

Тема: Деление многочленов

Любой многочлен $P(x)$, содержащий только переменное x и его натуральные степени, можно записать в стандартном виде

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_{n-1}x + a_n$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ – некоторые действительные числа.

Если $a_0 \neq 0$, то многочлен $P(x)$ называют многочленом n – ой степени (или n – степени), член a_0x^n старшим членом, a_n – свободным членом.

$P(x) = a_0$, где $a_0 \neq 0$, называют многочленом нулевой степени.

Число 0 называют нулевым многочленом.

В результате сложения, вычитания и умножения многочленов получаются многочлены. Особое место в теории многочленов занимает деление многочленов уголком.

Разделить уголком многочлен $P(x) = 10x^2 - 7x - 12$ на $Q(x) = 5x + 4$

ДЕЛИМОЕ	$10x^2 - 7x - 12$	$5x + 4$	ДЕЛИТЕЛЬ
	$-$		
	$10x^2 + 8x$	$2x -$	ЧАСТНОЕ
ПЕРВЫЙ ОСТАТОК	$-15x -$	3	
	$-$		
	$15x - 12$		
		0	ОСТАТОК

Остаток равен нулю, поэтому многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$

Пример 1 : Разделить многочлен $P(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ на многочлен $Q(x) = x^2 + x$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 2x^2 - 1 & x^2 + x \\ \underline{3x^4 + 3x^3} & \hline -3x^3 + 2x^2 - 1 & \\ \underline{-3x^3 - 3x^2} & \\ 5x^2 - 1 & \\ \underline{-5x^2 + 5x} & \\ -5x - 1 & \end{array}$$

Степень остатка $-5x - 1$ меньше степени делителя $x^2 + x$, деление закончено.

Ответ: $3x^2 - 3x + 5$ — частное, $-5x - 1$ — остаток.

Формула деления многочленов с остатком

Если многочлен $P(x)$ степени $n > 1$ делит на многочлен $Q(x)$ степени $k \geq 1, k \leq n$ то справедливо равенство:

$$P(x) = M(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

где $M(x)$ – частное, степень которого $m = n - k$, $R(x)$ – остаток, степень которого $l < k$.

Чтобы разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$

нужно:

1. Расположить делимое и делитель по убывающим степеням x ;
2. Разделить старший член делимого на старший член делителя; полученный одночлен сделать первым членом частного;
3. Первый член частного умножить на делитель; результат вычесть из делимого; полученная разность является первым остатком;
4. Чтобы получить следующий член частного, нужно с первым остатком поступить так, как поступали с делимым и делителем в пунктах 2 и 3.

Пример 2 : Разделить многочлен $3x + 4x^4 + 1 - 15x^3 + 2x^5 - 9x^2$
на многочлен $2x^2 - x^3$

$$\begin{array}{r}
 \underline{2x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{2x^5 - 4x^4} \\
 \hline
 -8x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{8x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 3x + 1} \\
 \hline
 -x^3 - 9x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{-x^3 - 2x^2} \\
 \hline
 -7x^2 + 3x + 1
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 -x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 -2x^2 - 8x - 1
 \end{array} \right.$$

Ответ: $-2x^2 - 8x - 1$ – частное, $-7x^2 + 3x + 1$ – остаток.

Свойства делимости многочленов

1. Если многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, а многочлен $Q(x)$ делится на многочлен $M(x)$, то многочлен $P(x)$ делится на многочлен $M(x)$.
2. Если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на многочлен $M(x)$, то многочлены $P(x) + Q(x)$ и $P(x) - Q(x)$ делятся на многочлен $M(x)$, а многочлен $P(x) \cdot Q(x)$ делится на многочлен $M^2(x)$.

Найдите частное:

1) $(x^2 + 3x - 4) : (x + 4)$

2) $(x^2 - 7x + 10) : (x - 5)$

3) $(6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) : (3x - 1)$

4) $(4x^3 - 5x^2 + 6x + 9) : (4x + 3)$

5) $(15x^3 - x^2 + 8x - 4) : (3x^2 + x + 2)$

6) $(9x^4 - 9x^3 - x^2 + 3x - 2) : (3x^2 - 2x + 1)$

Литература

Алгебра и начала математического анализа 10 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. Базовый и профильный.

Колягин Ю. М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И.,
под редакцией Жижченко А.Б., М.: Просвещение, 2010