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k), \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

## Криволинейные интегралы



$L: \begin{aligned} x &= x(t) && \text{гладкая нос-} \\ y &= y(t) && \text{ка кривая} \end{aligned}$

$$a \leq t \leq b \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a, b]$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$T = \{a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b\}$$

$$\begin{aligned} x_k &= x(t_k) & M_k(x_k, y_k) \\ y_k &= y(t_k) & k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta l_k = \overline{|M_{k-1} M_k|} \quad (\text{длина})$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overline{M_{k-1} M_k}, N = \{N_k\}_{k=1}^n$$

$$\xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k), \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

$f(x, y)$  непр. вдоль  $L$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall K_1, K_2 \in L,$

$$g(K_1, K_2) < \delta \Rightarrow |f(K_1) - f(K_2)| < \varepsilon$$

$\Omega_T(f, N) \equiv \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k$  — квадратурная сумма.

Оп. Интегр. кривой. искл-но с 1-го рода (тока) от  $f(x, y)$ .

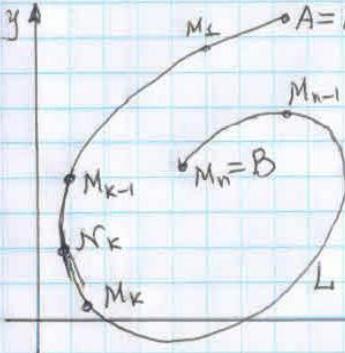
но  $L$ , если  $I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_T(f, N)$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta < \delta$

$$\forall N = \{N_k\}_{k=1}^n, |\Omega_T(f, N) - I| < \varepsilon. I \equiv \int_L f(x, y) dl = \int_A^B f(x, y) dx$$

$$\text{Задача} \quad \int_B^A f(x, y) dl = \int_A^B f(x, y) dx; \quad \int_L 1 \cdot dl = \mu(L) \quad (\text{длина})$$

если  $f(x, y)$  — непр. на  $L$ , то  $\int_A^B f(x, y) dl$  — масса кривой

## Криволинейные интегралы



$L: \begin{aligned} x &= x(t) && \text{гладкая каскада} \\ y &= y(t) && \text{как кривая} \end{aligned}$   
 $a \leq t \leq b \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a, b]$   
 $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$

$$\mathcal{T} = \{a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b\}$$

$$\begin{aligned} x_k &= x(t_k) & M_k(x_k, y_k) \\ y_k &= y(t_k) & k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta l_k = \overline{|M_{k-1}M_k|} \quad (\text{длина})$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overline{M_{k-1}M_k}, N = \{N_k\}_{k=1}^n$$

$$\xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k), \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

$f(x, y)$  непр. вдоль  $L$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall K_1, K_2 \in L,$

$$g(K_1, K_2) < \delta \Rightarrow |f(K_1) - f(K_2)| < \varepsilon$$

$$\Omega_\Gamma(f, N) \equiv \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k - \text{некоторая сумма.}$$

Оп. Интегр. кривой по 1-му разу (така)  $\int f(x, y) dx$ .

но  $L$ , если  $I = \lim_{\Delta \pi \rightarrow 0} \Omega_\Gamma(f, N)$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \Gamma, \delta < \delta$

$$\forall N = \{N_k\}_{k=1}^n \quad |\Omega_\Gamma(f, N) - I| < \varepsilon. \quad I \equiv \int_L f(x, y) dx = \int_A^B f(x, y) dx$$

