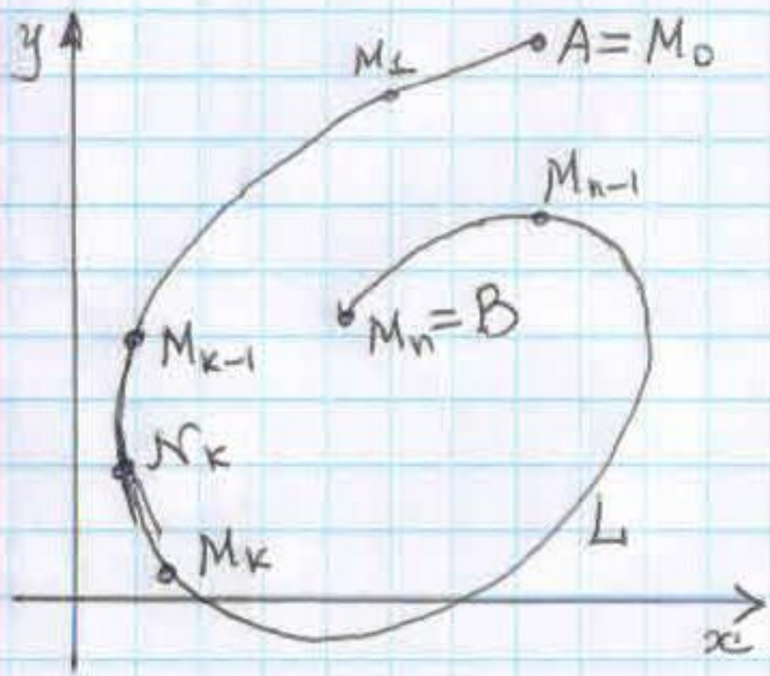
Криволинейные интегралы



$L:$ $x = x(t)$, $y = y(t)$ гладкая плоская кривая

$a \le t \le b$ $\quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a,b]$

$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a,b]$

$T = \{a = t_0 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = b\}$

$x_k = x(t_k)$ $\quad M_k(x_k, y_k)$

$y_k = y(t_k)$ $\quad k = 0, 1, \ldots, n$

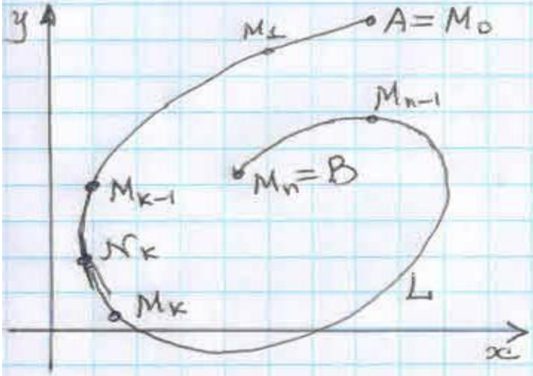
$\Delta t_k = t_k - t_{k-1},\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ \Delta l_k = |\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}|$ (длина)

$k = 1, 2, \ldots, n$

$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{M_{k-1}M_k},\quad N = \{N_k\}_{k=1}^{n}$

$\xi_k = x(\tau_k),\ \eta_k = y(\tau_k),\ \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$

Криволинейные интегралы



$L:$ $x = x(t)$, $y = y(t)$ гладкая плоская кривая

$a \le t \le b$ $\quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a,b]$

$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)>0 \quad \forall t\in[a,b]$

$T=\{a=t_0<\ldots<t_{k-1}<t_k<\ldots<t_n=b\}$

$x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k)$ $\quad M_k(x_k, y_k)$, $k=0,1,\ldots,n$

$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $\Delta l_k = |\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}|$ (длина)
$k=1,2,\ldots,n$

$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$, $N = \{N_k\}_{k=1}^n$

$\xi_k = x(\tau_k)$, $\eta_k = y(\tau_k)$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$

$f(x,y)$ непр. вдоль L, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall K_1, K_2\in L$,

$\rho(K_1,K_2)<\delta \Rightarrow |f(K_1)-f(K_2)|<\varepsilon$

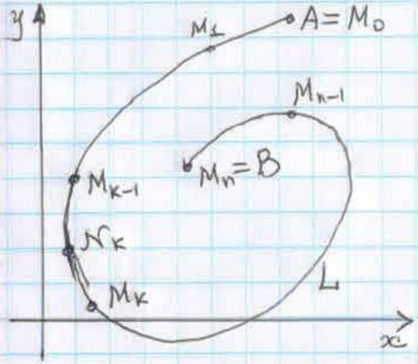
$\sigma_T(f,N) \equiv \sum\limits_{k=1}^n f(N_k)\Delta l_k$ – интегральная сумма.

