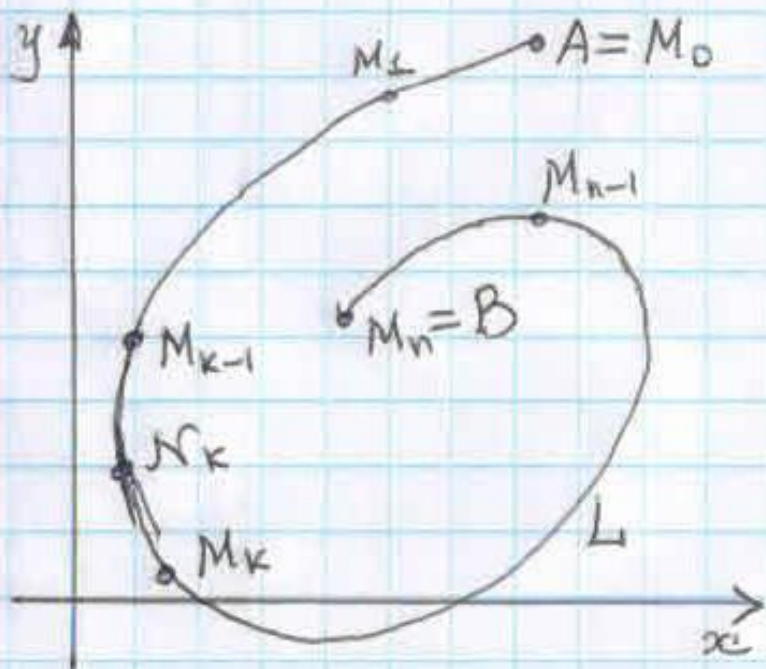


Криволинейные интегралы



$L: \begin{cases} x = x(t) & \text{гладкая по-} \\ y = y(t) & \text{лая кривая} \end{cases}$

$$a \leq t \leq b \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a, b]$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$T = \{a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b\}$$

$$\begin{aligned} x_k &= x(t_k) & M_k(x_k, y_k) \\ y_k &= y(t_k) & k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

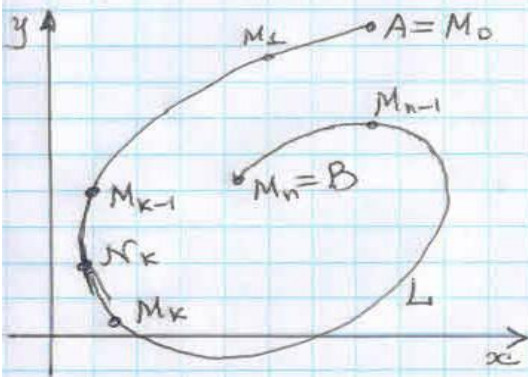
$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta l_k = \overbrace{|M_{k-1} M_k|}^{\text{длина}}$$

$k = 1, 2, \dots, n$

$$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overbrace{M_{k-1} M_k}^{\text{длина}}, \quad N = \{N_k\}_{k=1}^n$$

$$\xi_k = x(\tau_k), \quad \eta_k = y(\tau_k), \quad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

Криволинейные интегралы



$$L: \begin{aligned} x &= x(t) && \text{гладкая кусочная кривая} \\ y &= y(t) && \text{какая кривая} \end{aligned}$$

$$a \leq t \leq b \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a, b]$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$T = \{a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b\}$$

$$\begin{aligned} x_k &= x(t_k) && M_k(x_k, y_k) \\ y_k &= y(t_k) && k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta l_k = \overbrace{|M_{k-1} M_k|}^{\text{(длина)}}$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overbrace{M_{k-1} M_k}, N = \{N_k\}_{k=1}^n$$

$$\xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k), \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

$f(x, y)$ непрерывна в области L , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall K_1, K_2 \in L,$

$$\rho(K_1, K_2) < \delta \Rightarrow |f(K_1) - f(K_2)| < \varepsilon$$

$$\sigma_T(f, N) \equiv \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k - \text{интегральная сумма.}$$