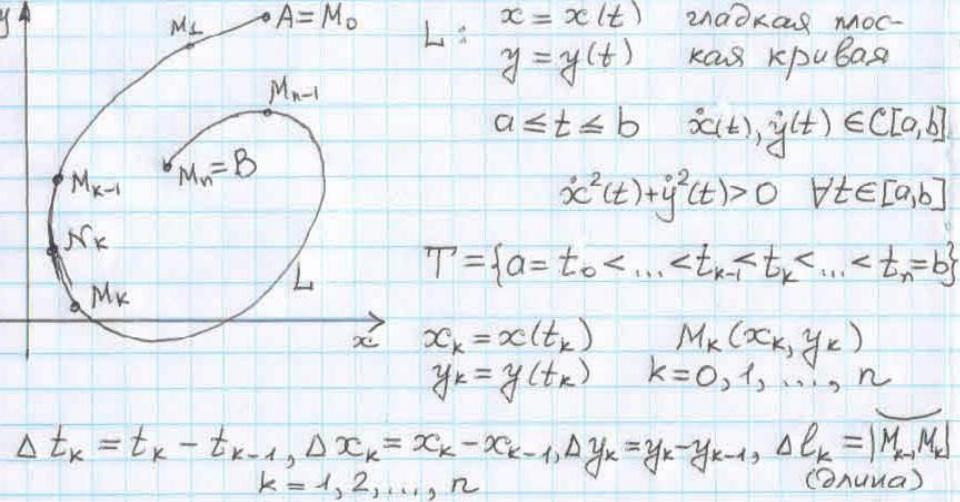
$$\text{Знач. это } \int_A^B f(x, y) dx = \int_L f(x, y) dx; \quad \int_L 1 \cdot dl = \mu(L) \quad (\text{длина})$$

Если  $f(x, y)$ -непр. на  $L$ , то  $\int_A^B f(x, y) dx$ -масса кривой

T1. L-нр. кривая,  $f(x, y)$  непр. Вдоль L. Тогда

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

## Криволинейные интегралы



T1. L-нр. кривая,  $f(x, y)$  непр. Вдоль L. Тогда

$$\exists \int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = I$$

D-Вс. Правильный инт-л суммой, однозначн.

$$\Delta l_k = t_k - t_{k-1}, \quad \sum_{k=1}^n \Delta l_k = b - a, \quad \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$T = \{a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b\} \quad f(x(t), y(t)) \in C[a, b] \Rightarrow \text{правл. непр., т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0:$$

$$x_k = x(t_k), \quad M_k(x_k, y_k) \\ y_k = y(t_k), \quad k=0, 1, \dots, n \\ \Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \quad \Delta l_k = |M_{k-1}M_k| \\ (\text{граница})$$

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in [a, b], \quad |\bar{x} - \bar{y}| < \delta_1 \Rightarrow |f(x(\bar{x}), y(\bar{y})) - f(x(\bar{x}), y(\bar{y}))| < \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$$

$$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \quad \exists \delta = m \delta_1 > 0 \quad \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow \\ \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k], \quad |\tau_k - t| \leq t_k - t_{k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \frac{1}{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} m dt \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \leq \frac{\Delta l_k}{m} \leq \frac{\delta_T}{m} < \frac{\delta}{m} = \delta_1 \Rightarrow |\Omega_T(f, N) - I| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(x(\tau_k), y(\tau_k)) - f(x(t), y(t))| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \int_0^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{\varepsilon \cdot \mu(L)}{\mu(L)+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Т. доказано.

$$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overline{M_{k-1}M_k}, \quad N = \{N_k\}_{k=1}^n$$

$$\xi_k = x(\tau_k), \quad \eta_k = y(\tau_k), \quad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

$$f(x, y) \text{ непр. Вдоль } L, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall K_1, K_2 \in L,$$

$$g(K_1, K_2) < \delta \Rightarrow |f(K_1) - f(K_2)| < \varepsilon$$

$$\Omega_T(f, N) \equiv \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k - \text{нормированная сумма.}$$

Оп. Интегр. кривой. инт-л осл. 1-го рода (граница) от  $f(x, y)$

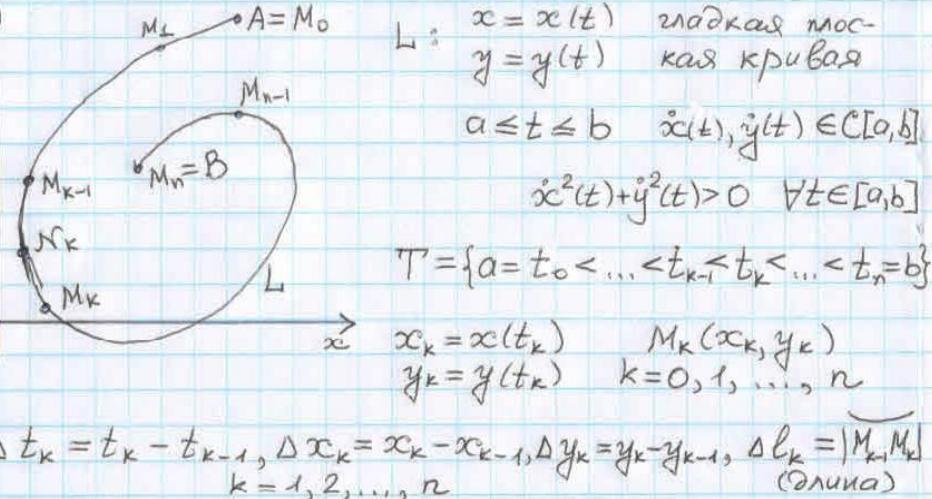
$$\text{на } L, \text{ если } I = \lim_{N \rightarrow \infty} \Omega_T(f, N), \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta$$