Опр. I назыв. кривол. инт-лом 1-го рода (типа) от $f(x,y)$ по L, если $I=\lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T(f,N)$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall T,\ \delta_T<\delta$ $\forall N=\{N_k\}_{k=1}^n$, $|\sigma_T(f,N)-I|<\varepsilon$. $I\equiv\int\limits_L f(x,y)\,dl=\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$

Ясно, что $\int\limits_{BA} f(x,y)\,dl = \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$; $\int\limits_L 1\cdot dl = \mu(L)$ (длина)

Если $f(x,y)$ – линейная плотность, то $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$ – масса кривой

Криволинейные интегралы



$L:$ $x = x(t)$, $y = y(t)$ гладкая плоская кривая

$a \le t \le b$ $\quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a,b]$

$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)>0 \quad \forall t\in[a,b]$

$T=\{a=t_0<\ldots<t_{k-1}<t_k<\ldots<t_n=b\}$

$x_k = x(t_k) \qquad M_k(x_k, y_k)$

$y_k = y(t_k) \qquad k=0,1,\ldots,n$

$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $\Delta l_k = |\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}|$ (длина)

$k=1,2,\ldots,n$

$N_k(\xi_k, \eta_k)\in \overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$, $\mathcal{N} = \{N_k\}_{k=1}^{n}$

$\xi_k = x(\tau_k)$, $\eta_k = y(\tau_k)$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$

$f(x,y)$ непр. вдоль L, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ \forall K_1, K_2 \in L$,

$\rho(K_1,K_2)<\delta \Rightarrow |f(K_1)-f(K_2)|<\varepsilon$

$\sigma_T(f,\mathcal{N}) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k$ – интегральная сумма.

Опр. I назыв. кривол. инт-лом 1-го рода (типа) от $f(x,y)$ по L, если $I=\lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T(f,\mathcal{N})$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall T,\ \delta_T<\delta$ $\forall \mathcal{N}=\{N_k\}_{k=1}^{n}$ $|\sigma_T(f,\mathcal{N})-I|<\varepsilon$. $I\equiv\int\limits_L f(x,y)\,dl=\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$

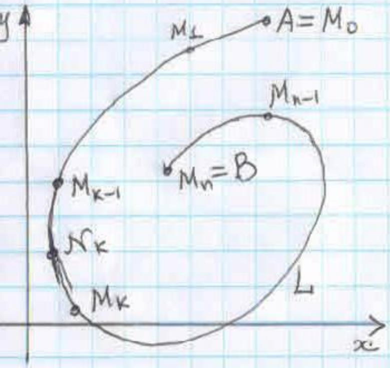
Ясно, что $\int\limits_{BA} f(x,y)\,dl = \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$; $\int\limits_L 1\cdot dl = \mu(L)$ (длина)

Если $f(x,y)$ – линейная плотность, то $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$ – масса кривой

T1. L – гл. кривая, $f(x,y)$ непр. вдоль L. Тогда

$$\exists \int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

Криволинейные интегралы



$L:\ \begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$ гладкая плоская кривая

$a \leq t \leq b \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a,b]$

$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a,b]$

$T = \{a = t_0 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = b\}$

$x_k = x(t_k) \quad M_k(x_k, y_k)$

$y_k = y(t_k) \quad k = 0, 1, \ldots, n$

$\Delta t_k = t_k - t_{k-1},\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ \Delta l_k = |\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}|$ (длина)

$k = 1, 2, \ldots, n$

$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{M_{k-1}M_k},\ N = \{N_k\}_{k=1}^n$

$\xi_k = x(\tau_k),\ \eta_k = y(\tau_k),\ \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$

$f(x,y)$ непр. вдоль L, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall K_1, K_2 \in L$,

$\rho(K_1, K_2) < \delta \Rightarrow |f(K_1) - f(K_2)| < \varepsilon$

$\sigma_T(f, N) \equiv \sum_{k=1}^n f(N_k)\Delta l_k$ – интегральная сумма.