Опр. Интеграл кривой L от $f(x, y)$ по L , если $I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, N)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta$

$$\forall N = \{N_k\}_{k=1}^n \quad |\sigma_T(f, N) - I| < \varepsilon. \quad I \equiv \int_L f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl$$

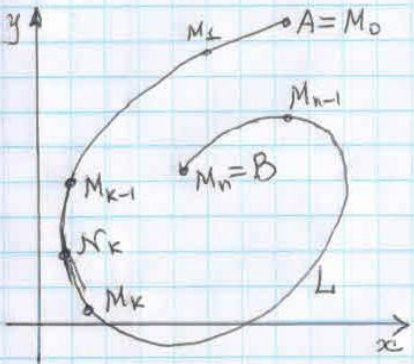
$$\text{Ясно, что } \int_{BA} f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl; \quad \int_L 1 \cdot dl = \mu(L) \quad (\text{длина})$$

Если $f(x, y)$ - линейная плотность, то $\int_{AB} f(x, y) dl$ - масса кривой

Криволинейные интегралы

Т.1. L - н. кривая, $f(x, y)$ непрерывна в области L . Тогда

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$



$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ заданная параметризация кривой

$a \leq t \leq b \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a, b]$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$T = \{a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b\}$

$$\begin{cases} x_k = x(t_k) \\ y_k = y(t_k) \end{cases} \quad M_k(x_k, y_k) \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta l_k = \overline{M_{k-1} M_k} \quad (\text{длина})$$

$k = 1, 2, \dots, n$

$$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overline{M_{k-1} M_k}, \quad N = \{N_k\}_{k=1}^n$$

$$\xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k), \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

$f(x, y)$ непрерывна в области L , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall K_1, K_2 \in L,$

$$\rho(K_1, K_2) < \delta \Rightarrow |f(K_1) - f(K_2)| < \varepsilon$$

$$\sigma_T(f, N) \equiv \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k \text{ - интегральная сумма.}$$

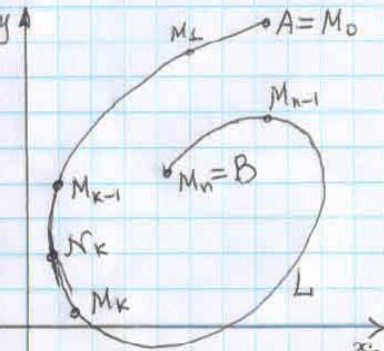
Опр. Интеграл кривой L от $f(x, y)$ по L , если $I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, N)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta$

$\forall N = \{N_k\}_{k=1}^n \quad |\sigma_T(f, N) - I| < \varepsilon. I \equiv \int_L f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl$

ясно, что $\int_{BA} f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl; \int_L 1 dl = \mu(L)$ (длина)

Если $f(x, y)$ - линейная плотность, то $\int_{AB} f(x, y) dl$ - масса кривой

Криволинейные интегралы



$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ гладкая мос-
кая кривая

$$a \leq t \leq b \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[a, b]$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$T = \{a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b\}$$

$$\begin{aligned} x_k &= x(t_k) & M_k(x_k, y_k) \\ y_k &= y(t_k) & k=0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta l_k = \overbrace{|M_{k-1}M_k|}^{(длина)}$$

$$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overline{M_{k-1}M_k}, N = \{N_k\}_{k=1}^n$$

$$\xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k), \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

$f(x, y)$ непрерывна в области L , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall K_1, K_2 \in L,$

$$\rho(K_1, K_2) < \delta \Rightarrow |f(K_1) - f(K_2)| < \varepsilon$$

$$\sigma_T(f, N) \equiv \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k - \text{интегральная сумма}$$