$$\forall N = \{N_k\}_{k=1}^n, \quad |\Omega_T(f, N) - I| < \varepsilon. \quad I \equiv \int_L f(x, y) dl = \int_A^B f(x, y) dl$$

$$\text{где, раз} \quad \int_L f(x, y) dl = \int_A^B f(x, y) dl; \quad \int_L dl = \mu(L) \quad (\text{граница})$$

Если  $f(x, y)$ -непр. на  $L$ , то  $\int_L f(x, y) dl$ -нечто кривое

## Криволинейные интегралы



$L:$   
 $x = x(t)$  гладкая линия  
 $y = y(t)$  как кривая  
 $a \leq t \leq b$   $\dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a, b]$   
 $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$

$$T = \{a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b\} \quad f(x(t), y(t)) \in C[a, b] \Rightarrow \text{равн. непр., т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0:$$

$x_k = x(t_k) \quad M_k(x_k, y_k)$   
 $y_k = y(t_k) \quad k=0, 1, \dots, n$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta l_k = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

(граница)

$$N_k(\xi_k, \eta_k) \in M_{k-1}M_k, \quad N = \{N_k\}_{k=1}^n$$

$$\xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k), \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

$f(x, y)$  непр. вдоль  $L$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall K_1, K_2 \in L, |f(K_1) - f(K_2)| < \delta \Rightarrow |f(x(t_1)) - f(x(t_2))| < \varepsilon$

$$\Omega_T(f, N) \equiv \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k - \text{многранная сумма.}$$

Оп. Интегр. кривол. инт-лом 1-го рода (тока) от  $f(x, y)$ .

но  $L$ , если  $I = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \Omega_T(f, N)$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta < \delta$

$$\forall N = \{N_k\}_{k=1}^n, |\Omega_T(f, N) - I| < \varepsilon. I \equiv \int_L f(x, y) dl = \int_A^B f(x, y) dl$$

Знач. это  $\int_A^B f(x, y) dl = \int_A^B f(x, y) dl; \int_L dl = \mu(L)$

Если  $f(x, y)$  - непр. на  $L$ , то  $\int_A^B f(x, y) dl$  - масса кривой

T1.  $L$ -н. кривая,  $f(x, y)$  непр. вдоль  $L$ . Тогда

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \equiv I$$

D-во. Правый инт-л существует, доказательство.

$$\Delta l_k = t_k - t_{k-1}, \quad N_k(\xi_k, \eta_k) \in M_{k-1}M_k, \quad \xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k)$$

$$=\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt, \quad N = \{N_k\}, \quad N_k(\xi_k, \eta_k) \in M_{k-1}M_k, \quad \xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k)$$

$$\Omega_T(f, N) = \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in [a, b], |\bar{x} - \bar{y}| < \delta \Rightarrow |f(x(\bar{x}), y(\bar{x})) - f(x(\bar{y}), y(\bar{y}))| < \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$$

$$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \quad \exists \delta = m \delta_1 > 0 \quad \forall T, \delta < \delta \Rightarrow$$

$$\tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k], |\tau_k - t| \leq \delta \Rightarrow \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \frac{1}{m} \int_m^{t_k} m dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \leq \frac{\Delta l_k}{m} \leq \frac{\delta}{m} < \frac{\delta}{m} = \delta_1 \Rightarrow |\Omega_T(f, N) - I| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(x(\tau_k), y(\tau_k)) - f(x(t), y(t))| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \int_0^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{\varepsilon \mu(L)}{\mu(L)+1} < \varepsilon$$

Т. доказано.