Опр. I называется кривол. инт-лом 1-го рода (типа) от $f(x,y)$ по L, если $I = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f,N)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall T,\ \delta_T < \delta$ $\forall N = \{N_k\}_{k=1}^n \quad |\sigma_T(f,N) - I| < \varepsilon$. $I \equiv \int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{AB} f(x,y)dl$

Ясно, что $\int\limits_{BA} f(x,y)dl = \int\limits_{AB} f(x,y)dl\ ;\quad \int\limits_L 1 \cdot dl = \mu(L)$ (длина)

Если $f(x,y)$ – линейная плотность, то $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$ – масса кривой

T1. L – гл. кривая, $f(x,y)$ непр. вдоль L. Тогда

$$\exists \int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \equiv I$$

Д-во. Правый инт-л существует, обозначим. $\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$, $N = \{N_k\}$, $N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$, $\xi_k = x(\tau_k)$, $\eta_k = y(\tau_k)$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. $\sigma_T(f,N) = \sum_{k=1}^n f(N_k)\Delta l_k = \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$

$f(x(t), y(t)) \in C[a,b] \Rightarrow$ равн. непр., т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0:$ $\forall \bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}} \in [a,b],\ |\bar{\tau} - \bar{\bar{\tau}}| < \delta_1 \Rightarrow |f(x(\bar{\tau}), y(\bar{\tau})) - f(x(\bar{\bar{\tau}}), y(\bar{\bar{\tau}}))| < \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$

$m = \min\limits_{t \in [a,b]} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} > 0,\ \exists \delta = m\delta_1 > 0\ \forall T,\ \delta_T < \delta \Rightarrow$

$\tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k],\ |\tau_k - t| \leq t_k - t_{k-1} = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \frac{1}{m}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} m\,dt \leq$

$\leq \frac{1}{m}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \leq \frac{\Delta l_k}{m} \leq \frac{\delta_T}{m} < \frac{\delta}{m} = \delta_1 \Rightarrow |\sigma_T(f,N) - I| =$

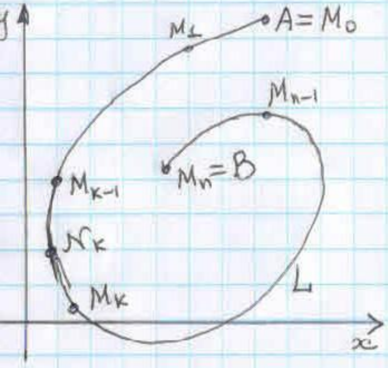
$= \left|\sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt - \sum_{k=1}^n \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt\right| \leq$

$\leq \sum_{k=1}^n \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |f(x(\tau_k), y(\tau_k)) - f(x(t), y(t))|\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \leq$

$\leq \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \sum_{k=1}^n \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}\int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \frac{\varepsilon \cdot \mu(L)}{\mu(L)+1} < \varepsilon$

Т. доказана.

Криволинейные интегралы



$L:\ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}$ гладкая плоская кривая

$a \le t \le b \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a,b]$

$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a,b]$

$T = \{a = t_0 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = b\}$

$x_k = x(t_k) \qquad M_k(x_k, y_k)$

$y_k = y(t_k) \qquad k = 0, 1, \ldots, n$

$\Delta t_k = t_k - t_{k-1},\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ \Delta l_k = |\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}|$ (длина)

$k = 1, 2, \ldots, n$

$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{M_{k-1}M_k},\quad N = \{N_k\}_{k=1}^n$

$\xi_k = x(\tau_k),\ \eta_k = y(\tau_k),\ \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$

$f(x,y)$ непр. вдоль L, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall K_1, K_2 \in L$, $\rho(K_1, K_2) < \delta \Rightarrow |f(K_1) - f(K_2)| < \varepsilon$

$\sigma_T(f, N) \equiv \sum_{k=1}^n f(N_k)\Delta l_k$ – интегральная сумма.