Опр. Изначл. кривая L и кр-ной 1-го рода (туда) от $f(x, y)$

на L , если $I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, N)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta$

$$\forall N = \{N_k\}_{k=1}^n \quad |\sigma_T(f, N) - I| < \varepsilon. \quad I \equiv \int_L f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl$$

$$\text{Ясно, что } \int_{BA} f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl; \quad \int_L 1 dl = \mu(L) \quad (\text{длина})$$

Если $f(x, y)$ - линейная масса, то $\int_{AB} f(x, y) dl$ - масса кривой

Т1. L - н. кривая, $f(x, y)$ непрерывна в области L . Тогда

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \equiv I$$

Д-во. Правильно и-л существует, обозначим $\Delta l_k =$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt, N = \{N_k\}, N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overline{M_{k-1}M_k}, \xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k)$$

$$\sigma_T(f, N) = \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k = \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$f(x(t), y(t)) \in C[a, b] \Rightarrow$ равн. непрерывна, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0:$

$$\forall \bar{t}, \bar{\tau} \in [a, b], |\bar{t} - \bar{\tau}| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - f(x(\bar{\tau}), y(\bar{\tau}))| < \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$$

$$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta = m \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow$$

$$\tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k], |\tau_k - t| \leq t_k - t_{k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \frac{1}{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} m dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \leq \frac{\Delta l_k}{m} \leq \frac{\delta_T}{m} < \frac{\delta}{m} = \delta_\varepsilon \Rightarrow |\sigma_T(f, N) - I| =$$

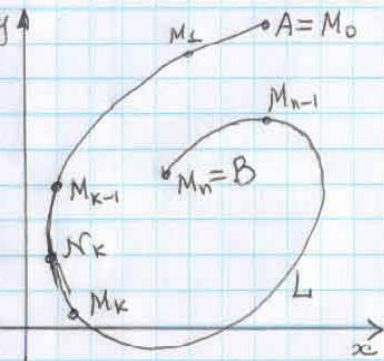
$$= \left| \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(x(\tau_k), y(\tau_k)) - f(x(t), y(t))| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \int_0^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{\varepsilon \mu(L)}{\mu(L)+1} < \varepsilon$$

Т. доказано.

Криволинейные интегралы



$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ гладкая плоская кривая
 $a \leq t \leq b$ $\dot{x}(t), \dot{y}(t) \in C[0, b]$
 $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$

$T = \{a = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b\}$
 $x_k = x(t_k) \quad M_k(x_k, y_k)$
 $y_k = y(t_k) \quad k = 0, 1, \dots, n$

$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta l_k = \overbrace{|M_{k-1}M_k|}^{(длина)}$

$N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overline{M_{k-1}M_k}, N = \{N_k\}_{k=1}^n$
 $\xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k), \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$

$f(x, y)$ непрерывна в области L , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall K_1, K_2 \in L, \rho(K_1, K_2) < \delta \Rightarrow |f(K_1) - f(K_2)| < \varepsilon$

$\sigma_T(f, N) \equiv \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k$ - интегральная сумма.

Опр. Изначально криволинейный интеграл 1-го рода (от $f(x, y)$) по L , если $I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, N)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow |\sigma_T(f, N) - I| < \varepsilon$. $I \equiv \int_L f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl$

Если, то $\int_{BA} f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl$; $\int_L 1 dl = \mu(L)$ (длина)

Если $f(x, y)$ - линейная масса, то $\int_{AB} f(x, y) dl$ - масса кривой

Т.1. L - н. кривая, $f(x, y)$ непрерывна в области L . Тогда

$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \equiv I$

Д-во. Правильный интеграл существует, если непрерывна, $\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt, N = \{N_k\}, N_k(\xi_k, \eta_k) \in \overline{M_{k-1}M_k}, \xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k), \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. $\sigma_T(f, N) = \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k = \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

$f(x(t), y(t)) \in C[0, b] \Rightarrow$ равн. непрерывна, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0: \forall \bar{t}, \bar{t}' \in [a, b], |\bar{t} - \bar{t}'| < \delta_1 \Rightarrow |f(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - f(x(\bar{t}'), y(\bar{t}'))| < \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1}$

