Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, составляющие матрицу, называются <u>элементами</u> матрицы.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица размерности mxn

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1.5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$3\times 3 \qquad\qquad 3\times 1 \qquad\qquad 1\times 1$$

Две матрицы называются <u>равными,</u> если у них одинаковая размерность и совпадают строки и столбцы.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то такая матрица называется <u>квадратной.</u>

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица размерности 3х3

Матрица, состоящая из одной строки, называется <u>матрицей-строкой</u> или <u>вектором-строкой</u>.

$$A = (a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n})$$

матрица-строка

Матрица, состоящая из одного столбца, называется <u>матрицей-столбцом</u> или <u>вектором-столбцом</u>.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

матрица-столбец

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца совпадает с номером строки, называются ***диагональными.***

Если в квадратной матрице все диагональные элементы равны 1, а остальные элементы равны 0, то она называется ***единичной.***

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

единичная матрица

Матрица любого размера называется <u>нулевой</u>, если все ее элементы равны 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

нулевая матрица

С помощью матриц удобно описывать различного рода зависимости.

<u>Например:</u>

Распределение ресурсов по отраслям экономики:

Ресурсы	*Промышленность*	*С/хозяйство*
Эл. энергия	*8*	*7,2*
Труд. ресурсы	*5*	*3*
Водные ресурсы	*4,5*	*5,5*

Эту зависимость можно представить в виде матрицы:

$$\underset{3\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7.2 \\ 5 & 3 \\ 4.5 & 5.5 \end{pmatrix}$$

Где элемент a_{ij} показывает сколько *i*–го ресурса потребляет *j*–отрасль.

Например, a_{32} показывает, сколько воды потребляет сельское хозяйство.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

1. Умножение матрицы на число

Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Полученные произведения образуют итоговую матрицу.

Пусть дана матрица $\underset{m\times n}{A} = (a_{ij})$

Умножаем ее на число λ: $\lambda \cdot A = B$

Где каждый элемент матрицы B:

$$\boxed{b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}}$$

Где:

$$i = 1,2\ldots m$$

$$j = 1,2\ldots n$$

Например:

Умножая матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

на число 2, получим:

$$A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Сложение матриц

Складываются матрицы одинаковой размерности. Получается матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов исходных матриц.

Пусть даны матрицы $A = (a_{ij})$

$B = (b_{ij})$

Складываем их:

$$A + B = C$$

Где каждый элемент матрицы *С*:

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Аналогично проводится вычитание матриц.

Пример

Найти сумму и разность матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}$$

Пример

Найти сумму матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матриц

Умножение матриц возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда каждый элемент полученной матрицы равен сумме произведений элементов i–ой строки первой матрицы на соответствующие элементы j-го столбца второй.

Пусть даны матрицы $\underset{m\times k}{A} = (a_{ij})$

$\underset{k\times n}{B} = (b_{ij})$

Умножаем их:

$$\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B} = \underset{m\times n}{C}$$

Где каждый элемент матрицы C:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}}$$

$$i = 1,2\ldots m$$

$$j = 1,2\ldots n$$

Пример

Найти произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, следовательно их произведение существует:

$$\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times2}{B}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+3\cdot4+0\cdot2\\ 1\cdot1+0\cdot1+4\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot4+4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 1 & 8\end{pmatrix}$$

Теперь перемножим матрицы в обратном порядке:

$$\underset{3\times2}{B}\cdot\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot3+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot4\\ 1\cdot2+4\cdot1 & 1\cdot3+4\cdot0 & 1\cdot0+4\cdot4\\ 0\cdot2+2\cdot1 & 0\cdot3+4\cdot0 & 0\cdot0+2\cdot4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 6 & 3 & 16\\ 2 & 0 & 8\end{pmatrix}}$$

Умножение матриц в общем случае некоммутативно:

$$\boxed{A\cdot B\neq B\cdot A}$$

Пример

Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Перечисленные операции над матрицами обладают следующими **свойствами:**

1

A+B=B+A

2

(A+B)+C=A+(B+C)

3

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

4

$A(B+C) = AB + AC$

5

$A(BC) = (AB)C$

4. Транспонирование матриц

Матрица A^T называется <u>транспонированной</u> к матрице А, если в ней поменяли местами строки и столбцы.