Опр. I назыв. кривол. инт-лом 1-го рода (типа) от $f(x,y)$ по L, если $I = \lim_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f,N)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall T,\ \delta_T < \delta$ $\forall N = \{N_k\}_{k=1}^n \quad |\sigma_T(f,N) - I| < \varepsilon$. $I \equiv \int_L f(x,y)\,dl = \int_{AB} f(x,y)\,dl$

Ясно, что $\int_{BA} f(x,y)\,dl = \int_{AB} f(x,y)\,dl$; $\int_L 1 \cdot dl = \mu(L)$ (длина)

Если $f(x,y)$ – линейная плотност, то $\int_{AB} f(x,y)\,dl$ – масса кривой

T1. L – гл. кривая, $f(x,y)$ непр. вдоль L. Тогда

$$\exists \int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt \equiv I$$

Д-во. Правый инт-л существует, обозначим. $\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$, $N = \{N_k\}$, $N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$, $\xi_k = x(\tau_k)$, $\eta_k = y(\tau_k)$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. $\sigma_T(f, N) = \sum_{k=1}^n f(N_k)\Delta l_k = \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$

$f(x(t), y(t)) \in C[a,b] \Rightarrow$ равн. непр., т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0:$ $\forall \bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}} \in [a,b],\ |\bar{\tau} - \bar{\bar{\tau}}| < \delta_1 \Rightarrow |f(x(\bar{\tau}), y(\bar{\tau})) - f(x(\bar{\bar{\tau}}), y(\bar{\bar{\tau}}))| < \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$

$m = \min_{t \in [a,b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0$, $\exists \delta = m\delta_1 > 0\ \forall T,\ \delta_T < \delta \Rightarrow$

$\tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k],\ |\tau_k - t| \le t_k - t_{k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \frac{1}{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k} m\,dt \le$ $\le \frac{1}{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt \le \frac{\Delta l_k}{m} \le \frac{\delta_T}{m} < \frac{\delta}{m} = \delta_1 \Rightarrow |\sigma_T(f,N) - I| =$

$$= \left| \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(x(\tau_k), y(\tau_k)) - f(x(t), y(t))| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \frac{\varepsilon \cdot \mu(L)}{\mu(L)+1} < \varepsilon$$

Т. доказана.

Инт-л по кус.-гл. кривой определяется как сумма интегралов по гладким компонентам.

Все св-ва опред. инт-лов при $a \le b$ переносятся и на криволин. инт-лы 1-го рода.

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрер. вдоль L

$$\sigma_T^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^{n} P(N_k)\Delta x_k, \quad \sigma_T^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^{n} Q(N_k)\Delta y_k$$

<u>Опр.</u> I_1 (I_2) назыв. криволин. инт-лом 2-го рода (типа) от $P(x,y)$ ($Q(x,y)$) по L, если $I_1 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(1)}(P,N)$ $\left(I_2 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(2)}(Q,N)\right)$.

$$I_1 \equiv \int\limits_L P(x,y)\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx; \quad I_2 = \int\limits_L Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)\,dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

Физ. смысл: работа поля $\{P; Q\}$ вдоль L.

Из определения: $\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}$ (инт-л <u>2-го</u> рода)

$P(x,y)$; $Q(x,y)$ непрер. вдоль L

$$\sigma_T^{(1)}(P,N) \equiv \sum_{k=1}^{n} P(N_k)\Delta x_k,\ \sigma_T^{(2)}(Q,N) \equiv \sum_{k=1}^{n} Q(N_k)\Delta y_k$$

<u>Опр.</u> $I_1(I_2)$ называется криволинейным интегралом 2-го рода (типа)

от $P(x,y)$ ($Q(x,y)$) по L, если $I_1 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(1)}(P,N)$ $\left(I_2 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(2)}(Q,N)\right)$.

$$I_1 \equiv \int_L P(x,y)dx = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx;\ I_2 = \int_L Q(x,y)dy = \int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$$

Физ. смысл: работа поля $\{P;Q\}$ вдоль L.

Из определения: $\int_{\overset{\frown}{BA}} = -\int_{\overset{\frown}{AB}}$ (инт-л <u>2-го</u> рода)

<u>Т.2</u> L - гл. кривая; $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непр. вдоль L. Тогда

$$\exists \int_L P(x,y)dx = \int_a^b P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)dt$$

$$\exists \int_L Q(x,y)dy = \int_a^b Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)dt$$

$P(x,y)$; $Q(x,y)$ непрер. вдоль L

$$\sigma_T^{(1)}(P,N)\equiv\sum_{k=1}^{n}P(N_k)\Delta x_k,\quad \sigma_T^{(2)}(Q,N)\equiv\sum_{k=1}^{n}Q(N_k)\Delta y_k$$