$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta = m \delta_1 > 0 \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k], |\tau_k - t| \leq t_k - t_{k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \frac{1}{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} m dt \leq$

$\leq \frac{1}{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \leq \frac{\Delta l_k}{m} \leq \frac{\delta_T}{m} < \frac{\delta}{m} = \delta_1 \Rightarrow |\sigma_T(f, N) - I| =$

$= \left| \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| \leq$

$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(x(\tau_k), y(\tau_k)) - f(x(t), y(t))| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \leq$

$\leq \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{\varepsilon}{\mu(L)+1} \int_0^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{\varepsilon \mu(L)}{\mu(L)+1} < \varepsilon$

Т. доказано.

Интеграл по кусочной кривой определяется как сумма интегралов по гладким компонентам.

Все свойства определ. интеграла при $a \leq b$ переносятся и на криволинейный интеграл 1-го рода.

$P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. в области L

$$\sigma_T^{(1)}(P, N()) \equiv \sum_{k=1}^n P(N_k) \Delta x_k, \quad \sigma_T^{(2)}(Q, N()) \equiv \sum_{k=1}^n Q(N_k) \Delta y_k$$

Опр. $I_1(I_2)$ назыв. кривой ити-лаи 2-го рода (типа)

от $P(x, y) (Q(x, y))$ по L , если $I_1 = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T^{(1)}(P, N)$ ($I_2 = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T^{(2)}(Q, N)$).

$$I_1 \equiv \int_L P(x, y) dx = \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx; \quad I_2 = \int_L Q(x, y) dy = \int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\overline{AB}} P dx + Q dy$$

Пуз. сурсес: работа нене $\{P; Q\}$ в области L .

Из определения: $\int_{\overline{BA}} = - \int_{\overline{AB}}$ (ити-лаи 2-го рода)

$P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. в области L

$$\sigma_{\pi}^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(N_k) \Delta x_k, \quad \sigma_{\pi}^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(N_k) \Delta y_k$$

Опр. $I_1(I_2)$ назыв. кривой и кр-ной 2-го рода (типа)

от $P(x, y) (Q(x, y))$ по L , если $I_1 = \lim_{\delta_{\pi} \rightarrow 0} \sigma_{\pi}^{(1)}(P, N) (I_2 = \lim_{\delta_{\pi} \rightarrow 0} \sigma_{\pi}^{(2)}(Q, N))$.

$$I_1 \equiv \int_L P(x, y) dx = \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx; \quad I_2 = \int_L Q(x, y) dy = \int_{\overline{AB}} Q(x, y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\overline{AB}} P dx + Q dy$$

Пусть выберем: направление по $\{P; Q\}$ в области L .

Из определения: $\int_{\overline{BA}} = - \int_{\overline{AB}}$ (и кр-н 2-го рода)

Т.2 L -я кривая; $P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. в области L . Тогда

$$\exists \int_L P(x, y) dx = \int_0^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt$$

$$\exists \int_L Q(x, y) dy = \int_0^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt$$

$P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. в области L

$$\sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(x_k) \Delta x_k, \quad \sigma_{\Gamma}^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(x_k) \Delta y_k$$

$$= \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \left| \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| = \frac{\varepsilon M(L)}{M(L)+1} < \varepsilon. \quad \text{Т. Доказана}$$

Опр. $I_1(I_2)$ крив. интеграл 1-го (2-го) рода (типа)

от $P(x, y) (Q(x, y))$ по L , если $I_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N) (I_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\Gamma}^{(2)}(Q, N))$.

$$I_1 \equiv \int_L P(x, y) dx = \int_{AB} P(x, y) dx; \quad I_2 \equiv \int_L Q(x, y) dy = \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P dx + Q dy$$

Физ. смысл: работа поля $\{P, Q\}$ в области L .