Инт-л по кус.-н. кривой определяется как сумма многран. по гладким компонентам.

Все сб-ва опред. инт-лом при  $a \leq b$

переносится и на криволин. инт-лы 1-го рода.

$P(x,y)$ ,  $Q(x,y)$  непрер. вдоль  $L$ .

$$\Omega_P^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(N_k) \Delta x_k, \quad \Omega_P^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(N_k) \Delta y_k$$

Очевидно,  $I_1$  ( $I_2$ ) назыв. краевая или  $n-1$ -ая  $L$ -го подо (подо)

если  $P(x,y)$  ( $Q(x,y)$ ) н.о. в  $L$ , если  $I_1 = \lim_{\delta_P \rightarrow 0} \Omega_P^{(1)}(P, N)$  ( $I_2 = \lim_{\delta_P \rightarrow 0} \Omega_P^{(2)}(Q, N)$ ).

$$I_1 \equiv \int_L P(x,y) dx = \int_{AB} P(x,y) dx; \quad I_2 \equiv \int_L Q(x,y) dy = \int_{AB} Q(x,y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_{AB} P dx + Q dy$$

При этом: подо  $\{P, Q\}$  вдоль  $L$ .

Из определения:  $\int_{BA} = - \int_{AB}$  (или  $n-1$   $L$ -го подо)

$P(x,y), Q(x,y)$  непр. вдоль  $L$

$$\sigma_P^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(N_k) \Delta x_k, \sigma_P^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(N_k) \Delta y_k$$

Оп.  $I_1, I_2$  назв. кубон. ит-1 для 2-го подо (тако)

от  $P(x,y)$  ( $Q(x,y)$ ) по  $L$ , если  $I_1 = \lim_{\delta_P \rightarrow 0} \sigma_P^{(1)}(P, N)$  ( $I_2 = \lim_{\delta_Q \rightarrow 0} \sigma_Q^{(2)}(Q, N)$ ).

$$I_1 \equiv \int_L P(x,y) dx = \int_{AB} P(x,y) dx; I_2 \equiv \int_L Q(x,y) dy = \int_{AB} Q(x,y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_{AB} P dx + Q dy$$

Пусть сущес. подо  $\{P; Q\}$  вдоль  $L$ .

By определению:  $\int_{BA} = - \int_{AB}$  (ит-1 2-го подо)

T2  $L$ -ы. кубон.;  $P(x,y), Q(x,y)$  непр. вдоль  $L$ . Тогда

$$\exists \int_L P(x,y) dx = \int_0^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt$$

$$\exists \int_L Q(x,y) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt$$

$P(x, y), Q(x, y)$  непр. вдоль  $L$

$$\Omega_P^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(N_k) \Delta x_k, \Omega_P^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(N_k) \Delta y_k$$

Оп.  $I_1, I_2$  наст. кривой или-тои 2-го рода (тако)

$$\text{от } P(x, y) (Q(x, y)) \text{ по } L, \text{ если } I_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_P^{(1)}(P, N) (I_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_P^{(2)}(Q, N)).$$

$$I_1 = \int_L P(x, y) dx = \int_{AB} P(x, y) dx; I_2 = \int_L Q(x, y) dy = \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P dx + Q dy$$

Рез. имен. падоа на  $\{P, Q\}$  вдоль  $L$ .

$$\text{By определению: } \int_{BA} = - \int_{AB} \quad (\text{или-тои 2-го рода})$$

T2  $L$ -го кривая;  $P(x, y), Q(x, y)$  непр. вдоль  $L$ . Тогда

$$\exists \int_L P(x, y) dx = \int_0^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \equiv I_1 \leftarrow$$

$$\exists \int_L Q(x, y) dy = \int_0^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \equiv I_2 \leftarrow$$

Д-бо. Правое иллю-тии существую, едозначн.

Д-нои 1-го р-тия (2-я р-на - симметр.)