Опр. I_1 (I_2) назыв. криволин. инт-лом 2-го рода (типа) от $P(x,y)$ ($Q(x,y)$) по L, если $I_1=\lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T^{(1)}(P,N)$ $\left(I_2=\lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T^{(2)}(Q,N)\right)$.

$$I_1\equiv\int_L P(x,y)dx=\int_{AB}P(x,y)dx;\quad I_2=\int_L Q(x,y)dy=\int_{AB}Q(x,y)dy.$$

$$I=I_1+I_2=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{AB}Pdx+Qdy$$

Физ. смысл: работа поля $\{P;Q\}$ вдоль L.

Из определения: $\int_{BA}=-\int_{AB}$ (инт-л 2-го рода)

T2 L – гл. кривая; $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непр. вдоль L. Тогда

$$\exists\int_L P(x,y)dx=\int_a^b P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)dt\equiv I_1$$

$$\exists\int_L Q(x,y)dy=\int_a^b Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)dt\equiv I_2$$

Д-во. Правые инт-лы существуют, обозначим

Д-жем 1-ую ф-лу (2-я ф-ла – самост.)

$P(x(t),y(t))\in C[a,b]\Rightarrow$ равн. непр. на $[a,b]$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0$ $\forall\bar{\tau},\bar{\bar{\tau}}\in[a,b]$, $|\bar{\tau}-\bar{\bar{\tau}}|<\delta_1\Rightarrow|P(x(\bar{\tau}),y(\bar{\tau}))-P(x(\bar{\bar{\tau}}),y(\bar{\bar{\tau}}))|<\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$

$m=\min\limits_{t\in[a,b]}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}>0$, $\exists\delta=m\delta_1>0$ $\forall T:\ \delta_T<\delta\Rightarrow$ (так же, как раньше) $\Rightarrow\tau_k,t\in[t_{k-1},t_k]\Rightarrow|\tau_k-t|<\delta_1\Rightarrow|\sigma_T^{(1)}(P,N)-I_1|=$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{n}P(\overbrace{x(\tau_k),y(\tau_k)}^{N_k})\Delta x_k-\int_a^b P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)dt\Big|=$$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{n}P(x(\tau_k),y(\tau_k))\int_{t_{k-1}}^{t_k}\dot{x}(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)dt\Big|\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}|P(x(\tau_k),y(\tau_k))-P(x(t),y(t))|\cdot|\dot{x}(t)|dt\Big|\leq\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}\sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt\Big|=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}\Big|\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt\Big|=\frac{\varepsilon\mu(L)}{\mu(L)+1}<\varepsilon.$$ Т. доказана.

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрер. вдоль L

$\sigma_T^{(1)}(P,N)\equiv\sum_{k=1}^{n}P(N_k)\Delta x_k$, $\sigma_T^{(2)}(Q,N)\equiv\sum_{k=1}^{n}Q(N_k)\Delta y_k$

Опр. I_1 (I_2) назыв. кривол инт-лом 2-го рода (типа) от $P(x,y)$ ($Q(x,y)$) по L, если $I_1=\lim_{\delta_T\to 0}\sigma_T^{(1)}(P,N)$ $\left(I_2=\lim_{\delta_T\to 0}\sigma_T^{(2)}(Q,N)\right)$.

$$I_1\equiv\int_L P(x,y)dx=\int_{AB}P(x,y)dx;\ I_2=\int_L Q(x,y)dy=\int_{AB}Q(x,y)dy.$$

$$I=I_1+I_2=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{AB}Pdx+Qdy$$

Физ. смысл: работа поля $\{P;Q\}$ вдоль L.

Из определения: $\int_{BA}=-\int_{AB}$ (инт-л 2-го рода)

T2 L - гл. кривая; $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непр. вдоль L. Тогда

$$\exists\int_L P(x,y)dx=\int_a^b P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)dt\equiv I_1$$

$$\exists\int_L Q(x,y)dy=\int_a^b Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)dt\equiv I_2$$

Д-во. Правые инт-лы существуют, обозначим

Д-жем 1-ую ф-лу (2-я ф-ла - самост.)