Из определения: $\int_{BA} = - \int_{AB}$ (инт-л 2-го рода)

Т2 L -я кривая, $P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. в области L . Тогда

$$\exists \int_L P(x, y) dx = \int_0^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \equiv I_1$$

$$\exists \int_L Q(x, y) dy = \int_0^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \equiv I_2$$

Д-во. Правые инт-лы существуют, однозначны

Д-во 1-го р-ла (2-й р-ла - аналог.)

$P(x(t), y(t)) \in C[a, b] \Rightarrow$ равн. непрерыв. на $[a, b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0$

$$\forall \bar{t}, \bar{t}' \in [a, b], |\bar{t} - \bar{t}'| < \delta_1 \Rightarrow |P(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - P(x(\bar{t}'), y(\bar{t}'))| < \frac{\varepsilon}{M(L)+1}$$

$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta = m \delta_1 > 0 \forall T: \delta_T < \delta \Rightarrow$ (так же, как

раньше) $\Rightarrow \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \Rightarrow |\tau_k - t| < \delta_1 \Rightarrow |\sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N) - I_1| \leq$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta x_k - \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |P(x(\tau_k), y(\tau_k)) - P(x(t), y(t))| |\dot{x}(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$



$P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. в области L

$$\sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(x_k) \Delta x_k, \quad \sigma_{\Gamma}^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(x_k) \Delta y_k$$

Опр. I_1, I_2 интегр. кривой икс-ной 1-го ряда (типа)

от $P(x, y)$ ($Q(x, y)$) по L , если $I_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N)$ ($I_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\Gamma}^{(2)}(Q, N)$)

$$I_1 \equiv \int_L P(x, y) dx = \int_{AB} P(x, y) dx; \quad I_2 \equiv \int_L Q(x, y) dy = \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P dx + Q dy$$

Физ. смысл: работа поля $\{P, Q\}$ в области L .

Уг. определение: $\int_{BA} = - \int_{AB}$ (икс-ной 2-го ряда)

Т.2 L -я кривая; $P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. в области L . Тогда

$$\exists \int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \equiv I_1$$

$$\exists \int_L Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \equiv I_2$$

Д-во. Правые икс-ные существуют, однозначны

Д-во 1-ую ф-лу (2-я ф-ла - следствие)

$P(x(t), y(t)) \in C[a, b] \Rightarrow$ равн. непрерыв. на $[a, b]$, т.е. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\forall \bar{t}, \bar{t}' \in [a, b], |\bar{t} - \bar{t}'| < \delta \Rightarrow |P(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - P(x(\bar{t}'), y(\bar{t}'))| < \frac{\epsilon}{M(L)+1}$$

$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta = m \delta_1 > 0 \forall T: \delta_T < \delta \Rightarrow$ (так же, как

раньше) $\Rightarrow \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \Rightarrow |t_k - t| < \delta_1 \Rightarrow |\sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N) - I_1|$

$$= \left| \sum_{k=1}^n \overbrace{P(x(\tau_k), y(\tau_k))}^{N_k} \Delta x_k - \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n \overbrace{P(x(\tau_k), y(\tau_k))}^{N_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |P(x(\tau_k), y(\tau_k)) - P(x(t), y(t))| |\dot{x}(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{M(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$= \frac{\epsilon}{M(L)+1} \left| \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| = \frac{\epsilon M(L)}{M(L)+1} < \epsilon. \quad \text{Т. доказана.}$$

Икс-ной по крив.-ной кривой определяется как сумма

икс-ной по гладким компонентам. Все св-ва определ. икс-ной

($a \geq b$) переносятся и на кривой икс-ной 2-го ряда.

$P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. в области L

$$\sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(x_k) \Delta x_k, \quad \sigma_{\Gamma}^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(x_k) \Delta y_k$$

Опр. $I_1 (I_2)$ назыв. кривой или-лай 1-го рода (типа)

от $P(x, y) (Q(x, y))$ по L , если $I_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N) (I_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\Gamma}^{(2)}(Q, N))$.

$$I_1 \equiv \int_L P(x, y) dx = \int_{AB} P(x, y) dx; \quad I_2 \equiv \int_L Q(x, y) dy = \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P dx + Q dy$$

Физ. смысл: работа поля $\{P, Q\}$ в области L .