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{n\times m}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства операции траспонирования:

1

$(A^{T})^{T}=A$

2

$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$

3

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

4

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Пример

Транспонировать матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

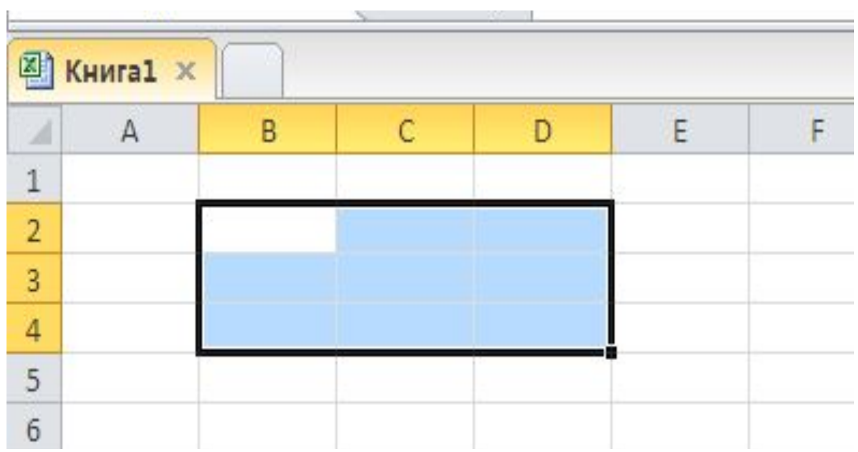
Решение:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

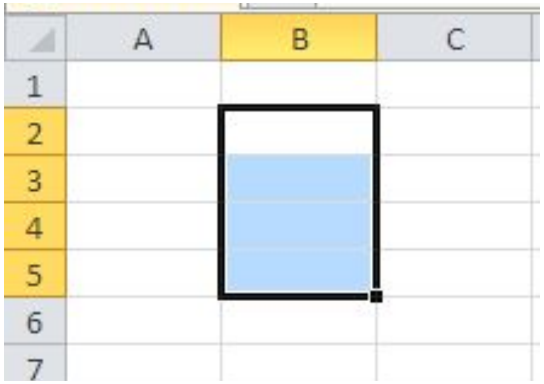
В программировании матрица – это двумерный массив

Диапазон – это совокупность смежных ячеек, образующих прямоугольную область таблицы, заданную адресами левой верхней и нижней правой ячеек области. При указании диапазона принята форма записи, в которой эти адреса указываются через двоеточие.

- B2:D4 – это диапазон из девяти ячеек B2, B3, B4, C2, C3, C4, D2, D3, D4 (матрица размера 3x3);



- B2:B5 - это диапазон из четырех ячеек B2, B3, B4, B5 (вектор- столбец);



- B2:E2 - это диапазон из четырех ячеек B2, C2, D2, E2 (вектор-строка)

Понятие табличных формул

- ***Табличные формулы* или *формулы массива*** – очень мощное вычислительное средство Excel, позволяющее работать с блоками рабочего листа как с отдельными ячейками.
- Табличные формулы в качестве результата возвращают массив значений. **Поэтому перед вводом такой формулы необходимо выделить диапазон ячеек, куда будут помещены результаты. Потом набирается сама формула.**

Матрицы. Действия с матрицами

Операция	Размеры матриц	Функция в Excel'е	Размер того, что получится
Умножение матриц	n×m, m× k	МУМНОЖ(матрица1;матрица2)	n× k
Сложение матриц	n× m, n× m	МАТРИЦА1+МАТРИЦА2	n× m
Вычисление определителя	n× n	МОПРЕД(матрица)	1× 1
Вычисление обратной	n× n	МОБР(матрица)	n× n
Транспонирование	n× m	ТРАНСП(матрица)	m× n

Сложение матриц

$$A_{ij}+B_{ij} = C_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Для сложения и вычитания *матриц в Excel не существует специальных функций – следует выполнить поэлементное сложение (вычитание) матриц. Складывать (вычитать) можно матрицы одного размера.*

Умножение матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j3} \end{pmatrix}$$

Для умножения матриц в Excel применяется функция ***МУМНОЖ****(матрица1;матрица2).* *Ввод функции завершить нажатием* ***клавиши F4 и комбинацией клавиш Ctrl +Shift + Enter***

Транспонирование матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для транспонирования матрицы в *Excel* существует функция ***ТРАНСП(матрица)*** (Завершаем ввод функции нажатием ***клавиши F4 и комбинацией клавиш***
Ctrl + Shift + Enter.)