$P(x(t),y(t))\in C[a,b]\Rightarrow$ равн. непр. на $[a,b]$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0$ $\forall\bar{\tau},\bar{\bar{\tau}}\in[a,b]$, $|\bar{\tau}-\bar{\bar{\tau}}|<\delta_1\Rightarrow|P(x(\bar{\tau}),y(\bar{\tau}))-P(x(\bar{\bar{\tau}}),y(\bar{\bar{\tau}}))|<\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$

$m=\min_{t\in[a,b]}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}>0$, $\exists\delta=m\delta_1>0\ \forall T:\ \delta_T<\delta\Rightarrow$ (так же, как раньше) $\Rightarrow\tau_k, t\in[t_{k-1},t_k]\Rightarrow|\tau_k-t|<\delta_1\Rightarrow|\sigma_T^{(1)}(P,N)-I_1|=$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{n}P(\overbrace{x(\tau_k),y(\tau_k)}^{N_k})\Delta x_k-\int_a^b P(x(t),y(t))\dot{x}(t)dt\Big|=$$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{n}P(x(\tau_k),y(\tau_k))\int_{t_{k-1}}^{t_k}\dot{x}(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)\,dt\Big|\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}|P(x(\tau_k),y(\tau_k))-P(x(t),y(t))|\cdot|\dot{x}(t)|dt\Big|\leq\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}\sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt\Big|=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}\Big|\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt\Big|=\frac{\varepsilon\mu(L)}{\mu(L)+1}<\varepsilon.$$ Т. доказана.

Инт-л по кус.-гл. кривой определяется как сумма инт-лов по гладким компонентам. Все св-ва определ. инт-ла ($a\geq b$) переносятся и на кривол. инт-лы 2-го рода.

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрер. вдоль L

$\sigma_T^{(1)}(P,N) \equiv \sum_{k=1}^{n} P(N_k)\Delta x_k$, $\sigma_T^{(2)}(Q,N) \equiv \sum_{k=1}^{n} Q(N_k)\Delta y_k$

Опр. I_1 (I_2) назыв. кривол. инт-лом 2-го рода (типа) от $P(x,y)$ ($Q(x,y)$) по L, если $I_1 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(1)}(P,N)$ ($I_2 = \lim\limits_{\delta_T\to 0} \sigma_T^{(2)}(Q,N)$).

$I_1 \equiv \int\limits_L P(x,y)dx = \int\limits_{AB} P(x,y)dx$; $I_2 = \int\limits_L Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$.

$I = I_1 + I_2 = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy$

Физ. смысл: работа поля $\{P; Q\}$ вдоль L.

Из определения: $\int\limits_{BA} = -\int\limits_{AB}$ (инт-л 2-го рода)

Т2 L - гл. кривая; $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непр. вдоль L. Тогда

$\exists \int\limits_L P(x,y)dx = \int\limits_a^b P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)dt \equiv I_1$

$\exists \int\limits_L Q(x,y)dy = \int\limits_a^b Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\,dt \equiv I_2$

Д-во. Правые инт-лы существуют, обозначим

Д-тем 1-ую ф-лу (2-я ф-ла - самост.)

$P(x(t),y(t)) \in C[a,b] \Rightarrow$ равн. непр. на $[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0$ $\forall \bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}} \in [a,b]$, $|\bar{\tau} - \bar{\bar{\tau}}| < \delta_1 \Rightarrow |P(x(\bar{\tau}),y(\bar{\tau})) - P(x(\bar{\bar{\tau}}),y(\bar{\bar{\tau}}))| < \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$

$m = \min\limits_{t\in[a,b]} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} > 0$, $\exists \delta = m\delta_1 > 0\ \forall T: \delta_T < \delta \Rightarrow$ (так же, как раньше) $\Rightarrow \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \Rightarrow |\tau_k - t| < \delta_1 \Rightarrow |\sigma_T^{(1)}(P,N) - I_1| =$

$= \left|\sum_{k=1}^{n} P(\overbrace{x(\tau_k),y(\tau_k)}^{N_k})\Delta x_k - \int\limits_a^b P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)dt\right| =$

$= \left|\sum_{k=1}^{n} P(x(\tau_k),y(\tau_k))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\dot{x}(t)dt - \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)\,dt\right| \leq$

$\leq \sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |P(x(\tau_k),y(\tau_k)) - P(x(t),y(t))|\cdot|\dot{x}(t)|dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt\right| =$

$= \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}\left|\int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt\right| = \frac{\varepsilon\,\mu(L)}{\mu(L)+1} < \varepsilon$. Т. доказана.