Из определения: $\int_{BA} = - \int_{AB}$ (или-лай 2-го рода)

Т.2 L -го кривая, $P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. в области L . Тогда

$$\exists \int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \equiv I_1$$

$$\exists \int_L Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \equiv I_2$$

Д-во. Правые или-лай существуют, однозначны

Д-во 1-го ф-лы (2-я ф-ла - следствие.)

$P(x(t), y(t)) \in C[a, b] \Rightarrow$ равн. непрерыв. на $[a, b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\forall \bar{t}, \bar{t} \in [a, b], |\bar{t} - \bar{t}| < \delta_x \Rightarrow |P(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - P(x(\bar{t}), y(\bar{t}))| < \frac{\varepsilon}{M(L)+1}$$

$$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta = m \delta_x > 0 \quad \forall T: \delta_T < \delta \Rightarrow (\text{так же, как}$$

$$\text{раньше}) \Rightarrow \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \Rightarrow |\tau_k - t| < \delta_x \Rightarrow |\sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N) - I_1|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta x_k - \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |P(x(\tau_k), y(\tau_k)) - P(x(t), y(t))| |\dot{x}(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$= \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \left| \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| = \frac{\varepsilon M(L)}{M(L)+1} < \varepsilon. \quad \text{Т. доказана.}$$

или-лай по кр.-го кривой определяется как сумма или-лов по гладким компонентам. Все св-ва определ. или-лай

(а) (б) переносятся и на кривой или-лай 2-го рода.

Можно ввести крив. или-лай по $L \subset \mathbb{E}_3$:

$$\int_L f(x, y, z) dl - \text{кривой или-лай 1-го рода (типа)}$$

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz - \text{кривой или-лай 2-го рода}$$

$P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. вблизи L

$$\sigma_T^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(x_k) \Delta x_k, \quad \sigma_T^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(x_k) \Delta y_k$$

Опр. $I_1(I_2)$ интегралы 1-го (2-го) рода (типа) от $P(x, y) (Q(x, y))$ по L , если $I_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_T^{(1)}(P, N) (I_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_T^{(2)}(Q, N))$.

$$I_1 \equiv \int_L P(x, y) dx = \int_{AB} P(x, y) dx; \quad I_2 \equiv \int_L Q(x, y) dy = \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P dx + Q dy$$

Физ. смысл: работа поля $\{P, Q\}$ вблизи L .

Из определения: $\int_{BA} = - \int_{AB}$ (интегралы 2-го рода)

Т2 L -я кривая; $P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. вблизи L . Тогда

$$\exists \int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \equiv I_1$$

$$\exists \int_L Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \equiv I_2$$

D-во. Правые интегралы существуют, однозначны

D-во 1-го р-ла (2-го р-ла - самост.)

$P(x(t), y(t)) \in C[0, b] \Rightarrow$ равн. непрерыв. на $[0, b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$\forall \bar{t}, \bar{t}' \in [0, b], |\bar{t} - \bar{t}'| < \delta \Rightarrow |P(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - P(x(\bar{t}'), y(\bar{t}'))| < \frac{\varepsilon}{M(L)+1}$

$m = \min_{t \in [0, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta = m \delta_1 > 0 \forall T: \delta_T < \delta \Rightarrow$ (так же, как

раньше) $\Rightarrow \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \Rightarrow |\tau_k - t| < \delta_1 \Rightarrow |\sigma_T^{(1)}(P, N) - I_1| \leq$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta x_k - \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |P(x(\tau_k), y(\tau_k)) - P(x(t), y(t))| |\dot{x}(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \left| \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| = \frac{\varepsilon M(L)}{M(L)+1} < \varepsilon. \quad \text{Т. доказана.}$$

Интеграл по кривой определяется как сумма интегралов по координатным компонентам. Все свойства определяются

($a \geq b$) переносятся и на кривые 1-го и 2-го рода.

