Тема: Деление многочленов

Любой многочлен P(x), содержащий только переменное x и его натуральные степени, можно записать в стандартном виде

$$\mathbf{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_{n-1}x + a_n}$$

где $a_0, a_1 \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$ – некоторые действительные числа.

Если $a_0 \neq 0$, то многочлен P(x) называют многочленом n – ой степени (или n – степени), член a_0x^n старшим членом, a_n – свободным членом.

$P(x) = a_0$, где $a_0 \neq 0$, называют многочленом нулевой степени.

Число 0 называют нулевым многочленом.

В результате сложения, вычитания и умножения многочленов получаются многочлены. Особое место в теории многочленов занимает деление многочленов уголком.

Разделить уголком многочлен $P(x) = 10x^2 - 7x - 12$ на $Q(x) = 5x + 4$

ДЕЛИМОЕ

ДЕЛИТЕЛЬ

ПЕРВЫЙ ОСТАТОК

ЧАСТНОЕ

ОСТАТОК

$$
\begin{array}{r|l}
10x^2 - 7x - 12 & 5x + 4 \\
\hline
-\ \underline{10x^2 + 8x} & 2x - 3 \\
-15x - 12 & \\
-\ \underline{-15x - 12} & \\
0 &
\end{array}
$$

Остаток равен нулю, поэтому многочлен P(x) делиться на многочлен Q(x)

Пример 1 : Разделить многочлен $P(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ на многочлен $Q(x) = x^2 + x$.

$$
\begin{array}{rl|l}
- & 3x^4 + 2x^2 - 1 & x^2 + x \\ \cline{3-3}
 & 3x^4 + 3x^3 & 3x^2 - 3x + 5 \\ \cline{2-2}
- & -3x^3 + 2x^2 - 1 & \\
 & -3x^3 - 3x^2 & \\ \cline{2-2}
- & 5x^2 - 1 & \\
 & 5x^2 + 5x & \\ \cline{2-2}
 & -5x - 1 &
\end{array}
$$

Степень остатка $-5x - 1$ меньше степени делителя $x^2 + x$, деление закончено.

Ответ: $3x^2 - 3x + 5$ − частное, $-5x - 1$ −остаток.

Формула деления многочленов с остатком

Если многочлен P(x) степени $n > 1$ делят на многочлен Q(x) степени $k \geq 1, k \leq n$ то справедливо равенство:

$$\mathbf{P(x) = M(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

где M(x) – частное, степень которого $m = n - k$, R(x) – остаток , степень которого $l < k$.

Чтобы разделить многочлен P(x) на многочлен Q(x) нужно:

1. Расположить делимое и делитель по убывающим степеням *x*;
2. Разделить старший член делимого на старший член делителя; полученный одночлен сделать первым членом частного;
3. Первый член частного умножить на делитель; результат вычесть из делимого; полученная разность является первым остатком;
4. Чтобы получить следующий член частного, нужно с первым остатком поступить так, как поступали с делимым и делителем в пунктах 2 и 3.

Пример 2 : Разделить многочлен $3x + 4x^4 + 1 - 15x^3 + 2x^5 - 9x^2$ на многочлен $2x^2 - x^3$

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 2x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 3x + 1 & -x^3 + 2x^2 \\
\hline
- \; 2x^5 - 4x^4 & -2x^2 - 8x - 1 \\
\hline
\quad -8x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 3x + 1 & \\
- \; 8x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 3x + 1 & \\
\hline
\quad -x^3 - 9x^2 + 3x + 1 & \\
- \; -x^3 - 2x^2 & \\
\hline
\quad -7x^2 + 3x + 1 &
\end{array}
$$

Ответ: $-2x^2 - 8x - 1$ – частное, $-7x^2 + 3x + 1$ –остаток.

Свойства делимости многочленов

1. Если многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, а многочлен $Q(x)$ делится на многочлен $M(x)$, то многочлен $P(x)$ делиться на многочлен $M(x)$.

2. Если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на многочлен $M(x)$, то многочлены $P(x) + Q(x)$ и $P(x) - Q(x)$ делятся на многочлен $M(x)$, а многочлен $P(x) \cdot Q(x)$ делиться на многочлен $M^2(x)$.

Найдите частное:

1) $(x^2 + 3x - 4):(x + 4)$

2) $(x^2 - 7x + 10):(x - 5)$

3) $(6x^3 + 7x^2 - 6x + 1):(3x - 1)$

4) $(4x^3 - 5x^2 + 6x + 9):(4x + 3)$

5) $(15x^3 - x^2 + 8x - 4):(3x^2 + x + 2)$

6) $(9x^4 - 9x^3 - x^2 + 3x - 2):(3x^2 - 2x + 1)$

Литература

Алгебра и начала математического анализа 10 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. Базовый и профильный. Колягин Ю. М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И., под редакцией Жижченко А.Б., М.: Просвещение, 2010