$P(x(t), y(t)) \in C[a, b] \Rightarrow$  пади. непр. на  $[a, b]$ , т.е.  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\forall \bar{t}, \bar{t} \in [a, b], |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta \Rightarrow |P(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - P(x(\bar{\bar{t}}), y(\bar{\bar{t}}))| < \frac{\epsilon}{M(L)+1}$$

$$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta_m > 0 \quad \forall T: \delta_T < \delta \Rightarrow (\text{так же, как и в}$$

$$\text{прошлой} \Rightarrow \tau_k, t \in [\tau_{k-1}, \tau_k] \Rightarrow |\tau_k - t| < \delta_1 \Rightarrow |\Omega_P^{(1)}(P, N) - I_1| \leq$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta x_k - \int_0^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{\tau_k} \dot{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{\tau_k} P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{\tau_k} |P(x(\tau_k), y(\tau_k)) - P(x(t), y(t))| |\dot{x}(t)| dt \right| \leq \frac{\epsilon}{M(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{\tau_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt =$$

$$\leq \frac{\epsilon}{M(L)+1} \left| \int_0^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| = \frac{\epsilon M(L)}{M(L)+1} \leq \epsilon. \quad \text{т. доказано.}$$

$P(x,y), Q(x,y)$  непр. вдоль  $L$

$$\Omega_P^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(N_k) \Delta x_k, \Omega_P^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(N_k) \Delta y_k$$

Оп.  $I_1, I_2$  наиск. кривол. инт-лы 2-го рода (руна)

$$\text{от } P(x,y) (Q(x,y)) \text{ по } L, \text{ если } I_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_P^{(1)}(P, N) \quad (I_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_P^{(2)}(Q, N)).$$

$$I_1 \equiv \int_L P(x,y) dx = \int_{AB} P(x,y) dx; \quad I_2 \equiv \int_L Q(x,y) dy = \int_{AB} Q(x,y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_{AB} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_{AB} P dx + Q dy$$

Рез. итог: разбога пары  $\{P, Q\}$  вдоль  $L$ .

$$\text{Из определения: } \int_{BA} = - \int_{AB} \quad (\text{инт-л 2-го рода})$$

T2  $L$ -вн. кривая;  $P(x,y), Q(x,y)$  непр. вдоль  $L$ . Тогда

$$\exists \int_L P(x,y) dx = \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \equiv I_1 \leftarrow$$

$$\exists \int_L Q(x,y) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \equiv I_2 \leftarrow$$

Д-во. Правое инт-лы существуют, однозначно

Д-во 1-го р-ни (2-й р-н - самоцт.)

$$P(x(t), y(t)) \in C[a, b] \Rightarrow \text{рабн. непр. на } [a, b], \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

$$\forall \bar{z}, \bar{t} \in [a, b], |\bar{z} - \bar{t}| < \delta \Rightarrow |P(x(\bar{z}), y(\bar{z})) - P(x(\bar{t}), y(\bar{t}))| < \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$$

$$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta_m > 0 \quad \forall T: \delta_m < \delta \Rightarrow (\text{так же, как}$$

$$\text{ранее}) \Rightarrow \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \Rightarrow |\tau_k - t| < \delta_m \Rightarrow |\Omega_P^{(1)}(P, N) - I_1| \leq$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta x_k - \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} |P(x(\tau_k), y(\tau_k)) - P(x(t), y(t))| |\dot{x}(t)| dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$= \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \left| \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| = \frac{\varepsilon \mu(L)}{\mu(L)+1} \leq \varepsilon. \quad \text{Т. доказано.}$$

Инт-л по крв.-нн. кривой определяется как сумма инт-лов по гладким криволинейным. Все сгл-ва определ. инт-ла ( $a \geq b$ ) переносится и на кривол. инт-лы 2-го рода.

$P(x, y), Q(x, y)$  непр. вдоль  $L$ .

$$\sigma_P^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(N_k) \Delta x_k, \sigma_P^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(N_k) \Delta y_k$$

Оп.  $I_1, I_2$  наиск. кривол. искл-1 на 2-м рода (тако)

если  $P(x, y) (Q(x, y))$  н. в. L, если  $I_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_P^{(1)}(P, N) (I_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_P^{(2)}(Q, N))$ .

$$I_1 \equiv \int_P(x, y) dx = \int_{AB} P(x, y) dx; I_2 \equiv \int_Q(x, y) dy = \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P dx + Q dy$$

Пусть сущн. пара  $\{P, Q\}$  вдоль L.

$$\text{Уг определение: } \int_{BA} = - \int_{AB} \quad (\text{искл-1 2-м рода})$$

Т2 L-м. кривая,  $P(x, y), Q(x, y)$  непр. вдоль L. Тогда

$$\exists \int_L P(x, y) dx = \int_0^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \equiv I_1 \leftarrow$$

$$\exists \int_L Q(x, y) dy = \int_0^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \equiv I_2 \leftarrow$$

Д-ко. Прямое искл-1 сущесвует, доказательство

Д-ко 1-го р-я (2-й р-я - самод.)

