Тема: Деление многочленов

Любой многочлен $P(x)$, содержащий только переменное x и его натуральные степени, можно записать в стандартном виде

$$\mathbf{P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_{n-1}\, x + a_n}$$

где $a_0, a_1 \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$ – некоторые действительные числа.

Если $a_0 \neq 0$, то многочлен $P(x)$ называют многочленом n – ой степени (или n – степени), член $a_0 x^n$ старшим членом, a_n – свободным членом.

$P(x) = a_{0,}$ где $a_0 \neq 0$, называют многочленом нулевой степени.

Число 0 называют нулевым многочленом.

В результате сложения, вычитания и умножения многочленов получаются многочлены. Особое место в теории многочленов занимает деление многочленов уголком.

Разделить уголком многочлен $P(x) = 10x^2 - 7x - 12$ на $Q(x) = 5x + 4$

ДЕЛИМОЕ

$10x^2 - 7x - 12$

ДЕЛИТЕЛЬ

$5x + 4$

$-$

$10x^2 + 8x$

ЧАСТНОЕ

$2x - 3$

ПЕРВЫЙ ОСТАТОК

$-15x - 12$

$-$

$-15x - 12$

0

ОСТАТОК

Остаток равен нулю, поэтому многочлен P(x) делиться на многочлен Q(x)

Пример 1 : Разделить многочлен $\mathrm{P}(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ на многочлен $\mathrm{Q}(x) = x^2 + x$.

$$
\begin{array}{rl|l}
- & 3x^4 + 2x^2 - 1 & x^2 + x \\
\cline{3-3}
 & \underline{3x^4 + 3x^3} & 3x^2 - 3x + 5 \\
- & -3x^3 + 2x^2 - 1 & \\
 & \underline{-3x^3 - 3x^2} & \\
- & 5x^2 - 1 & \\
 & \underline{5x^2 + 5x} & \\
 & -5x - 1 &
\end{array}
$$

Степень остатка $-5x - 1$ меньше степени делителя $x^2 + x$, деление закончено.

Ответ: $3x^2 - 3x + 5$ − частное, $-5x - 1$ −остаток.

Формула деления многочленов с остатком

Если многочлен P(x) степени $n > 1$ делят на многочлен Q(x) степени $k \geq 1, k \leq n$ то справедливо равенство:

$$\mathbf{P}(x) = \mathbf{M}(x) \cdot \mathbf{Q}(x) + \mathbf{R}(x)$$

где $M(x)$ – частное, степень которого $m = n - k$, $R(x)$ – остаток , степень которого $l < k$.

Чтобы разделить многочлен P(x) на многочлен Q(x) нужно:

1. Расположить делимое и делитель по убывающим степеням x;
2. Разделить старший член делимого на старший член делителя; полученный одночлен сделать первым членом частного;
3. Первый член частного умножить на делитель; результат вычесть из делимого; полученная разность является первым остатком;
4. Чтобы получить следующий член частного, нужно с первым остатком поступить так, как поступали с делимым и делителем в пунктах 2 и 3.

Пример 2 : Разделить многочлен $3x + 4x^4 + 1 - 15x^3 + 2x^5 - 9x^2$ на многочлен $2x^2 - x^3$

$$
\begin{array}{r|l}
-\;\; 2x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 3x + 1 & -x^3 + 2x^2 \\
\underline{2x^5 - 4x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \overline{-2x^2 - 8x - 1} \\
-\;\; -8x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 3x + 1 & \\
\underline{8x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 3x + 1} & \\
-\;\; -x^3 - 9x^2 + 3x + 1 & \\
\underline{-x^3 - 2x^2 \qquad\qquad\quad} & \\
-7x^2 + 3x + 1 &
\end{array}
$$

Ответ: $-2x^2 - 8x - 1$ − частное, $-7x^2 + 3x + 1$ −остаток.

Свойства делимости многочленов

1. Если многочлен P(x) делится на многочлен Q(x), а многочлен Q(x) делится на многочлен M(x) , то многочлен P(x) делиться на многочлен M(x) .

2. Если многочлены P(x) и Q(x) делятся на многочлен M(x), то многочлены P(x) + Q(x) и P(x) − Q(x) делятся на многочлен M(x),

а многочлен P(x) · Q(x) делиться на многочлен M ^{2}(x) .

Найдите частное:

1) $(x^2 + 3x - 4):(x + 4)$

2) $(x^2 - 7x + 10):(x - 5)$

3) $(6x^3 + 7x^2 - 6x + 1):(3x - 1)$

4) $(4x^3 - 5x^2 + 6x + 9):(4x + 3)$

5) $(15x^3 - x^2 + 8x - 4):(3x^2 + x + 2)$

6) $(9x^4 - 9x^3 - x^2 + 3x - 2):(3x^2 - 2x + 1)$

Литература

Алгебра и начала математического анализа 10 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. Базовый и профильный. Колягин Ю. М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И., под редакцией Жижченко А.Б., М.: Просвещение, 2010