Можно ввести кривые 1-го рода по $LC \mathbb{E}_3$:

$\int_L f(x, y, z) dl$ - кривая 1-го рода (типа)

$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ - кривая 2-го рода

L - замкнута \Rightarrow

можно указать напр. $\oint_L, \oint_L, \oint_L$

$P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. в области L

$$\sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N) \equiv \sum_{k=1}^n P(x_k) \Delta x_k, \quad \sigma_{\Gamma}^{(2)}(Q, N) \equiv \sum_{k=1}^n Q(x_k) \Delta y_k$$

Опр. $I_1 (I_2)$ кривой l или l -го рода (типа)

от $P(x, y) (Q(x, y))$ по L , если $I_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N) (I_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_{\Gamma}^{(2)}(Q, N))$

$$I_1 \equiv \int_L P(x, y) dx = \int_{AB} P(x, y) dx; \quad I_2 \equiv \int_L Q(x, y) dy = \int_{AB} Q(x, y) dy$$

$$I = I_1 + I_2 = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P dx + Q dy$$

Физ. смысл: работа поля $\{P, Q\}$ в области L .

Уз определение: $\int_{BA} = - \int_{AB}$ (кривая 2-го рода)

Т.2 L -го кривая, $P(x, y), Q(x, y)$ непрерыв. в области L . Тогда

$$\exists \int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \equiv I_1$$

$$\exists \int_L Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \equiv I_2$$

Д-во. Правые кривые существуют, однозначны

Д-во 1-го пр-ва (2-я пр-ва - следствие)

$P(x(t), y(t)) \in C[a, b] \Rightarrow$ равн. непрерыв. на $[a, b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$\forall \bar{t}, \bar{t}' \in [a, b], |\bar{t} - \bar{t}'| < \delta \Rightarrow |P(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - P(x(\bar{t}'), y(\bar{t}'))| < \frac{\varepsilon}{M(L)+1}$

$m = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0, \exists \delta = m \delta_1 > 0 \forall T: \delta_T < \delta \Rightarrow$ (так же, как

раньше) $\Rightarrow \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k] \Rightarrow |\tau_k - t| < \delta_1 \Rightarrow |\sigma_{\Gamma}^{(1)}(P, N) - I_1|$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta x_k - \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |P(x(\tau_k), y(\tau_k)) - P(x(t), y(t))| |\dot{x}(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$= \frac{\varepsilon}{M(L)+1} \left| \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right| = \frac{\varepsilon M(L)}{M(L)+1} < \varepsilon. \quad \text{Т. доказано.}$$

или-л по крив.-го кривой определяется как сумма или-лов по малым элементам. Все св-ва определ. или-ла

(а) (б) переносятся и на кривые или-ны 2-го рода.

Можно ввести крив. или-ны по $L \subset E_3$:

$$\int_L f(x, y, z) dl - \text{кривая или-л 1-го рода (типа)}$$

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz - \text{кривая или-л 2-го рода}$$

L -замкнута $\Rightarrow \oint_L, \oint_L, \oint_L$

можно указать напр. \oint_L

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t \in [a, b] \end{cases} \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz =$$

$$= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t)] dt =$$

$$= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + Q(x(t), y(t), z(t)) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + R(x(t), y(t), z(t)) \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}] \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_{\vec{r}(t)} \frac{\{ \dot{x}; \dot{y}; \dot{z} \}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

$$= \int_L (P \cos(\vec{r}, \vec{i}) + Q \cos(\vec{r}, \vec{j}) + R \cos(\vec{r}, \vec{k})) dl =$$

$$= \int_L f(x, y, z) dl - \text{кривая или-л 1-го рода}$$

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) \cos(\vec{r}, \vec{i}) + Q(x, y, z) \cos(\vec{r}, \vec{j}) + R(x, y, z) \cos(\vec{r}, \vec{k})$$

зависит от x, y, z