$P(x(t), y(t)) \in C[a, b] \Rightarrow$  п. непр. на  $[a, b]$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$\forall \bar{z}, \bar{t} \in [a, b], |\bar{z} - \bar{t}| < \delta \Rightarrow |P(x(\bar{z}), y(\bar{z})) - P(x(\bar{t}), y(\bar{z}))| < \frac{\varepsilon}{M(L)+1}$

$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta = m \delta_s > 0 \quad \forall T: \delta_s < \delta \Rightarrow$  (так же, как

покажем)  $\Rightarrow \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \Rightarrow |\tau_k - t| < \delta_s \Rightarrow |\sigma_P^{(1)}(P, N) - I_1| =$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta x_k - \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} |P(x(\tau_k), y(\tau_k)) - P(x(t), y(t))| |\dot{x}(t)| dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \left| \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| = \frac{\varepsilon M(L)}{M(L)+1} \leq \varepsilon. \quad \text{т. доказано}$$

Искл-1 по кус.-м. кривой определяется как сумма

искл-лов по гладким компонентам. Все сл. в. определ. искл-лов

( $a \geq b$ ) переносится и на кривол. искл-лы 2-м рода.

Можно ввести крив. искл-лы по  $L \subset \mathbb{E}_3$ :

$\int_L f(x, y, z) dl$  - кривол. искл-1 1-м рода (тако)

$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$  - крив. искл-1 2-м рода

$P(x,y), Q(x,y)$  непр. вдоль  $L$

$$\Omega_P^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(N_k) \Delta x_k, \Omega_P^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(N_k) \Delta y_k$$

Оп.  $I_1, I_2$  наст. криволинейные 2-го рода (такие)

о т  $P(x,y), Q(x,y)$  н. вдоль  $L$ , если  $I_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_P^{(1)}(P, N)$  ( $I_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_P^{(2)}(Q, N)$ )

$$I_1 \equiv \int_L P(x,y) dx = \int_{AB} P(x,y) dx; I_2 \equiv \int_L Q(x,y) dy = \int_{AB} Q(x,y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_{AB} P dx + Q dy$$

Рез. существует путь  $\{P, Q\}$  вдоль  $L$ .

$$\text{By определению: } \int_{BA} = - \int_{AB} \quad (\text{нест-н 2-го рода})$$

Т2 Л-2н. кривая;  $P(x,y), Q(x,y)$  непр. вдоль  $L$ . Тогда

$$\exists \int_L P(x,y) dx = \int_0^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \equiv I_1 \leftarrow$$

$$\exists \int_L Q(x,y) dy = \int_0^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \equiv I_2 \leftarrow$$

Д-бо. Прямоугольники сущесвуют, однозначно

Д-ное 1-ое прип (2-е прип - симметр.)

$P(x(t), y(t)) \in C[0, b] \Rightarrow$  путь непр. на  $[0, b]$ , т. е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$\forall \bar{t}, \bar{t} \in [0, b], |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta \Rightarrow |P(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - P(x(\bar{\bar{t}}), y(\bar{\bar{t}}))| < \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$

$m = \min_{t \in [0, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta = m \delta_1 > 0 \quad \forall T: \delta_T < \delta \Rightarrow$  (так же, как

правило)  $\Rightarrow \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \Rightarrow |t_k - t| < \delta_1 \Rightarrow |\Omega_P^{(1)}(P, N) - I_1| =$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta x_k - \int_0^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} |P(x(\tau_k), y(\tau_k)) - P(x(t), y(t))| |\dot{x}(t)| dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \left| \int_0^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| = \frac{\varepsilon \mu(L)}{\mu(L)+1} \leq \varepsilon. \quad \text{т. доказано.}$$

Что-л по крив.-н. кривой определяется как сумма

нест-н. по гладким касательным. Все с. в. определены.