Инт-л по кус.-гл. кривой определяется как сумма инт-лов по гладким компонентам. Все св-ва определ. инт-ла ($a \gtrless b$) переносятся и на кривол. инт-лы 2-го рода.

Можно ввести крив. инт-лы по $L \subset \mathbb{E}_3$:

$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ - кривол. инт-л 1-го рода (типа)

$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ - крив. инт-л 2-го рода

$P(x,y)$; $Q(x,y)$ непрер. вдоль L

$\sigma_T^{(1)}(P,N)\equiv\sum\limits_{k=1}^{n}P(N_k)\Delta x_k$, $\sigma_T^{(2)}(Q,N)\equiv\sum\limits_{k=1}^{n}Q(N_k)\Delta y_k$

Опр. $I_1 (I_2)$ назыв. кривол. инт-лом 2-го рода (типа) от $P(x,y)$ $(Q(x,y))$ по L, если $I_1=\lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T^{(1)}(P,N)$ $\left(I_2=\lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T^{(2)}(Q,N)\right)$.

$I_1\equiv\int\limits_L P(x,y)dx=\int\limits_{AB}P(x,y)dx$; $I_2=\int\limits_L Q(x,y)dy=\int\limits_{AB}Q(x,y)dy$.

$I=I_1+I_2=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{AB}Pdx+Qdy$

Физ. смысл: работа поля $\{P;Q\}$ вдоль L.

Из определения: $\int\limits_{BA}=-\int\limits_{AB}$ (инт-л 2-го рода)

Т2 L - гл. кривая; $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непр. вдоль L. Тогда

$\exists\int\limits_L P(x,y)dx=\int\limits_a^b P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)dt\equiv I_1$

$\exists\int\limits_L Q(x,y)dy=\int\limits_a^b Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)dt\equiv I_2$

Д-во. Правые инт-лы существуют, обозначим

Д-жем 1-ую ф-лу (2-я ф-ла — самост.)

$P(x(t),y(t))\in C[a,b]\Rightarrow$ равн. непр. на $[a,b]$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0$ $\forall\bar\tau,\bar{\bar\tau}\in[a,b]$, $|\bar\tau-\bar{\bar\tau}|<\delta_1\Rightarrow|P(x(\bar\tau),y(\bar\tau))-P(x(\bar{\bar\tau}),y(\bar{\bar\tau}))|<\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$

$m=\min\limits_{t\in[a,b]}\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}>0$, $\exists\delta=m\delta_1>0$ $\forall T:\delta_T<\delta\Rightarrow$ (так же, как раньше) $\Rightarrow\tau_k, t\in[t_{k-1},t_k]\Rightarrow|\tau_k-t|<\delta_1\Rightarrow|\sigma_T^{(1)}(P,N)-I_1|=$

$=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}P(\overbrace{x(\tau_k),y(\tau_k)}^{N_k})\Delta x_k-\int\limits_a^b P(x(t),y(t))\dot x(t)dt\right|=$

$=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}P(x(\tau_k),y(\tau_k))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\dot x(t)dt-\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}P(x(t),y(t))\dot x(t)dt\right|\le$

$\le\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|P(x(\tau_k),y(\tau_k))-P(x(t),y(t))|\cdot|\dot x(t)|dt\right|\le\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}dt\right|=$

$=\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}\left|\int\limits_a^b\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}dt\right|=\frac{\varepsilon\mu(L)}{\mu(L)+1}<\varepsilon$. Т. доказана.

Инт-л по кус.-гл. кривой определяется как сумма инт-лов по гладким компонентам. Все св-ва определ. инт-ла $(a\ge b)$ переносятся и на кривол. инт-лы 2-го рода.

Можно ввести крив. инт-лы по $L\subset E_3$:

$\int\limits_L f(x,y,z)dl$ - кривол. инт-л 1-го рода (типа)

$\int\limits_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ - крив. инт-л 2-го рода

L - замкнута $\Rightarrow$ можно указать напр. $\oint\limits_L$, $\oint\limits_L$, $\oint\limits_L$.