( $a \geq b$ ) переносится и на кривые. нест-ны 2-го рода.

Можно ввести крив. нест-ны по  $L \subset \mathbb{E}_3$ :

$$\int_L f(x, y, z) dl - \text{криволинейный 1-го рода (такой)}$$

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz - \text{криволинейный 2-го рода}$$

$L$ -замкнута  $\Rightarrow \oint_L, \oint_L, \oint_L$   
может узарот непр.

$P(x,y), Q(x,y)$  непр. вдоль  $L$

$$O_T^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(N_k) \Delta x_k, O_T^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(N_k) \Delta y_k$$

Оп.  $I_1, I_2$  наст. криволинейные 2-го рода (тако)

$$\text{от } P(x,y)(Q(x,y)) \text{ по } L, \text{ если } I_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} O_T^{(1)}(P, N) \quad I_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} O_T^{(2)}(Q, N).$$

$$I_1 \equiv \int_L P(x,y) dx = \int_L P(x,y) dx; \quad I_2 \equiv \int_L Q(x,y) dy = \int_L Q(x,y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_L P dx + Q dy$$

Рез. симм. работы над  $\{P, Q\}$  вдоль  $L$ .

$$\text{Из определения: } \int_L = - \int_{BA} \quad (\text{ибо-1 2-го рода})$$

Т.2  $L$ -н. кривая;  $P(x,y), Q(x,y)$  непр. вдоль  $L$ . Тогда

$$\exists \int_L P(x,y) dx = \int_0^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \equiv I_1 \leftarrow$$

$$\exists \int_L Q(x,y) dy = \int_0^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \equiv I_2 \leftarrow$$

Д-во. Правое ико-1ни сущесвует, однозначно

Д-во 1-го р-я (2-я р-я - симметр.)

$$P(x(t), y(t)) \in C[a, b] \Rightarrow \text{рабн. непр. на } [a, b], \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall \bar{t}, \bar{t} \in [a, b], |\bar{t} - \bar{t}| < \delta \Rightarrow |P(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - P(x(\bar{t}), y(\bar{t}))| < \frac{\varepsilon}{M(L)+1}$$

$$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta = m \delta_1 > 0 \quad \forall T: \delta_1 < \delta \Rightarrow (\text{так же, как})$$

$$\text{правое} \Rightarrow \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \Rightarrow |\tau_k - t| < \delta_1 \Rightarrow |O_T^{(1)}(P, N) - I_1|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta x_k - \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} |P(x(\tau_k), y(\tau_k)) - P(x(t), y(t))| |\dot{x}(t)| dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$= \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \left| \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| = \frac{\varepsilon M(L)}{M(L)+1} \leq \varepsilon. \quad \text{т. доказано.}$$

Или-1 по кус.-н. кривой определяется как сумма

ибо-1ов по гладким компонентам. Все сб. вд определ. ико-1ов

( $a \geq b$ ) переносится и по криволинейные 2-го рода.

Можно ввести криволинейные 1-го рода:

$$\int_L f(x, y, z) dl - \text{криволинейные 1-го рода (тако)}$$

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz - \text{криволинейные 2-го рода}$$

л-запись  $\Rightarrow \int_L, \int_L, \int_L$   
можно удалять напр.

Связь между криволинейными 1-го и 2-го рода.

$$\begin{aligned} L: & \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} & \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & t \in [a, b] & = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t)] dt = \end{aligned}$$

$$= \int_a^b \left[ P(x(t), y(t), z(t)) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + Q(x(t), y(t), z(t)) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + R(x(t), y(t), z(t)) \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right] dt = \left( \vec{r}(t) = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases} \right)$$

$$= \int_L (P \cos(\vec{r}, \vec{i}) + Q \cos(\vec{r}, \vec{j}) + R \cos(\vec{r}, \vec{k})) dl = \int_L f(x, y, z) dl - \text{криволинейные 1-го рода}$$

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) \cos(\vec{r}, \vec{i}) + Q(x, y, z) \cos(\vec{r}, \vec{j}) + R(x, y, z) \cos(\vec{r}, \vec{k})$$

зависит от  $x, y, z$