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрер. вдоль L

$$\sigma_T^{(1)}(P,N)\equiv\sum_{k=1}^{n}P(N_k)\Delta x_k,\quad \sigma_T^{(2)}(Q,N)\equiv\sum_{k=1}^{n}Q(N_k)\Delta y_k$$

Опр. $I_1(I_2)$ назыв. кривол. инт-лом 2-го рода (типа) от $P(x,y)$ $(Q(x,y))$ по L, если $I_1=\lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T^{(1)}(P,N)$ $\left(I_2=\lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T^{(2)}(Q,N)\right)$.

$$I_1\equiv\int_L P(x,y)dx=\int_{AB}P(x,y)dx;\quad I_2=\int_L Q(x,y)dy=\int_{AB}Q(x,y)dy.$$

$$I=I_1+I_2=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{AB}Pdx+Qdy$$

Физ. смысл: работа поля $\{P;Q\}$ вдоль L.

Из определения: $\int_{BA}=-\int_{AB}$ (инт-л 2-го рода)

Т.2 L - гл. кривая; $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непр. вдоль L. Тогда

$$\exists\int_L P(x,y)dx=\int_a^b P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)dt\equiv I_1$$

$$\exists\int_L Q(x,y)dy=\int_a^b Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)dt\equiv I_2$$

Д-во. Правые инт-лы существуют, обозначим

Д-жем 1-ую ф-лу (2-я ф-ла - самост.)

$P(x(t),y(t))\in C[a,b]\Rightarrow$ равн. непр. на $[a,b]$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0$ $\forall\bar{\tau},\bar{\bar{\tau}}\in[a,b]$, $|\bar{\bar{\tau}}-\bar{\tau}|<\delta_1\Rightarrow|P(x(\bar{\tau}),y(\bar{\tau}))-P(x(\bar{\bar{\tau}}),y(\bar{\bar{\tau}}))|<\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$

$m=\min\limits_{t\in[a,b]}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}>0$, $\exists\delta=m\delta_1>0$ $\forall T:\ \delta_T<\delta\Rightarrow$ (так же, как раньше) $\Rightarrow\tau_k, t\in[t_{k-1},t_k]\Rightarrow|\tau_k-t|<\delta_1\Rightarrow|\sigma_T^{(1)}(P,N)-I_1|=$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{n}P(\overbrace{x(\tau_k),y(\tau_k)}^{N_k})\Delta x_k-\int_a^b P(x(t),y(t))\dot{x}(t)dt\Big|=$$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{n}P(x(\tau_k),y(\tau_k))\int_{t_{k-1}}^{t_k}\dot{x}(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)dt\Big|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}|P(x(\tau_k),y(\tau_k))-P(x(t),y(t))|\,|\dot{x}(t)|dt\Big|\le\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}\sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt\Big|=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}\Big|\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt\Big|=\frac{\varepsilon\mu(L)}{\mu(L)+1}<\varepsilon.$$ Т. доказана

Инт-л по кус.-гл. кривой определяется как сумма инт-лов по гладким компонентам. Все св-ва определ. инт-ла $(a\ge b)$ переносятся и на кривол. инт-лы 2-го рода.

Можно ввести крив. инт-лы по $L\subset E_3$:

$\int_L f(x,y,z)\,dl$ - кривол. инт-л 1-го рода (типа)

$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ - крив. инт-л 2-го рода

L - замкнута $\Rightarrow$ можно указать напр. $\oint_L$, $\oint_L$, $\oint_L$.

Связь между кривол. инт-лами 1-го и 2-го рода.

$$L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\\ t\in[a,b]\end{cases}\quad \int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int_a^b\left[P(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t)+R(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)\right]dt=$$

$$=\int_a^b\left[P(x(t),y(t),z(t))\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}+Q(x(t),y(t),z(t))\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}+R(x(t),y(t),z(t))\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right]\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt=$$

$\left(\vec{\tau}(t)=\frac{\{\dot{x};\dot{y};\dot{z}\}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right)$ един. кас. вектор к L $=$

$$=\int_L\left(P\cdot\cos(\widehat{\vec{\tau},\vec{i}})+Q\cos(\widehat{\vec{\tau},\vec{j}})+R\cos(\widehat{\vec{\tau},\vec{k}})\right)dl=$$

$$=\int_L f(x,y,z)\,dl$$ - кривол. инт-л 1-го рода

$$f(x,y,z)=P(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{\tau},\vec{i}})+Q(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{\tau},\vec{j}})+R(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{\tau},\vec{k}})$$

зависят от x,y,z